1) f يكون محدودا على I

الفصل III

الاشتقاق

III الاشتقاق:

1) مشتق الدالة عند نقطة، مشتق دالة على مجال (الدالة المشتقة):

ليكن
$$f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f(x)$$

نقول أن f يقبل الاشتقاق عند النقطة $x_0\in]a,b[$ إذا كانت النهاية (المنتهية) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ($x\in[a,b]$) موجودة ووحيدة

وتسمى هذه النهاية الوحيدة بمشتق f عند x_0 ونرمز لها بالرمز $f'(x_0)$ ، أي أن:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

* ونقول أن f يقبل الاشتقاق على المجال $[a,b]$ إذا كان f يقبل الاشتقاق عند كل نقطة $x\in[a,b]$ ونرمز لهذه النهاية بـ $f'(x)$.

إن المشتقات ضرورية في نظرية الاقتصاد حيث يصفونها بأنها "هامشية"

مثال: لنفرض أن مصنعا ينتج x طنا من الفولاذ أسبوعيا بتكلفة إجمالية مقدرة بالدينار ومساوية إلى $f(x)$.

إن هذه التكلفة الإجمالية تتضمن مصاريف الصيانة والرواتب والضرائب وثمن المادة الخام ... إلخ.

ولنفرض أنه من أجل إنتاج $x+\Delta x$ طنا من الفولاذ أسبوعيا تكون التكلفة $f(x)+\Delta f(x)$ دينار

إن الزيادة في التكلفة من أجل كل وحدة زيادة في الإنتاج تساوي $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ تسمى النهاية $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ بالتكلفة الهامشية وهي عبارة عن مشتق $\Delta f(x)$ بالنسبة لـ x .

مثال:

① إذا كان $f(x)=c$ ثابت فإن $f'(x)=0$ لأن:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=0$$

② إذا كان $f(x)=x^n$ فإن $f'(x_0)=nx_0^{n-1}$ لأن:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\dots+x_0^{n-1})}{(x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\dots+x_0^{n-1})=\underbrace{x_0^{n-1}+x_0^{n-1}+\dots+x_0^{n-1}}_{n\text{ مرة}}$$

$$=nx_0^{n-1}$$

٢) المشتق على يمين (على يسار) نقطة :

إذا كانت النهاية (المنتهية) $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة ووحيدة،

نقول أن f يقبل الاشتقاق على يمين x_0 أو من اليمين، وتسمى هذه النهاية المشتق من اليمين ونرمز لها بالرمز $f'(x_0+0)$،

بنفس الشكل نعرف المشتق على اليسار x_0 ونرمز ب:

$$f'(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

أي أن x يقترب نحو x_0 بقيم أقل أو أصغر من x_0 ($x\to x_0^-$)،

أمثلة:

1) $f(x)=|x|$ وليكن $x_0=0$ فإن:

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

ومنه f يقبل الاشتقاق على يمين $x_0=0$.

$$f'(x_0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

ومنه f يقبل الاشتقاق على يسار $x_0=0$،

وحيث $f'(x_0+0)\neq f'(x_0-0)$ فإن f لا يقبل الاشتقاق عند $x_0=0$.

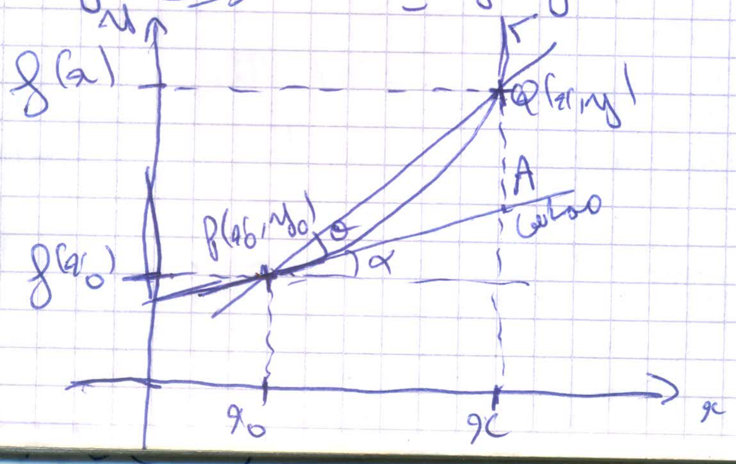
2) $f(x)=\sqrt{x}$ فإن f لا يقبل الاشتقاق عند $x_0=0$.

لأن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty$$

3) المعنى الهندسي للمشتق:

ليكن Γ بيان الدالة $y=f(x)$ في المستوى xoy كما في الشكل التالي



ولتكن $P(x_0, f(x_0))$ و $Q(x, f(x))$ تقتربين من هذا البيان، عندما $x \to x_0$ فإن Q تقترب من P على البيان وبالتالي فإن القطعة PQ تتحول لتأخذ وضع المماس PA لبيان f عند P فإذا كان PQ يصنع الزاوية θ مع المحور الموجب ox فإن النسبة، $\tan\theta = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ وبالتالي فإن $f'(x_0)=\tan\alpha$ ، حيث α هي زاوية المماس مع المحور الموجب ox، أي أن الزاوية θ التي يصنعها PQ مع ox تتحول إلى الزاوية α التي يصنعها المماس مع ox عندما $x \to x_0$. وبالتالي فإن مشتق f عند x_0 هو عبارة عن ميل المماس عند النقطة $P(x_0, y_0)$ ذات الفاصلة x_0.

إذن فالبحث عن مشتق الدالة f عند نقطة x_0 يعني البحث عن مماس لبيان الدالة f عند النقطة x_0.

نظرية: ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ، $x\mapsto y=f(x)$ ، $x_0\in[a,b]$

عندئذ f يقبل الاشتقاق عند x_0 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f مستمر عند x_0.

($\not\Leftarrow$ يكفي إعطاء مثال مضاد على أن العكس غير صحيح: $f(x)=|x|$ مستمر عند $x_0=0$ ولكنه لا يقبل الاشتقاق عند $x_0=0$)

4) المشتقات المتتابعة:

ليكن $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $x_0\in I$ ، إذا كان f يقبل الاشتقاق عند x_0 فنرمز لمشتقه بـ $f'(x_0)$ ، وإذا قبل f' بدوره مشتقا عند x_0 أي أن: $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ موجودة، فنرمز لهذه النهاية بـ $f''(x_0)=f^{(2)}(x_0)$ ونسميها المشتق الثاني لـ f عند x_0، وهكذا بالتدريج نعرف المشتق من المرتبة n لـ f عند x_0 والذي نرمز له بـ $f^{(n)}(x_0)$ وهو النهاية،

$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$ في حال وجودها.