Résolution algébrique d'un programme linéaire

Un programme linéaire représenté sous forme canonique (système d'inéquations)ne peut être résolu d'une façon algébrique que s'il est standardisé (systéme d'équations). Pour cela le passage à la forme standard s'avère nécessaire.

1) Standardisation d'un programme linéaire primal.

Soit P un programme primal :

Max(Cx) ; AX ≤ b ; X ≥ 0.

Soit P' la forme standard de P :

Max(CX) ; AX = b ; X ≥ 0.

On doit ajouter une variable d'écart pour chaque contrainte de P de sorte que :

Max(C'X') ; AX' = b ; X'≥ 0. En supposant que A'=[A, I] ; X' = (X,Y) avec X ≥ 0 et Y ≥ 0 (variables d'écarts); C'= (C,0).

Ou Max(CX) ; AX = b ; X ≥ 0 tel que C ≤ d => ∃ e ≥ 0 / C + e = d

1) $Y_1 = b_1$
2) $Y_2 = b_2$
3) $Y_3 = b_3$ Y_i = variables d'écart.
4) …………
5) $Y_m = b_m$

C = (C,0).

Soit P primal

$x_1,x_2,\ldots\ldots.,x_n$ réelles avec $X_i \geq 0$

MAX(z)= $c_1x_1+c_2x_2+\ldots\ldots+c_nx_n$

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ a_{13}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.+a_{1n}x_n \quad \leq \quad \mathbf{b_1}$$

$$a_{21}x_1+2_{22}x_2+ a_{23}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.+a_{2n}x_n \quad \leq \quad \mathbf{b_2}$$

……………………………………………………………………………………………

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+ a_{i3}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.+a_{in}x_n \quad \leq \quad \mathbf{b_i}$$

……………………………………………………………………………………………

$$a_{m1}x_1+2_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.+a_{mn}x_n \quad \leq \quad \mathbf{b_m}$$

sa forme standard P' après ajout de variables d'écarts :

Variables principales $X = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ réelles avec $X_i \geq 0$ et variables d'écarts $Y = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m)$ réelles

$$\text{MAX}(z) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n + 0y_1 + 0y_2 + \ldots\ldots + 0y_m$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n + y_1 = \mathbf{b_1}$$

$$a_{21}x_1 + 2_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n + y_2 = \mathbf{b_2}$$

....

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}x_n + y_i = \mathbf{b_i}$$

....

$$a_{m1}x_1 + 2_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n + y_m = \mathbf{b_m}$$

$A' = [A, I]$; $A'X' = b$ et $X' = (x,y)$

Exemple : soit P /Max $(6x_1 + 8x_2 + 3x_3)$; $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, $X_3 \geq 0$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 6$

$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 10$

$x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 5$.

La forme standard de P est P':

Max $(6x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 0y_1 + 0y_2 + \ldots\ldots + 0y_m)$; $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, $X_3 \geq 0$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + y_1 = 6$

$2x_1 - x_2 + x_3 + y_2 = 10$

$x_1 + 3x_2 - 4x_3 + y_3 = 5$

les cout relatifs aux variables d'écart sont nuls.

2) Forme canonique par rapport à une base.

La forme standard est une forme nécessaire et non suffisante pour résoudre un programme linéaire, pour cela il est impératif d'ajouter une base au

système pour arriver à trouver une solution (unique) afin de satisfaire l'objectif (optimJm) d'un programme linéaire.
Une base d'un système linéaire $I = \{1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots,n\}$ / $|I| =$ card $(I) = m$ et Rang$(A) = m$, (A^I) régulière => donc I est une base.

Si $(A^I)^{-1}b \geq 0$ la solution est **réalisable.**

1) **Forme canonique par rapport à une base I.**

Soit P un programme linéaire primal est standardisé par rapport à une base I.

$\mathrm{Max}(Z) = CX$ (1)	et P' $\mathrm{Max}(Z) = C_i X_I + C_J X_J$
$AX = b$ (2),	$A^I X_I + A^J X_J = b$
$X \geq 0$	$X \geq 0$

Avec I = base et A inversible $(A^I)^{-1}$ et J/ $I \cap J = \varnothing$ et Y un vecteur de dimension m . soit P'' un programme linéaire obtenu par la substitution en utilisant (1) et (2) c'est-à-dire :

$$X_I \; C \; X_J = (A^I)^{-1} b$$

$$(C_I - Y A^I) X_I + (C_J - YA^J) X_J = \mathrm{Max}(Z) - YB$$

P'' est dite forme canonique par rapport à une base

<u>Théorème :</u>

Soit P est P'' sus-définies :

- P et p'' ont la même solution réalisable
- P et p'' ont la même fonction objective

Preuve

Soit Y tel que $C_I - A^I Y = 0 \Rightarrow C_I = A^I Y \Rightarrow Y = (A^I)^{-1} C_I$.

Y est unique car I est une base le système est de Crammer = > la solution est unique .

On remplace $Y = (A^I)^{-1} C_I$ est on obtient P''' :

$$X_I + (A^I)^{-1} A^J x_J = (A^I)^{-1} b \Rightarrow \quad X_I = (A^I)^{-1} b \geq 0$$

$$0 X_I + (C_J - (A^I)^{-1} A^J C_I) X_I = \mathrm{Max}(Z) - Yb$$

P''' est dite forme canonique par rapport à une base I.

La valeur de coût dit coût relatif est $C = (0, C_J - (A^I)^{-1} A^J C_I)$

Remarque :

Si la valeur du cout relatif est négative alors la solution est optimale.

2) Méthode de résolution d'un programme linéaire Primal sous une forme canonique par rapport à une base I dite <u>SIMPLEXE.</u>

<u>Algorithme du SIMPLEXE</u>

début

Pas1 : mettre le P.L. sous une forme canonique /Base

Pas 2 : trouver *s* tel que *s* est le rang de C_S le MAXimum *(*C_i*)*

Si le $C_S \leq 0$ (est négative) **alors solution optimale atteinte ARRET.**

Pas 3 : trouver *r* selon une analyse de A_i^s

Si (A_i^s **> 0) =** $\emptyset$ alors => la solution (la fonction objective est non bornée) **ARRET**.

Sinon *r* est le rang du Minimum($\frac{bi}{A_i^s}$ / $A_i^s > 0$).

Pas 4 : pivoter selon la formule de GAUSS

Aller à Pas 2.

Fin.

<u>Exemple d'application.</u>

$X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$;

Max $(4x_1 + 2x_2)$

$-x_1 + 3x_2 \leq 9$

$2x_1 + 3x_2 \leq 8$

$2x_1 - x_2 \leq 10$.

Pas 1

La forme standard par rapport à la base I

Variables principales $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$; variables d'écart $X_3 \geq 0$, $X_4 \geq 0$, $X_5 \geq 0$

Max $(4x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5)$

$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$

$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 8$

$2x_1 - x_2 + x_5 = 10$.

Pas 2

Itération 1

	X_1	X_2	.	.	.	b_1
X_3	-1	3	1	0	0	9
X_4	2	3	0	1	0	8
X_5	2	-1	0	0	1	10
C	4	2	0	0	0	Z-0
	S ^					

Itération 2

Pivoter en utilisant les formules de GAUSS :

$$a_{ij}' = a_{ij} - \frac{alj}{alk} a_{ik} \qquad (\, i= 1,n \, ; i \neq l)$$

$$d_i' = d_i - \frac{dl}{alk} a_{ik} \qquad (\, i= 1,n \, ; i \neq l)$$

$$a_{lj}' = \frac{alj}{alk} \qquad (\, i= 1,n \, ; j \neq k)$$

Après avoir pivoter avec la formule de GAUS, on obtient .

	X_1	X_2	.	.	X_5	b_1
X_3	0	5/2	1	0	0	9
X_4	0	4	0	1	0	8
X_1	1	-1/2	0	0	1	10
C	0	4	0	0	-2	Z-20
		S ^				

Itération 3

	X_1	X_2	.	X_4	X_5	b_1
X_3	0	0	1	-5/8	9/8	9
X_2	0	1	0	1/4	-1/4	2
X_1	1	0	0	1/8	3/8	6
C	0	0	0	-1	-1	Z-28

La solution optimale est atteinte vu que les valeurs de C_i sont toutes négatives ou nulles donc ARRET

La solution est : $X_1 = 6$, $X_2 = 2$ et Max(Z) = 28.