ونصطلح على أن المشتق من المرتبة صفر $(0)$ لـ $f$ هو $f$ نفسه أي أن:
$$f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$$
نسمي المشتقات $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$ بالمشتقات المتتابعة لـ $f$.

**نظرية:** ليكن $f, g: I\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $x_0\in I$:
فإذا كان $f, g$ قابلتين للاشتقاق عند $x_0$ فإن الدوال التالية: $f\pm g$، $(f.g)$، $\frac{f}{g}$ ($g(x_0)\neq 0$)، $(\alpha.f)$، $\alpha\in\mathbb{R}$ كلها تقبل الاشتقاق عند $x_0$ ولدينا القواعد التالية:
$$(f\pm g)'=f'\pm g'$$
$$(f.g)'=f'.g+f.g'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'.g-g'.f}{g^2}$$
$$(\alpha.f)'=\alpha.f'$$

## 6) اشتقاق دالة مركبة $g\circ f$:

**نظرية:** ليكن $I$ و $J$ مجالين من $\mathbb{R}$ ونعرف الدالتين $f$ و $g$ كما يلي:
$$f: I\longrightarrow \mathbb{R},\ g: J\longrightarrow \mathbb{R}$$
بحيث $f(I)\cap J\neq\phi$، عندئذ يمكن تعريف $g\circ f$ بـ:
$$I \xrightarrow{f} f(I)\cap J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$g\circ f$$
وليكن $x_0\in I$ بحيث $f(x_0)\in f(I)\cap J$ عندئذ إذا كان $f$ يقبل الاشتقاق عند $x_0$ وكان $g$ يقبل الاشتقاق عند $f(x_0)$ فإن $g\circ f$ يقبل الاشتقاق عند $x_0$ ولدينا:
$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0)).f'(x_0).$$

## 7) مشتق الدالة العكسية:

**نظرية:** إذا كان $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة ومتزايدة تماما (أو مستمرة ومتناقصة تماما) فإنه إذا كان $f$ يقبل الاشتقاق عند $x_0\in I$ و $f'(x_0)\neq 0$ فإن الدالة العكسية $f^{-1}$ تقبل الاشتقاق عند $y_0=f(x_0)$ ومشتقته يكون:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

## IV- القيم الحدية (العظمى والصغرى):

① **تعاريف:** ليكن $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفا على $I$ ولتكن $x_0 \in I$

نقول أن للدالة $f$ قيمة عظمى مطلقة عند $x_0$ إذا تحقق الشرط:

$$\forall x \in I \, ; \, f(x) \leq f(x_0)$$

ونقول أن لـ $f$ قيمة صغرى مطلقة عند $x_0$ إذا تحقق الشرط:

$$\forall x \in I \, ; \, f(x) \geq f(x_0)$$

أي أن الشرط يتحقق بصورة مطلقة ودون أي قيد على $x \in I$،
ونقول أن للدالة $f$ قيمة عظمى نسبية (أو محلية) عند $x_0$ إذا تحقق الشرط:

$$\exists \delta_1 > 0 \, ; \, |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

أي أنه يوجد مجال $L = ]x_0 - \delta_1 , x_0 + \delta_1[$ مركزه $x_0$ ويتحقق عليه الشرط السابق من أجل كل $x \in L$.
ونقول أن للدالة $f$ قيمة صغرى نسبية (أو محلية) عند $x_0$ إذا تحقق الشرط:

$$\exists \delta_2 > 0 \, ; \, |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

**مثال:** ليكن:

$$f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^4 - x^5$$

باستعمال جدول التغيرات نحصل على:

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $\frac{4}{5}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $48$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $(\frac{4}{5})^5$ | $\searrow$ | $-16$ |

فنرى أن:

$$\forall x \in [-2, 2] \, ; \, f(x) \leq f(-2) = 48$$
$$f(x) \geq f(2) = -16$$

قيمة عظمى مطلقة و صغرى مطلقة

هذا يمكن التعرف على القيم الحدية بطريقة أخرى:
إذا كان $f$ معرفا على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ ووجد المشتق على يمين $a$ أي $f'(a+0)$ ووجد المشتق على يسار $b$ أي $f'(b-0)$ فإنه لدينا ما يلي:

لـ $f$ قيمة عظمى نسبية عند $a$ إذا كان: $f'(a+0)<0$

لـ $f$ " " " عند $b$ " : $f'(b-0)>0$

لـ $f$ " صغرى " " $a$ " : $f'(a+0)>0$

لـ $f$ " صغرى " " $b$ " : $f'(b-0)<0$

عموما لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى لدالة $f$ فإننا نعين من أجل ذلك تلك النقاط $x$ حيث:

أ) ينعدم المشتق

ب) لا يوجد المشتق

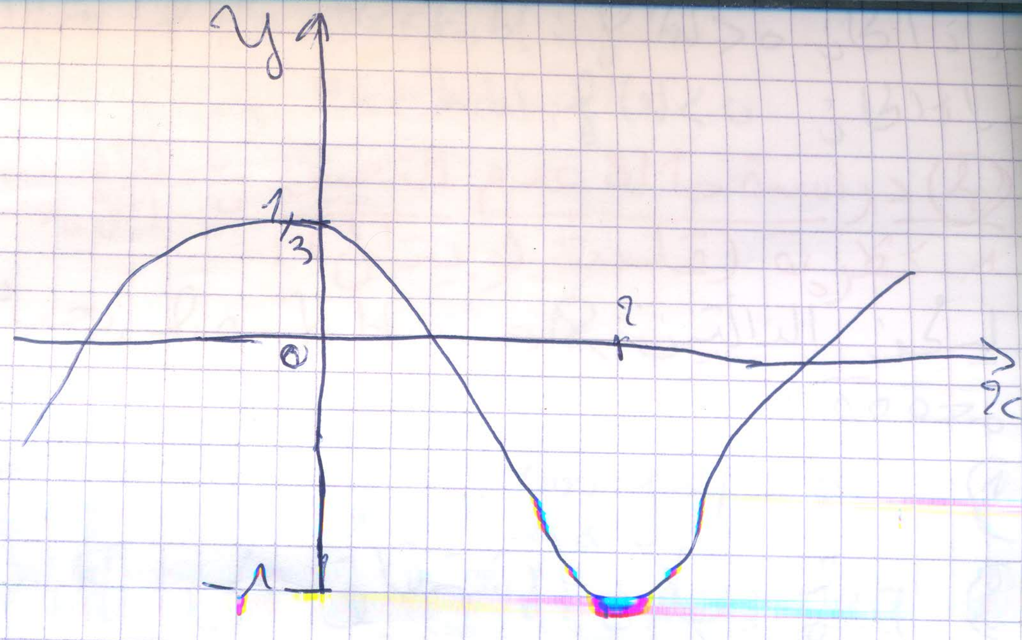
ج) يكون مجال تعريف الدالة $f$ نصف مفتوح.

إن هذه هي قيم المتغير $x$ المرشحة لكي تكون لـ $f$ قيمة حدية (عظمى أو صغرى) نسمي هذه النقاط $x$ بالنقاط الحرجة لبلوغ $f$ قيمة حدية، ولكي نقرر أي هذه النقاط قيم حدية (عظمى أو صغرى) علينا أن نقارن قيم $f$ في هذه النقاط مع بعضها ومع حلول النقاط المجاورة.

مثال: لتكن $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+\frac{1}{3}$

$$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{1}{3}$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |




فهناك قيمة عظمى نسبية لـ $f$ عند $x=0$ وقيمتها $f(0)=\frac{1}{3}$

وهناك قيمة صغرى نسبية عند $x=2$ وقيمتها $f(2)=-1$

نظرية: ليكن $f: I=[a,b]\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

إذا كان $f$ يقبل الاشتقاق على $]a,b[$ وكان لـ $f$ نهاية عظمى نسبية (أو صغرى نسبية) عند $x_0\in ]a,b[$ فإن $f'(x_0)=0$

## ② نظرية رول (Rolle):

ليكن: $f:[a,b]\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث يكون:

1- $f$ مستمرا على $[a,b]$

2- $f$ يقبل الاشتقاق على $]a,b[$

3- $f(a)=f(b)$

عندئذ توجد نقطة $c\in ]a,b[$ تحقق $f'(c)=0$.

## ③ نظرية التزايدات المنتهية:

ليكن $f:[a,b]\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث يكون:

① $f$ مستمر على $[a,b]$ ، ② $f$ يقبل الاشتقاق على $]a,b[$

عندئذ توجد نقطة $c\in ]a,b[$ تحقق:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

نظرية: إذا كان $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ $f$ مستمرا وقابلا للاشتقاق على $]a,b[$ عندئذ.