1.2.4 Probabilités conditionnelles

Définition 1.7 *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *un espace de probabilité et* A, B *deux événement de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *tels que* $P(A) > 0$.

La probabilité conditionnelle que l'événement B *Soit réalisé sachant que* A *est réalisé notée par* $P(B|A)$ *est donné par*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Si $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *est un éspase uniforme, alors :*

$$P(B|A) = \frac{Card\ P(A \cap B)}{Card\ P(A)}.$$

Exemple 1.11 *On lance deux dés bien équilibrés. Sachant que la somme deux faces obtenues est* 6*, quelle est la probabilité qu'un dé a donné la face* 2.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \\ &= \{(1,1), (1,2), \ldots (6,6)\}. \\ Card\ (\Omega) &= 36. \end{aligned}$$

A : ≪ *La somme des deux faces est* 6≫ .
B : ≪ *Un dé donné la face* 2≫ .
$A = \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\}$. $Card\ (A) = 5$.
$B = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\}$. $Card\ (B) = 11$.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{Card\ (A \cap B)}{Card\ (A)} = ?$$

$A \cap B = \{(2,4), (4,2)\}$, $Card\ (A \cap B) = 2$.
$P(B|A) = \frac{2}{5}$.

Résultats :

$$\begin{cases} P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = P(B|A).P(A) \\ P(A \cap B) = P(A|B).P(B) \end{cases}$$

On peut généraliser le premier résultat à n événements quelconques :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots A_n) = P(A_1).P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ \times \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots A_{n-1}). \end{aligned}$$

Exemple 1.12 *Une urne contient* 12 *pièces dont* 4 *sont défectueuses. On tire* 3 *pièces l'une après l'autre sans remise.*

Quelle est la probabilité que les trois pièces tirées ne soient pas défectueuses.
A_1 *: La* $1^{ière}$ *pièce tirée n'est pas défectueuse.*
A_2 *: La* $2^{ième}$ *pièce tirée n'est pas défectueuse.*
A_3 *: La* $3^{ième}$ *pièce tirée n'est pas défectueuse.*

La probabilité que la $1^{ière}$ *pièce et la* $2^{ième}$ *pièce et la* $3^{ième}$ *pièce ne soient pas défectueuses est de calculer*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1).P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10}. \end{aligned}$$

1.2.5 Evènements indépendants :

Définition 1.8 *On dit que A et B sont deux événements indépendants ssi :*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

On peut également utiliser la probabilité conditionnelle :

$$P(B|A) = P(B) \text{ et } P(A|B) = P(A).$$

Car :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Exemple 1.13 *On lance une pièce de monnaie equilibrée deux fois successives. On a :*

$$\Omega = \{(F,F),(F,P),(P,F),(P,P)\}, \text{ Card } (\Omega)$$

A : ≪ Obtenir P au premier lancé≫ .
B : ≪ Obtenir P au deuxième lancé≫ .
Quelle est la probabilité d'obtenir P au premier et au deuxième lancé ?
$A = \{(P,P),(P,F)\}$, $B = \{(P,P),(F,P)\}$,
$A \cap B = \{(P,P)\}$.
$P(A \cap B) = \frac{Card\ (A \cap B)}{Card\ (\Omega)} = \frac{1}{4}$.
$P(A) = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
$P(B) = \frac{Card\ (B)}{Card\ (\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A) \times P(B) \Rightarrow A, B$ *sont indépendants.*

Remarque 1.3 *Il faut distinguer entre les événements indépendants et les événements incompatibles.*
On peut avoir des événements indépendants et non incompatibles cas contraire est vrai.
A et B sont incompatibles $\Leftrightarrow A \cap B = \phi$.
A et B sont incompatibles $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

1.2.6 Principe des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité. On dit que les événements $\{A_1, A_2 \dots A_n\}$ forment un système complet pour Ω :
- $\forall i = 1, \dots n,\ A_i \neq \phi \Leftrightarrow P(A_i) > 0$.
- $A_i \cap A_j = \phi$, $\forall i, j = 1, \dots n$, et $i \neq j$.
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Soit A un événement quelconque de $\mathcal{P}(\Omega)$,on peut écrire :
$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i)$

$\Rightarrow P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i)$.

Puisque $\{A_i\}$ sont disjoints deux à deux, alors $\{A \cap A_i\}$ sont aussi disjoints deux à deux, alors $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|A_i) \times P(A_i)$.

Exemple 1.14 *Soit U_1, U_2, U_3 trois urnes telles que :*
U_1 : contient 10 lampes dont 4 sont défectueuses.
U_2 : contient 6 lampes dont 1 est défectueuse.
U_3 : contient 8 lampes dont 3 sont défectueuses.
On choisit au hasard une urne, puis tire de cette dernière une lampe.
Quelle est la probabilité que cette lampe soit défectueuse ?
1) Le choix de l'urne.
2) Le tirage d'une lampe.
U_1 : $\ll$ On choisit l'urne 1$\gg$
U_2 : $\ll$ On choisit l'urne 2$\gg$
U_3 : $\ll$ On choisit l'urne 3$\gg$
$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$.
$\{U_1, U_2, U_3\}$ forment un système complet.
D : $\ll$ On tire une lampe défectueuse$\gg$

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|U_1) \times P(U_1) + P(D|U_2) \times P(U_2) + P(D|U_3) \times P(U_3) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{10} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\right) = 0.315. \end{aligned}$$

1.2.7 Formule de Bayes :

Soit $\{A_i\}_{i=1}^n$ un système complet pour Ω et A un événement quelconque de Ω.

On suppose que A est réalisé et on veut maintenant calculer la probabilité que A réalise à travers A_i pour i fixé.

On a :

$$\begin{aligned} P(A_i|A) &= \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|A_i) \times P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|A_i) \times P(A_i)}. \end{aligned}$$

Le meme exemple précédent, calculer la probabilité que la lamp défectueuse soit tirée de l'urne 3 ?

$P(U_3|D) = ?$

$$P(U_3|D) = \frac{P(U_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D \cap U_3)}{P(D)} = \frac{P(D|U_3) \times P(U_3)}{P(D)} = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{3}}{0.315} = 0.397.$$

1.3 Les variables aléatoire

1.3.1 Introduction

Souvent, il est nécessaire d'associer à chaque résultat d'une experience aléatoire précise une valeur réelle. Donc, la variable aléatoire est l'expression mathématique pour nécessité.

Par exemple, si on a une expérience de lancer une pièce de monnaie 3 fois successives, donc :
L'ensemble fondamental
$\Omega = \{(P,P,P), (P,P,F), (P,F,P), (F,P,P), (F,F,P), (F,P,F), (P,F,F), (F,F,F)\}$.
Supposons qu'on s'intéresse au nombre de faces obtenu à travers 3 lancés.