Chapitre 3

Problèmes aux limites

1 Introuction

Les problèmes de la physique peuvent être formulés via des équations différentielles, souvent ces équations sont dépendantes du temps. Dans ce cas, la solution est la plupart du temps contraintes par des conditions aux limites . On parle alors de "problème aux limites".

2 Problème aux limites unidimensionnel

Soit un réel $L > 0$ et 3 fonctions $f(x), p(x)$ et $q(x)$ de $[0, L]$ dans $\mathbb{R}$ continues. On cherche une fonction y de classe $C^2([0, L])$ qui satisfait

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \quad x \in [0, L] \\ \\ cl(0) = c_0 \quad cl(L) = c_L \qquad\qquad \textit{conditions aux limites} \end{cases}$$

Avec $cl(x)$ correspond à une de 2 options suivantes

$$cl(x) = \begin{cases} y(x) \quad \textit{condition de Dirichlet} \\ \\ \frac{dy}{dx}(x) \quad \textit{condition de Neumann} \end{cases}$$

Le problème est un problème aux limites linéaire unidimensionnel du seconde ordre.

2.1 Résolution par différences finies

La méthode de différence finies consiste à approcher la solution exacte $y(x)$ sur $[0, L]$ aux $m + 1$ points $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = L$.
On prend $x_k = kh$ *avec* $k = 0, \ldots m$ *et* $h = L/m$, h est le pas de discrétisation.

On a les approximations suivantes

Différence progressive

$$\frac{dy}{dx}(x) \simeq \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + o(h)$$

Différence rétrograde

$$\frac{dy}{dx}(x) \simeq \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + o(h)$$

Différence centrée

$$\frac{dy}{dx}(x) \simeq \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + o(h^2)$$

Dérivée seconde

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) \simeq \frac{y(x+h) + y(x-h) - 2y(x)}{h^2} + o(h^2)$$

$y(x_k)$ sera noté par y_k.

Problème 1

Considérons le problème de Poisson suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2}(x) = f(x) \qquad x \in [0, L] \\ \\ cl(0) = c_0 \quad cl(L) = c_L \end{cases} \tag{1}$$

Pour tout $x_k, k \neq 0, m$, l'équation (1) donne

$$f(x_k) = -\frac{d^2y}{dx^2}(x_k) \simeq \frac{-y_{k-1} - y_{k+1} + 2y_k}{h^2}$$

Cela permet d'obtenir $m-1$ équations linéaires reliant les différentes valeurs y_i qui forme un systèmes de $m-1$ équations avec $m+1$ inconnus.

$$\left\{ \begin{array}{llllllll} -y_0 & +2y_1 & -y_2 & & & & = h^2 f(x_1) \\ & -y_1 & +2y_2 & -y_3 & & & = h^2 f(x_2) \\ & & -y_2 & +2y_3 & -y_4 & & = h^2 f(x_2) \\ \\ & & & & & \ldots\ldots & \\ \\ & & & -y_{m-2} & +2y_{m-1} & -y_m & = h^2 f(x_{m-1}) \end{array} \right. \tag{2}$$

Les deux autres équations sont obtenus en utilisant les conditions aux limites.

1. Pour les conditions $y_0 = c_0$ et $y_m = c_L$ (de Dirichlet).

Le système obtenu est

$$\begin{cases} +2y_1 \quad -y_2 & = h^2 f(x_1) + y_0 \\ -y_1 \quad +2y_2 \quad -y_3 & = h^2 f(x_2) \\ \qquad -y_2 \quad +2y_3 \quad -y_4 & = h^2 f(x_2) \\ \\ \qquad \ldots\ldots & \\ \\ \qquad\qquad -y_{m-2} \quad +2y_{m-1} & = h^2 f(x_{m-1}) - y_m \end{cases}$$

que l'on peut assembler sous forme matricielle $A_h Y = F_h$, où

$$A_h = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0.. & 0 & ..0 & -1 & 2 & -1 \\ 0.. & 0 & .. & . & -1 & 2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_{m-1} \end{bmatrix},$$

$$F_h = h^2 \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_m \end{bmatrix}.$$

2. Pour les conditions $\frac{dy}{dx}(0) = c_0$ et $y_m = c_L$ (de Dirichlet).

On utilise l'approximation

$$c(0) \simeq \frac{y_1 - y_0}{h}$$

pour l'ajouter au système (2), ce qui donnera

$$\begin{cases} -y_0 \quad +y_1 & = c_0 h \\ -y_0 + \quad 2y_1 \quad -y_2 & = h^2 f(x_1) \\ \qquad -y_1 \quad +2y_2 \quad -y_3 & = h^2 f(x_2) \\ \qquad -y_2 \quad +2y_3 \quad -y_4 & = h^2 f(x_2) \\ \\ \qquad\qquad \ldots\ldots & \\ \\ \qquad\qquad -y_{m-2} \quad +2y_{m-1} & = h^2 f(x_{m-1}) - y_m \end{cases}$$

L'écriture matricielle dans ce cas est $A'_h Y' = F'_h$, où

$$A'_h = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0... & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0.. & 0 & ..0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}, Y' = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_{m-1} \end{bmatrix},$$

$$F'_h = h^2 \begin{bmatrix} 0 \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_0 h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Nous cherchons alors à résoudre un système de $m-1$ équations linéaires. Il existe plusieurs méthodes itératives pour effectuer le calcul.

Problème 2

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2}(x) + c(x)y(x) = f(x) \quad x \in [0,1] \quad , \\ \\ y(0) = c_0 \quad y(1) = c_1 \end{cases} \tag{3}$$

où f et c sont deux fonctions données sur $[0,1]$ avec $f \in L^2([0,1])$, $c \in L^\infty([0,1])$ et $c \geq 0$.

Pour tout $x_k, k \neq 0, m$, l'équation (3) peut s'écrire

$$\frac{-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1}}{h^2} + c(x_k)y_k \simeq f(x_k).$$

Ce qui donne

$$-y_{k-1} + (2 + h^2 c(x_k))y_k - y_{k+1} \simeq h^2 f(x_k)$$

et

$$\begin{cases} (2 + h^2 c(x_1))y_1 - y_2 = h^2 f(x_1) + y_0 \\ -y_1 + (2 + h^2 c(x_2))y_2 - y_3 = h^2 f(x_2) \\ -y_2 + (2 + h^2 c(x_3))y_3 - y_4 = h^2 f(x_3) \\ \\ \\ ...... \\ \\ -y_{m-2} + (2 + h^2 c(x_{m-1}))y_{m-1} = h^2 f(x_{m-1}) + y_m \end{cases}$$

Matriciellement, le problème s'écrit $A_h Y = F_h$, où

$$A_h = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0.. & 0 & ..0 & -1 & 2 & -1 \\ 0.. & 0 & .. & . & -1 & 2 \end{bmatrix} + h^2 \begin{bmatrix} c(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0... \\ 0 & c(x_2) & 0 & 0 & 0... \\ 0 & 0 & c(x_3) & 0 & 0... \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 0.. & 0 & ..0 & & c(x_{m-1}) \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m-2} \\ y_{m-1} \end{bmatrix}, \; F_h = h^2 \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{m-2}) \\ f(x_{m-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}.$$

2.2 Résolution par la méthode de Tir

On considère une EDO du deuxième ordre avec les conditions aux limites suivantes :

$$y(a) = y_a \quad , \quad y(b) = y_b$$

Le principe de la méthode de tir est comme suit

1. On pose $y(a) = y_a$ et $y'(a) = C_1$, où C_1 est une valeur d'essai. On résout l'équation différentielle par la méthode habituelle appliquées aux problèmes aux valeurs initiales.
3. On obtient une solution $y(x\,|_{C_1})$. Si $y(b\,|_{C_1}) = y_b$, on s'arrête, sinon on passe à l'étape suivante.
4. On choisit une deuxième valeur d'essai C_2 en posant $y(a) = y_a$ et $y'(a) = C_2$ et on résout l'équation différentielle.
5. On obtient une solution $y(x\,|_{C_2})$ Si $y(b\,|_{C_2}) = y_b$, on s'arrête, sinon on passe à l'étape suivante.
6. On choisit comme troisième et dernière valeur d'essai C_3 comme suit :

$$C_3 = C_1 + (y(b) - y(b\,|_{C_1})\frac{C_2 - C_1}{y(b\,|_{C_2}) - y(b\,|_{C_1})}$$

On trouve $y(b\,|_{C_3}) = y_b$.

Remarque

- Problèmes linéaires du second ordre convergent en 2 tirs.
- Pour les problèmes d'ordre plus élevé, la méthode fonctionne aussi.
- La méthode est peu généralisables en 2D et 3D et peu utilisée en pratique.

Exemple

On considère le problème linéaire

$$y''(x) = x + (1 - 0.2\ x)y(x) \ \ avec\ y(1) = 2\ et\ y(3) = -1$$

1- On essaie un premier tir en remplaçant par les conditions initiales

$$y(1) = 2 \ \ et \ \ y'(1) = -1.5 = C_1$$

Nous trouvons $y(3\ |_{C_1}) = 4.7859$

2- On essaie un deuxième tir en remplaçant par les conditions initiales :

$$y(1) = 2 \ \ et \ \ y'(1) = -3 = C_2$$

Nous trouvons $y(3\ |_{C_2}) = 0.4354$
3- On essaie un troisième tir

$$y(1) = 2 \ \ et \ \ y'(1) = C_3$$

Où

$$C_3 = -1.5 + (-1 - 4.7859)\frac{-3 + 1.5}{0.4354 - 4.7859}$$
$$C_3 = -3.4949$$

Remarque

- Problèmes linéaires du second ordre convergent en 2 tirs.
- Pour les problèmes d'ordre plus élevé, la méthode fonctionne aussi.
- La méthode est peu généralisables en 2D et 3D et peu utilisée en pratique.

3 Problème non linéaire

Considérons le problème non linéaire suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2}(x) + xy^3(x) = f(x) \quad x \in [0, L] \quad , \\ \\ y(0) = c_0 \quad y(L) = c_L \end{cases}$$

On applique la formule des différences finis centrée, il vient

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(-y_{i-1} + 2y_i + y_{i+1}) - x_i y_i^3 = f(x_i) & i \in 1, \ldots, n \\ \\ y(0) = c_0 \quad y(L) = c_L \end{cases}$$

Nous cherchons alors à résoudre un système de n équations non linéaires, il existe plusieurs méthodes itératives pour effectuer ce calcul (Méthode de Newton Raphson par exemple)