3.6. Conduction sans source de chaleur interne en régime permanent à une dimension.

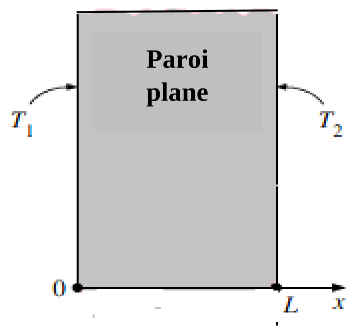
3.6.1. Solutions de l'équation de la chaleur, en coordonnées cartésiennes

- **Mur simple avec conditions de Dirichlet sur les deux faces**

On appelle un " mur simple" un milieu conducteur homogène limité par deux plans //,chacun des deux étant à une température, la même pour l'ensemble du plan.

La plupart des problèmes de chauffage des bâtiments peuvent se réduire à l'étude du mur plan.

Considérons un mur homogène d'air S, d'épaisseur L, traversée par un flux Φ causé par les Températures différentes $T_1 > T_2$ des deux faces aux abscisses respectives x1et x2 et λ=cste



Le système fondamental donnant la température s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$T = T_1$ en x=0

$T = T_2$ en x=L

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dT}{dx} = cste = A \Rightarrow T(x) = Ax + B$$

La solution T(x) =A(x)+B fait intervenir deux constante qui sont déterminées à l'aide des conditions aux limites :

$$A = \frac{T_2 - T_1}{L} \qquad et \qquad B = T_1$$

D'où

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

Le flux de chaleur est constant en régime permanent et loi élémentaire de Fourier permet d'exprimer

$$\Phi = -\lambda\, S \frac{dT}{dx} \qquad mais \quad \frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

$$\Phi = -\lambda\, S \frac{T_2 - T_1}{L}$$

3.6.2. Solutions de l'équation de la chaleur, en coordonnées cylindrique

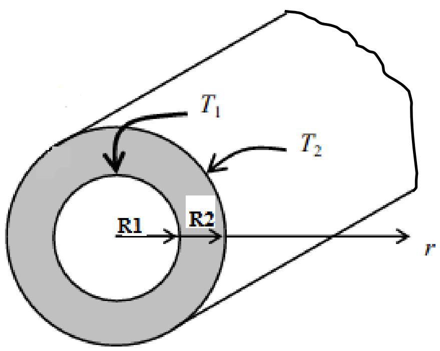
On considère un tube creux de longueur L et d'épaisseur δ, la surface interne est maintenue à une température T_1 et la surface externe du tube étant elle est maintenue à la température T_2, tout le long de tube $T_1 > T_2$, R_1et R_2 sont les rayons interne et externe respectivement.
L'équation de la conduction on coordonnées cylindriques (r, θ, z) s'écrit :

$$\lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \dot{Q} = \rho C p \frac{\partial T}{\partial t}$$

- **Cylindre creux avec conditions de Dirichlet**

Pour le cas unidimensionnel sans source interne en régime permanent l'équation précédente se réduit à :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$



Avec les conditions aux limites

$T(R_1) = T_1$ pour $r = R_1$

$T(R_2) = T_2$ pour $r = R_2$

Multipliant l'équation différentielle précédente par r

$$r\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = 0$$

On remarque que le premier membre de l'équation est la dérivée de $r\frac{dT}{dr}$ donc l'intégration première de l'équation de la chaleur nous donne :

$$r\frac{dT}{dr} = A \qquad \Rightarrow \quad \frac{dT}{A} = \frac{dr}{r}$$

En intégrant cette équation on trouve : $T = A \ln r + B$

Les deux constantes sont déterminées à partir des conditions aux limites.

Pour r =R_1 $\Rightarrow$ $T_1 = A\ln R_1 + B$

Pour r =R_2 $\Rightarrow$ $T_2 = A\ln R_2 + B$

La résolution du système des deux équations nous donne :

$$A = \frac{T_1 - T_2}{ln\frac{R_1}{R_2}} \qquad et \qquad B = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{ln\frac{R_1}{R_2}} \times \ln R_1$$

La température sera décrite par l'expression

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{ln\frac{R_1}{R_2}}\ln(r) + T_1 - \frac{T_1 - T_2}{ln\frac{R_1}{R_2}} \times \ln R_1$$

Qui peut s'écrire :

$$T(r) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{ln\frac{R_1}{R_2}}\ln\frac{r}{R_1}$$

On peut déduire l'expression de la densité de flux thermique

$$\varphi = -\lambda\frac{dT}{dr} = -\lambda\frac{T_1 - T_2}{ln\frac{R_1}{R_2}}\frac{1}{r}$$

Ainsi que celle du flux thermique

$$\Phi = \varphi S = -\lambda\frac{T_1 - T_2}{ln\frac{R_1}{R_2}}\ \frac{1}{r}\ 2\pi rl = 2\lambda\pi l\ \frac{T_1 - T_2}{ln\frac{R_2}{R_1}}$$

3.6.3. Solutions de l'équation de la chaleur, en coordonnées sphériques :

En coordonnées sphériques(r, φ, ψ), l'équation générale de la conduction s'écrit :

$$\lambda\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\sin\psi\frac{\partial T}{\partial\psi}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{sin^2\psi}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}\right] + \dot{Q} = \rho Cp\frac{\partial T}{\partial t}$$

Dans le cas stationnaire$\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$, unidimensionnel ($\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\psi} = 0$) et sans source interne $(\dot{Q} = 0)$ l'équation se réduit à :

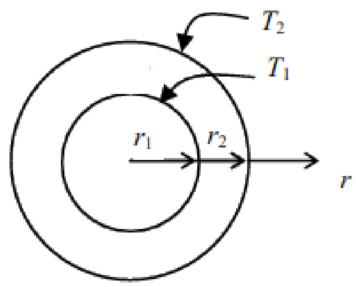
$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2} = 0$$

Qui peut s'écrire :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{d}{dr}(rT)\right]=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[T+r\frac{dT}{dr}\right]=\frac{1}{r}\left[\frac{dT}{dr}+\frac{dT}{dr}+r\frac{d^2T}{dr^2}\right]=\frac{1}{r}\left[2\frac{dT}{dr}+r\frac{d^2T}{dr^2}\right]$$
$$=\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dT}{dr}=0$$

- **Sphère creuse avec conditions de Dirichlet**

Pour une sphère creuse de rayon interne r_1 et externe r_2, les parois de la sphère sont maintenues aux températures T_1 et T_2 avec $T_1 > T_2$ le système d'équation s'écrit :



$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dT}{dr}=0$$

Pour $r = r_1$ $T(r_1) = T_1$

Pour $r = r_2$ $T(r_2) = T_2$

En multipliant l'équation différentielle par r^2

$$r^2\frac{d^2T}{dr^2}+2r\frac{dT}{dr}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=0 \quad \Rightarrow r^2\frac{dT}{dr}=A \quad \Rightarrow \frac{dT}{dr}=\frac{A}{r^2}$$

L'intégration de la dernière équation donne :

$$T(r)=\frac{-A}{r}+B$$

Où A et B sont des constantes d'intégration elles sont déterminées à partir des conditions aux limites.

On a

Pour $r = r_1$ $\quad T(r_1)=T_1=\frac{-A}{r_1}+B$

Pour $r = r_2$ $\quad T(r_2)=T_2=\frac{-A}{r_2}+B$

Des deux équations précédentes :

$$A = -\frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \qquad et \qquad B = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r_1}$$

L'équation de la variation de température prend la forme suivante :

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \frac{1}{r} + T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r_1} = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

La densité de flux :

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dr} = -\lambda \frac{A}{r^2} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r^2}$$

Le flux :

$$\Phi = \varphi S = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r^2} 4\pi r^2 = 4\pi\lambda \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$