Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2020/2021

Solutions de l'exercice 4 de la Série N°**2**

Exercice 4. Soit X une population normale d'espérance inconnue μ et de variance 4. On prélève un échantillon de taille 16 pour réaliser le test

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 10 \\ H_1 : \mu > 10 \end{cases}.$$

1. Construire le test uniformément le plus puissant au niveau $\alpha = 0.05$.
2. Déterminer sa fonction puissance, puis tracer son graphe.
3. Si $\mu = 12$, calculer le risque de deuxième espèce.

****

Solution. **1)** Il s'agit de tester une hypothèse simple contre une hypothèse composite. Nous allons appliquer encore une fois le Lemme de Neyman-Pearson qui reste valable pour ce cas. Le rapport de vraisemblance est

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{\prod_{i=1}^{16} \frac{1}{\sqrt{2\times 4}} \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{2}\right)^2}{\prod_{i=1}^{16} \frac{1}{\sqrt{2\times 4}} \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-10}{2}\right)^2} = \frac{\exp -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{16}\left(\frac{x_i-\mu}{2}\right)^2}{\exp -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{16}\left(\frac{x_i-10}{2}\right)^2}, \text{ pour } \mu > 10.$$

On peut vérifier que

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_i-\mu}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_i-10}{2}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{8}(10-\mu)(\mu - 2x_i + 10). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{L_1}{L_0} &= \exp \sum_{i=1}^{16}\left\{-\frac{1}{8}(\mu-10)(\mu-2x_i+10)\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{8}(\mu-10)(16\mu - 2s + 160)\right\}, \text{ où } s = \sum_{i=1}^{16} x_i. \end{aligned}$$

En d'autres termes
$$\frac{L_1}{L_0} = \exp\left\{-\frac{1}{8}(\mu-10)\left(16\mu - \frac{\overline{x}}{8} + 160\right)\right\}, \text{ où } \overline{x} = \frac{s}{16}.$$

Ainsi la région critique est

$$W = \left\{(x_1, ..., x_{16}) \in \mathbb{R}^{16} : \exp\left\{-\frac{1}{8}(\mu-10)\left(16\mu - \frac{\overline{x}}{8} + 160\right)\right\} \geq k\right\}.$$

On doit supposer $k > 0$, car le rapport de vraisemblance $L_1/L_0 > 0$. Il est évident que la dernière inégalité implique que

$$-\frac{1}{8}(\mu-10)\left(16\mu - \frac{\overline{x}}{8} + 160\right) \geq \log k$$

Comme $\mu > 10$, alors $-(\mu-10)/8 < 0$, ce qui implique

$$16\mu - \frac{\overline{x}}{8} + 160 \leq -\frac{8\log k}{\mu - 10},$$

par conséquent $\overline{x} > c$ où $c := \frac{64 \log k}{\mu - 10} + 1280 \times +128\mu$. La région de rejet peut être alors réécrite comme suit

$$W = \left\{ (x_1, ..., x_{16}) \in \mathbb{R}^{16} : \overline{x} \geq c \right\},$$

où c est telle que $\mathbf{P}_0 \left(\overline{X} > c \right) = \alpha = 0.05$. Sous H_0, nous avons $\overline{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}(10, 4/16) \equiv \mathcal{N}(10, 1/4)$, donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 \left(\overline{X} > c \right) &= \mathbf{P}_0 \left(\frac{\overline{X} - 10}{\sqrt{1/4}} \geq \frac{c - 10}{\sqrt{1/4}} \right) \\ &= \mathbf{P} \left(Z \geq \frac{c - 10}{1/2} \right) = 1 - \mathbf{P} \left(Z \leq 2 (c - 10) \right) = 0.05, \end{aligned}$$

ou $\mathbf{P} \left(Z \leq 2 (c - 10) \right) = 1 - 0.05 = 0.95$, en d'autres termes, $2 (c - 10) = \Phi^{-1} (0.95) = 1.64$, ce qui est équivalent à $c = 10.82$. Ainsi le test le plus puissant est

$$\delta = \begin{cases} 1 \text{ si } \overline{x} \geq 10.82 \\ 0 \text{ si } \overline{x} < 10.82 \end{cases}$$

2) La fonction puissance est définie par

$$\pi (\mu) = \mathbf{P} \left(\overline{X} \geq 10.82 \mid \mu \geq 10 \right) = \begin{cases} \alpha (\mu) & \text{pour } \mu = 10 \\ 1 - \beta (\mu) & \text{pour } \mu > 10 \end{cases}$$

On note que $\alpha (10) = \mathbf{P}_0 \left(\overline{X} \geq 10.82 \right) = \alpha = 0.05$. D'un autre coté, on a

$$\begin{aligned} 1 - \beta (\mu) &= \mathbf{P} \left(\overline{X} \geq 10.82 \mid \mu > 10 \right) = \mathbf{P}_1 \left(\overline{X} \geq 10.82 \right) \\ &= \mathbf{P}_1 \left(\frac{\overline{X} - \mu}{1/2} \geq \frac{10.82 - \mu}{1/2} \right) = \mathbf{P} \left(Z \geq 2 (10.82 - \mu) \right) \\ &= 1 - \Phi \left(2 (10.82 - \mu) \right). \end{aligned}$$

Ainsi la fonction puissance est

$$\pi (\mu) = \begin{cases} 0.05 & \text{pour } \mu = 10 \\ 1 - \Phi \left(2 (10.82 - \mu) \right) & \text{pour } \mu > 10. \end{cases}$$

Rappelons que la fonction de répartition de la loi normale Φ est une fonction croissante, par conséquent la fonction

$$\mu \rightarrow 1 - \Phi \left(2 (10.82 - \mu) \right),$$

est de même une fonction croissante. Le graphe de la fonction $\mu \rightarrow \pi (\mu)$ est le suivant:

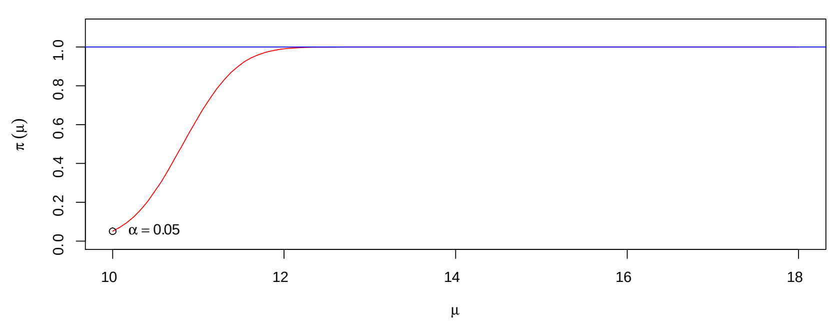

Fig. 1

3) Le rsique de deuxième espèce

$$\begin{aligned} \beta &= 1 - \pi (12) = \Phi \left(2 (10.82 - 12) \right) = \Phi (-2.36) \\ &= 1 - \Phi (2.36) = 1 - 0.99 = 0.01 = 1\%. \end{aligned}$$

C'est à dire le risque de garder H_0 alors que H_1 est vrais égale à 1% (on ne perd rien si on reste dans H_0).

Voici le programme en langage R de la figure Fig.1:

```
f<-function(x){1-pnorm(2*(10.82-x))}
x<-seq(10,18,length=100)
plot(x,f(x),type="l",col="red",ylim=c(0,1.1),xlab=expression(mu),ylab=expression(pi~(mu)))
abline(h=1,col="blue")
segments(10,0.05,10,1-pnorm(2*(10.82-10)),col="green")
points(10,0.05)
text(10.5,0.06,expression(alpha==0.05))
```