Chapitre 3

La fonction de transfert

4.1 Définition

Nous appellons fonction de transfert ou (transmittance) du système, le rapport des transformées de Laplace de la grandeur de sortie et la grandeur d'entrée du système, lorsque les conditions initiales sont nulles. On la note W, P, F.

$$W(S) = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \cdots + b_1 S^1 + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_1 S^1 + a_0} \tag{4.1}$$

n : degré du dénominateur est appelé l'ordre du système.
Pôles : racines du dénominateur.
Zéros : racines du numérateur.

Exemple 4.1.1 $\dfrac{dy}{dt} + 2y = \dfrac{dx}{dt} + x,\quad$ avec des conditions initiales nulles.
$(S+2)Y(S) = (S+1)X(S)$
$\Rightarrow W(S) = \dfrac{Y(S)}{X(S)} = \dfrac{S+1}{S+2}$
Les zéros : $S = -1$; les pôles : $S = -2$

Exemple 4.1.2 $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 5y = x$
$S^2Y(S) - 4SY(S) + 5Y(S) = X(S) \Rightarrow W(S) = \dfrac{Y(S)}{X(S)} = \dfrac{1}{S^2 - 4S + 5}$
Il n'y a plus de zéros ; deux pôles : $S_1 = 2 - j;\quad S_2 = 2 + j$

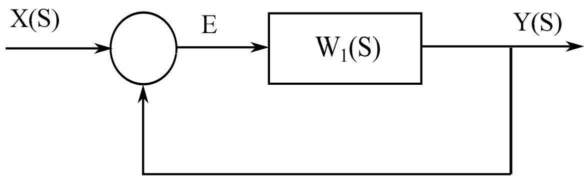
4.2 Propriétés de la fonction de transfert

1. Une fonction de transfert est définie pour un système linéaire et invariant.
2. La fonction de transfert est indépendante de la nature de l'entrée.
3. La fonction de transfert d'un système est la transformée de Laplace de sa réponse à l'impulsion.

4. On peut obtenir l'équation différentielle du système à partir de la fonction de transfert en remplaçant la variable S par l'opérateur différentiel D défini par : $\frac{D}{dt}$.
5. L'équation caractéristique du système s'obtient en égalant à zéro le dénominateur de la fonction de transfert du système, par conséquent, on peut évaluer la stabilité du système.
6. On peut définir à une constante près, la fonction de transfert du système par la donnée de ses pôles et de ses zéros, cette constante, généralement notée K, s'appelle le facteur de gain du système (x : pôle, o zéro).

4.3 Algèbre des schémas fonctionnels

Considérons un schéma fonctionnel avec retour unitaire :



La transmittance de la chaine ouverte est :
$W_1(S) = \frac{Y(S)}{E(S)}$.
La transmittance de la chaine fermée avec retour unitaire est :
$W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)}$; $W(S) = \frac{W_1(S) \cdot E(S)}{Y(S) + E(S)}$
On remplace $Y(S)$ par $W_1(S) \cdot E(S)$, on obtient

$$W(S) = \frac{W_1(S)}{1 + W_1(S)} \tag{4.2}$$

Si le retour est positif, on aura donc :

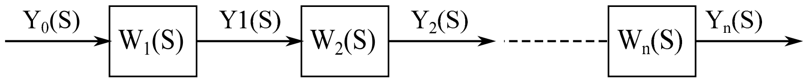
$$W(S) = \frac{W_1(S)}{1 - W_1(S)} \tag{4.3}$$

*) Considérons un schéma fonctionnel avec retour non unitaire. Dans ce cas $E(S) = X(S) - W_2(S) \cdot Y(S)$. L'expression de la transmittance du système s'écrit :

$$W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{W_1(S)}{1 \pm W_1(S) \cdot W_2(S)} \tag{4.4}$$

4.3.1 Établissement des schémas fonctionnels en utilisant les fonctions de transfert.

1) Montage en série

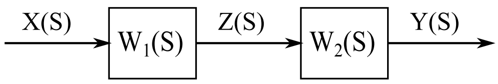


D'après le schéma, on a :

$Y_1(S) = W_1(S)Y_0(S), \quad Y_2(S) = W_2(S)Y_1(S), \quad \cdots \quad , Y_n(S) = W_n(S)Y_{n-1}(S)$
$W(S) = \dfrac{Y_n(S)}{Y_0(S)} = \dfrac{W_n(S)\,W_{n-1}(S)\,W_{n-2}(S)\cdots W_1(S)\,Y_0(S)}{Y_0(S)}$
On obtient :

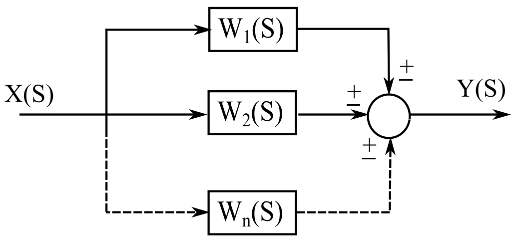
$$W(S) = \prod_{i=1}^{n} W_i(S) \tag{4.5}$$

Exemple 4.3.1 $W_1(S) = \dfrac{Z(S)}{X(S)}$; $W_2(S) = \dfrac{Y(S)}{Z(S)} \Rightarrow \dfrac{Y(S)}{X(S)} = \dfrac{W_2(S)\cdot W_1(S)\cdot X(S)}{X(S)}$
On a donc : $W(S) = W_1(S)\cdot W_2(S)$



1) Montage en parallèle

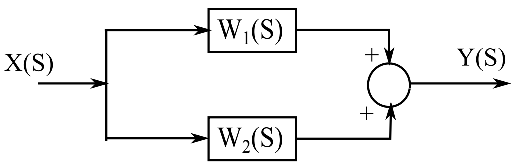
$$W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \sum_{i=1}^{n} \pm W_i(S) \tag{4.6}$$



Exemple 4.3.2 $Y(S) = Y_1 + Y_2(S)$

Avec $Y_1(S) = W_1(S)\cdot X(S)$ et $Y_2(S) = W_2(S)\cdot X(S)$

Alors, on peut écrire : $Y(S) = X(S)(W_1(S) + W_2(S))$
$\Rightarrow W(S) = \dfrac{Y(S)}{X(S)} = W_1(S) + W_2(S)$

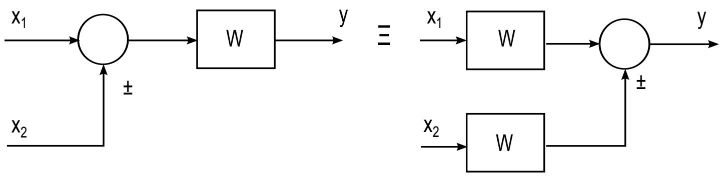


Remarques

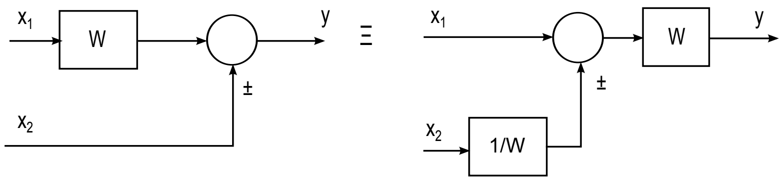
* Lors de l'établissement de schéma fonctionnel, il est parfois nécessaire de procéder au déplacement des comparateurs et des points de dérivation.

1)Déplacement d'un comparateur

En déplaçant un comparateur dans le même sens de direction du signal (en aval), il faut ajouter un élément dont la fonction de transfert est égale à celle de l'élément à travers lequel le comparateur a été déplacé.



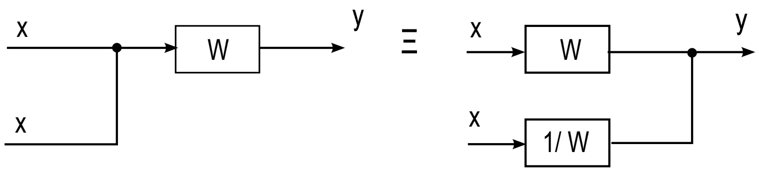
* Si le déplacement est en amont, il faut ajouter un élément comme le cas précédent dont la fonction de transfert égale à l'inverse.



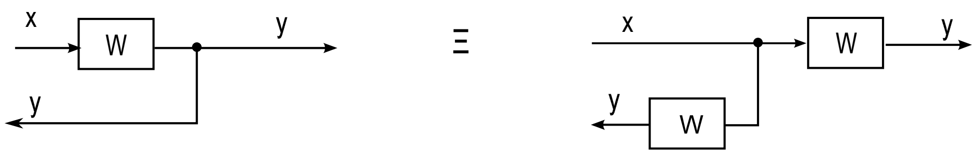
2)Déplacement d'un point de dérivation

En déplaçant un point de dérivation, il faut ajouter aussi un autre élément.

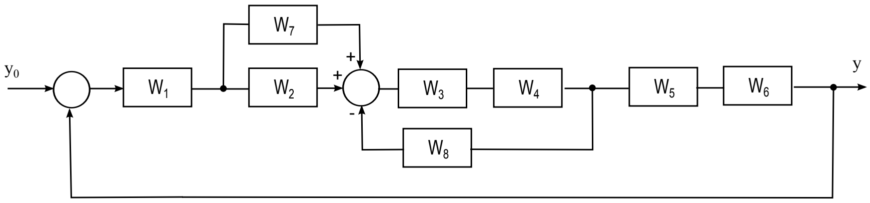
* Si le point de dérivation est déplacé dans le sens de direction du signal de la chaine d'action, on ajoute un élément dont la fonction de transfert est égale à l'inverse de la Fonction de transfert de l'élément à travers lequel le point de dérivation a été déplacé.



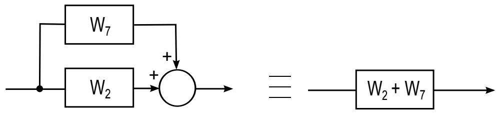
* Dans le cas contraire (en amont), la fonction de transfert est égale à la fonction de transfert de l'élément à travers lequel le point a été déplacé.



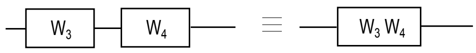
Exemple 4.3.3 En utilisant les règles précédentes de disposition des éléments. On peut reproduire un schéma fonctionnel à contour multiple en un schéma à contour simple.



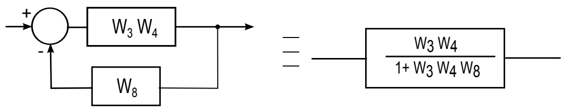
Etape 1



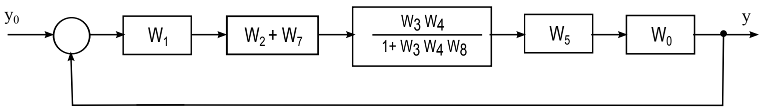
Etape 2



Etape 3



Etape 4



Avec

$$W_0 = W_1 W_5 W_6 (W_2 + W_7) \frac{W_3 W_4}{1 + W_3 W_4 W_8}$$

On aura finalement :

$$W_F = \frac{W_0}{1 + W_0}$$

4.4 Exercices

Exercice 4.4.1 Simplifier le schéma fonctionnel illustré sur la figure (4.1) sous forme canonique. - Ramener le système représenté pa le schéma fonctionnel, figure (4.2) à un système à retour unitaire.

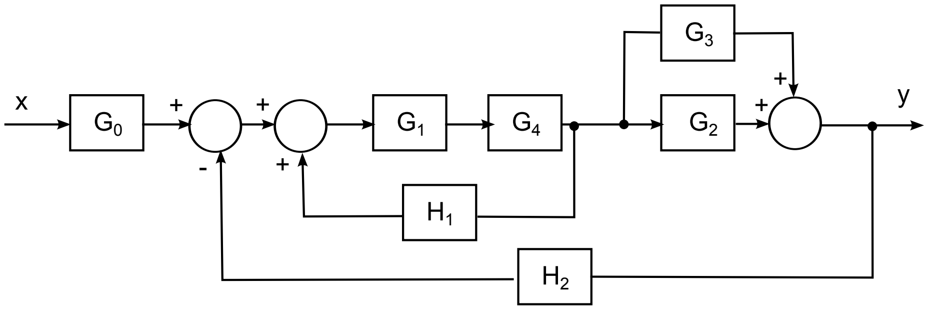


FIGURE 4.1 –

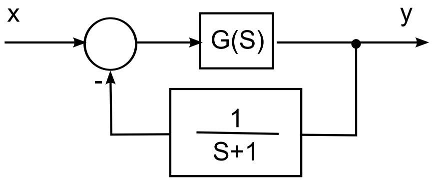


FIGURE 4.2 –

Exemple 4.4.2 Soit le système représenté par le schéma fonctionnel ; Figure (4.3)

1. Donner la fonction de transfert en $X(S)$ et $Y(S)$.
2. On donne ; $H_1(S) = \dfrac{1}{S+1}$; $H_2(S) = 50$; $H_3(S) = \dfrac{1}{1+20S}$; $H_4(S) = 1$.

- Calculer la valeur finale lorsque $x(t)$ est un Échelon unité.

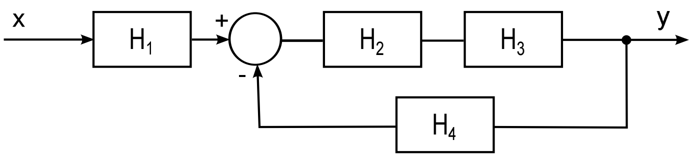


FIGURE 4.3 –

Exemple 4.4.3 Soit l'exemple d'un four électrique. L'entrée de commande est la puissance électrique $P(t)$, la sortie observée est la température du four $\theta(t)$.(θ représente la température au dessus de l'ambiante).

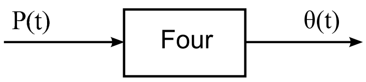


FIGURE 4.4 –

1. Écrivez le bilan énergétique de l'installation pendant un temps dt.
   On donne (C : pouvoir calorifique du four, l'énergie perdue par rayonnement vaut $K\theta dt$.
2. En utilisant la fonction de transfert, trouvez la réponse du système à l'échelon unité, à l'impulsion de Dirac.

Exemple 4.4.4 On applique une impulsion à l'entrée d'un système, et on observe pour signal de sortie la fonction e^{-2t}.

- Trouvez la fonction de transfert du système.