Chapitre 2

Transformation de Laplace

3.1 Introduction

La transformée de Laplace (TL) est une technique très employée en asservissement pour transformer une fonction dépend du temps en une fonction dépend d'une variable complexe. Elle permet de transformer des équations différentielles d'ordre quelconque dans le domaine du temps en des équations algébriques de même ordre dans le domaine complexe.

3.2 Définition

Soit $f(t)$ une fonction de la variable réelle t définie pour $t > 0$, nulle pour $t < 0$. On appelle transformation de Laplace de $f(t)$ la fonction :

$$F(S) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-St}\, dt \tag{3.1}$$

S : variable complexe ($S = \sigma + \jmath\omega$).
Exemple : $f(t) = e^{-2t}$
La transformée de Laplace est :
$\mathcal{L}[e^{-2t}] = \int_0^{\infty} e^{-2t} \cdot e^{-St}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(S+2)t}\, dt \Rightarrow \mathcal{L}[e^{-2t}] = \dfrac{-1}{S+2}\, e^{-(S+2)t}\Big|_0^{\infty}$
donc $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1}{S+2}$.

3.3 Propriétés de la transformation de Laplace

1. Si $\mathcal{L}[f(t)] = F(S)$ alors

$$\mathcal{L}[kf(t)] = k\, F(S) \quad (k : \text{constante}) \tag{3.2}$$

Exemple :

$f(t) = e^{-2t}$, sachant que $F(S) = \dfrac{1}{S+2}$

$\mathcal{L}\left[3e^{-2t}\right] = \dfrac{3}{S+2} = 3F(S)$

2.
$$\mathcal{L}\left[f_1(t) + f_2(t)\right] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] \tag{3.3}$$

Exemple :

$\mathcal{L}\left[e^{-2t} + e^{-t}\right] = \int_0^\infty (e^{-2t} + e^{-t}) \cdot e^{-St}\ dt\ = \int_0^\infty e^{-2t} \cdot e^{-St}\ dt\ + \int_0^\infty e^{-t} \cdot e^{-St}\ dt\ = \dfrac{1}{S+2} + \dfrac{1}{S+1} = \mathcal{L}\left[e^{-2t}\right] + \mathcal{L}\left[e^{-t}\right]$

3.
$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = S\ F(S) - f(0) \tag{3.4}$$

Exemple

$f(t) = e^{-2t} \Rightarrow \mathcal{L}\left[\dfrac{d\ e^{-2t}}{dt}\right] = S\dfrac{1}{S+2} - 1 = -2\dfrac{1}{S+2} = \mathcal{L}\left[-2\ e^{-2t}\right]$

En général,
$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = S^n\ F(S) - \sum_{i=0}^{n-1} S^{n-1-i} \frac{d^i f(0)}{dt^i} \tag{3.5}$$

4.
$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\ \right] = \frac{F(S)}{S} \tag{3.6}$$

Exemple

$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-2t}\right] = \dfrac{1}{S}\dfrac{1}{S+2} = \dfrac{1}{S(S+2)}$

5. le cas général, on aura :
$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \int \dots \int f(t)dt \dots d\tau\right] = \frac{F(S)}{S^n} \tag{3.7}$$

6. La valeur initiale $f(0)$ de la fonction $f(t)$ dont $\mathcal{L}[f(t)] = F(S)$ est :
$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{S\to\infty} S\ F(S); \quad t > 0 \tag{3.8}$$

Exemple

$f(t) = e^{-2t}$

$f(0) = \lim\limits_{t\to 0} e^{-2t} = \lim\limits_{S\to\infty} S\left(\dfrac{1}{S+2}\right) = 1$

7. La valeur finale $f(\infty)$ de la fonction $f(t)$ est :
$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{S\to 0} S\ F(S) \tag{3.9}$$

Exemple

$f(t) = e^{-2t}$

$f(\infty = \lim_{t\to\infty} e^{-2t} = \lim_{S\to 0} S\left(\frac{1}{S+2}\right) = 0$

8. $\mathcal{L}\left[f(\frac{t}{a})\right] = a\ F(a\cdot S)$
   Exemple
   Etant donné $\mathcal{L}\left[e^{-t}\right] = \frac{1}{S+1}, a = \frac{1}{2}$
   $\mathcal{L}\left[f(\frac{t}{a})\right] = \mathcal{L}\left[e^{-2t}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}S+1}\right]$
9. Transformée de Laplace de la fonction échelon unité :
$$\mathcal{L}\left[u(t)\right] = \frac{1}{S} \tag{3.10}$$
10. Transformée de Laplace de la fonction impulsion de Dirac :
$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1 \tag{3.11}$$
11. Transformée de Laplace de la fonction pente unité :
$$\mathcal{L}\left[r(t)\right] = \frac{1}{S^2} \tag{3.12}$$
12. $$\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{S+a} \tag{3.13}$$
13. $$\mathcal{L}\left[\sin t\right] = \frac{1}{S^2+1};\quad \mathcal{L}\left[\sin\omega t\right] = \frac{\omega}{S^2+\omega^2} \tag{3.14}$$
14. $$\mathcal{L}\left[\cos t\right] = \frac{S}{S^2+1};\quad \mathcal{L}\left[\cos\omega t\right] = \frac{S}{S^2+\omega^2} \tag{3.15}$$
15. $$\mathcal{L}\left[e^{-at}\sin\omega t\right] = \frac{\omega}{(S+a)^2+\omega^2} \tag{3.16}$$
16. $$\mathcal{L}\left[e^{-at}\cos\omega t\right] = \frac{S+a}{(S+a)^2+\omega^2} \tag{3.17}$$

3.4 L'inversion de la transformée de Laplace

Soit donnée la transformée $F(S)$, le passage de cette fonction à la fonction $f(t)$ c'est l'inversion de transformation de Laplace, on la note : $\mathcal{L}^{-1}F(S)$, telle que :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(S)\right] = f(t) \tag{3.18}$$

3.5 Application de la T.L. à la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants

L'application de la la T.L. à la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants est de la plus grande importance des problèmes portant sur les systèmes de commande linéaires.

Considérons les équations à coefficients constants de la forme :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i x}{dt^i}; \quad a_n = 1,\ m \leq n \tag{3.19}$$

x : signal d'entrée, y : signal de sortie.
Les conditions aux limites sont : $x_0^k = \left.\frac{d^k x}{dt^k}\right|_{t=0}$, $y_0^k = \left.\frac{d^k y}{dt^k}\right|_{t=0}$. La transformée de Laplace de l'équation 3.19 est :

$$\sum_{i=0}^{n}\left[a_i\left(S^i Y(S) - \sum_{k=0}^{i-1} S^{i-1-k} y_0^k\right)\right] = \sum_{i=0}^{m}\left[b_i\left(S^i X(S) - \sum_{k=0}^{i-1} S^{i-1-k} x_0^k\right)\right]$$

qui peut s'écrire

$$Y(S) = \left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i S^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i S^i}\right] X(S) - \frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{i-1} b_i S^{i-1-k} x_0^k - \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_i S^{i-1-k} y_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i S^i}$$

On peut déduire :

$$y(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i S^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i S^i} X(S) - \frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{i-1} b_i S^{i-1-k} x_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i S^i}\right]}_{\textbf{Réponse forcée}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_i S^{i-1-k} y_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i S^i}\right]}_{\text{Réponse libre}} \tag{3.20}$$

3.6 Décomposition de la transformée de Laplace en éléments simples

les transformées de Laplace des équations différentielles sont souvent représentées sous forme de quotient de deux polynômes en S. La décomposition de ce quotient en éléments simples nous permet de trouver rapidement la transformation inverse de Laplace.
Soit : $F(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i S^i / \sum_{i=0}^{n} a_i S^i \quad a_n = 1; \quad n \geq m$
Le polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i S^i$ possède n racines, les racines peuvent être uniques ou multiples.

- Si le polynôme possède n_1 racines égalent à P_1,
- Si le polynôme possède n_2 racines égalent à P_2,

  $\vdots$

– Si le polynôme possède n_r racines égalent à P_r,

Alors :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i S^i = \prod_{i=1}^{r} (S - P_i)^{n_i}; \quad \sum_{i=0}^{r} n_i = n \tag{3.21}$$

Exemple 3.6.1 $S^2 + 3S + 2 = (S+1)(S+2)$

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = 1 \longrightarrow P_1 = -1 \\ n_2 = 1 \longrightarrow P_2 = -2 \end{array}\right\} r = 2 \text{ et } \sum n_i = 2 = n$$

Exemple 3.6.2 $S^3 - 5S^2 + 8S - 4 = (S-2)^2(S-1)$

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = 2 \longrightarrow P_1 = 2 \\ n_2 = 1 \longrightarrow P_2 = 1 \end{array}\right\} r = 2 \text{ et } \sum n_i = 3 = n$$

Nous pouvons mettre

$$F(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i S^i / \prod_{i=1}^{r} (S - P_i)^{n_i} \tag{3.22}$$

Le développement en éléments simples est :

$$F(S) = b_n + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(S - P_i)^k} \tag{3.23}$$

où

$$C_{ik} = \frac{1}{(n_i - k)!} \frac{d^{n_i - k}}{dS^{n_i - k}} \left[(S - P_i)^{n_i} \cdot F(S) \right]_{S = P_i} \tag{3.24}$$

Les coefficients C_{ik}, $i = 1, r$ sont les résidus de $F(S)$ en P_i

– Si il n'existe pas des racines multiples :

$$F(S) = b_n + \sum_{i=1}^{n} \frac{C_{i1}}{S - P_i}; \quad C_{i1} = (S - P_i) \cdot F(S)|_{S = P_i} \tag{3.25}$$

Exemple 3.6.3

$$F(S) = \frac{2S + 1}{S^2 - 4S + 3}$$

on peut écrire $F(S) = \dfrac{2S+1}{(S-1)(S-3)}$

ou sous la forme $F(S) = \dfrac{C_{11}}{S-1} + \dfrac{C_{21}}{S-3}$

avec

$$C_{11} = (S-1) \cdot F(S)|_{S=1} = \frac{-3}{2}$$
$$C_{21} = (S-3) \cdot F(S)|_{S=3} = \frac{7}{2}$$

on peut écrire finalement :

$F(S) = \dfrac{-3}{2} \left(\dfrac{1}{S-1} \right) + \dfrac{7}{2} \left(\dfrac{1}{S-3} \right)$

Exemple 3.6.4

$$F(S) = \frac{1}{(S+1)^2(S+2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = 2 \longrightarrow P_1 = -1 \\ n_2 = 1 \longrightarrow P_2 = -2 \end{array}\right\} r = 2 \text{ et } \sum n_i = 3 = n$$

on peut écrire $F(S) = b_3 + \frac{C_{11}}{S+1} + \frac{C_{12}}{(S+1)^2} + \frac{C_{21}}{S+2}; \quad b_3 = 0$

avec :

$C_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dS^{2-1}} \left[(S+1)^2 \cdot F(S)\right]_{S=-1} = \left.\frac{-1}{(S+2)^2}\right|_{S=-1} = -1$

$C_{12} = \frac{1}{(2-2)!} \frac{d^{2-2}}{dS^{2-2}} \left[(S+1)^2 \cdot F(S)\right]_{S=-1} = \left.\frac{1}{S+2}\right|_{S=-1} = 1$

$C_{21} = \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{dS^{1-1}} \left[(S+2)^1 \cdot F(S)\right]_{S=-2} = \left.\frac{1}{(S+1)^2}\right|_{S=-2} = 1$

donc : $F(S) = \frac{-1}{S+1} + \frac{1}{(S+1)^2} + \frac{1}{S+2}$

3.7 Détermination des inverses par utilisation du développement en éléments simples

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{m} b_i S^i / \sum_{i=0}^{n} a_i S^i\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[b_n + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(S-P_i)^k}\right] \tag{3.26}$$

$$= b_n \delta(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(k-1)!} t^{(k-1)}\, e^{P_i t} \tag{3.27}$$

Exemple 3.7.1 $F(S) = \frac{S^2+2S+2}{(S+1)(S+2)}$

$\mathcal{L}^{-1}[F(S)] = \mathcal{L}^{-1}[1 + \frac{1}{S+1} - \frac{2}{S+2}] = \mathcal{L}^{-1}[1] + \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{S+1}] - \mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{S+2}]$

$\Rightarrow f(t) = \delta(t) + e^{-t} - 2\, e^{-2t}$

Exemple 3.7.2 $\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 6\, y = \frac{d^2x}{dt^2} - x$

avec : $y(0) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0; \left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0} = 1$

– Trouvez $Y(S)$

$S^3Y(S) - S^2y(0) - Sy'(0) - y''(0) + 3\left[S^2Y(S) - Sy(0) - y'(0)\right] - [SY(S) - y(0)] + 6Y(S) = S^3X(S) - Sx(0) - x'(0) - X(S)$

$Y(S)\left[S^3 + 3S^2 - S + 6\right] - 1 = (S^2-1)X(S)$

$Y(S) = \frac{S^2-1}{S^3+3S^2-S+6}X(S) + \frac{1}{S^3+3S^2-S+6}$

Exemple 3.7.3 $F(S) = \dfrac{-1}{S+1} + \dfrac{1}{(S+1)^2} + \dfrac{1}{S+2}$
$\mathcal{L}^{-1}[F(S)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{-1}{S+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(S+1)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{S+2}\right]$
$f(t) = -e^{-t} + t\ e^{-}t + e^{-2t}$

Exercices

Exercice 3.7.1 Calculer les fonctions des transformées de Laplace suivantes

- $F(S) = \dfrac{5}{S^2+4} + \dfrac{20S}{S^2+9}$
- $F(S) = \dfrac{7}{S^2+10S+41}$
- $F(S) = \dfrac{S+3}{S^2+2S+10}$
- $F(S) = \dfrac{4S+4}{S^2-7S+12}$
- $F(S) = \frac{S^2+7S+10}{S^3+7S^2+15S+9}$

Exercice 3.7.2 1) Trouvez la transformée de Laplace de :

- $f(t) = e^{-}t + \cos t$
- $\mathcal{L}\left[\dfrac{d^3 f(t)}{dt^3}\right]$
- $f(t) = 2\ \sin(\omega t - 30)$

2) Trouvez la valeur finale et initiale ($f(\infty)$ et $f(0)$ de $f(t) = e^{-}t + \cos t$

Exercice 3.7.3 Si $f(t)$ a pour transformée $F(S)$, trouvez alors la transformée $F'(S)$

Exercice 3.7.4 Si $f(t) \to F(S)$, calculez la transformée $F(t - t_0)$

Exercice 3.7.5 Résolution l'équation différentielle suivante, en utilisant la méthode de La Laplace.
$y'' + 9y' + 20y = 1$
$y(0) = 1\,;\ y'(0) = 5$

Exercice 3.7.6 Rechercher en décomposant en éléments simples les transformées des fonctions suivantes :