Exemple 1.14 *Soit U_1, U_2, U_3 trois urnes telles que :*

U_1 : contient 10 lampes dont 4 sont défectueuses.

U_2 : contient 6 lampes dont 1 est défectueuse.

U_3 : contient 8 lampes dont 3 sont défectueuses.

On choisit au hasard une urne, puis tire de cette dernière une lampe.

Quelle est la probabilité que cette lampe soit défectueuse ?

1) Le choix de l'urne.

2) Le tirage d'une lampe.

U_1 : $\ll$ On choisit l'urne 1$\gg$

U_2 : $\ll$ On choisit l'urne 2$\gg$

U_3 : $\ll$ On choisit l'urne 3$\gg$

$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$.

$\{U_1, U_2, U_3\}$ forment un système complet.

D : $\ll$ On tire une lampe défectueuse$\gg$

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|U_1) \times P(U_1) + P(D|U_2) \times P(U_2) + P(D|U_3) \times P(U_3) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{10} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\right) = 0.315. \end{aligned}$$

1.2.7 Formule de Bayes :

Soit $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ un système complet pour Ω et A un événement quelconque de Ω.

On suppose que A est réalisé et on veut maintenant calculer la probabilité que A réalise à travers A_i pour i fixé.

On a :

$$\begin{aligned} P(A_i|A) &= \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|A_i) \times P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|A_i) \times P(A_i)}. \end{aligned}$$

Le meme exemple précédent, calculer la probabilité que la lamp défectueuse soit tirée de l'urne 3 ?

$P(U_3|D) = ?$

$P(U_3|D) = \dfrac{P(U_3 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(D \cap U_3)}{P(D)} = \dfrac{P(D|U_3) \times P(U_3)}{P(D)} = \dfrac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{3}}{0.315} = 0.397.$

1.3 Les variables aléatoire

1.3.1 Introduction

Souvent, il est nécessaire d'associer à chaque résultat d'une experience aléatoire précise une valeur réelle. Donc, la variable aléatoire est l'expression mathématique pour nécessité.

Par exemple, si on a une expérience de lancer une pièce de monnaie 3 fois successives, donc :

L'ensemble fondamental

$\Omega = \{(P,P,P), (P,P,F), (P,F,P), (F,P,P), (F,F,P), (F,P,F), (P,F,F), (F,F,F)\}$.

Supposons qu'on s'intéresse au nombre de faces obtenu à travers 3 lancés.

$(P,P,P) \to 0$ i.e $X(P,P,P) = 0$
$(P,P,F),(P,F,P),(F,P,P) \to 1$ i.e $X(P,P,F) = X(P,F,P) = X(F,P,P) = 1$
$(F,F,P),(F,P,F),(P,F,F) \to 2$ i.e $X(F,F,P) = X(F,P,F) = X(P,F,F) = 2$
$(F,F,F) \to 3$ i.e $X(F,F,F) = 3$

1.3.2 Définition mathématique de la variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité. On appelle X une variable aléatoire toute application de Ω vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} X &: \Omega \to \mathbb{R} \\ w &\to X(w) \end{aligned}$$

w événement élémentaire.
L'ensemble des valeurs possibles prises par X est :
$X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ (L'exemple ci-dessus).

Exemple 1.15 *On lance un dé deux fois successives. Soit X une v.a qui représent la somme des deux chiffres obtenus.*
Les valeurs possibles de X sont :
$X : \Omega = \{0,1,2,\ldots,6\} \times \{0,1,2,\ldots,6\} \to \mathbb{R}$.
$X(\Omega) = \{2,3,\ldots,12\}$.

$$\begin{aligned} X = 2 &\quad \to \{(1,1)\}. \\ X = 3 &\quad \to \{(1,2),(2,1)\}. \\ &\vdots \\ X = 12 &\quad \to \{(1,1)\}. \end{aligned}$$

1.3.3 Types de variable aléatoire :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité, le type d'une variable aléatoire dépend en grand partie de la valeur de l'ensemble $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$.

a) **Variable aléatoire discrète :**

Si $X(\Omega)$ est un ensemble formé de valeurs isdées (distincts) alors X est une variable aléatoire discrète.

b) **Variable aléatoire continue :**

Si $X(\Omega)$ est un ensemble qui prend toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$, alors X est une variable aléatoire continue.

1.3.4 Loi de probabilité :

Si X est une variable discrète qui prend les valeurs $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec les probabilités :
$\{P(X = x_1), P(X = x_2) \ldots, P(X = x_n)\}$ respectivement.
On appelle loi de probabilité la fonction tabulaire suivante :

$$P_X(x_i) = P\left(X^{-1}(x_i)\right) = P(\{w \in \Omega : X(w) = x_i\}).$$

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$\ldots$	$P(X = x_n)$

- $\forall x_i \in X(\Omega) : P(X = x_i) \geq 0$.
- $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$.

Exemple 1.16

$$\begin{array}{l} P(X=0)=P(\{(P,P,P)\})=\frac{1}{8}. \\ P(X=1)=P(\{(P,P,F),(F,P,P),(P,F,P)\})=\frac{3}{8}. \\ P(X=2)=P(\{(F,F,P),(F,P,F),(P,F,F)\})=\frac{3}{8}. \\ P(X=3)=P(\{(F,F,F)\})=\frac{1}{8}. \end{array}$$

Alors, on peut écrire la loi de probabilité sous la forme :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

1.3.5 La fonction de répartition :

Soit X une variable aléatoire défine sur Ω, on a appelle fonction de répartition associée à X l'application escalier F définie comme suit :

$$\begin{array}{ll} F:\mathbb{R}\to[0,1] & \\ x\to F_X(x) & =P\{X\leq x\} \\ & =P\{(]-\infty,x])\} \\ & =\sum P(X=x_k) \\ & x_k\in X(\Omega)\,,\ x_k\leq x \end{array}$$

1.3.6 Les propriétés de cette fonction :

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0,\qquad$ Si $a\leq b\Rightarrow F_X(a)\leq F_X(b)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1\quad P(a<X\leq b)=F_X(b)-F_X(a)$

$0\leq F(x)\leq 1,$

- F est continue sur $\mathbb{R}\,|X(\Omega)$ et continue à droite à chaque point appartenant à $X(\Omega)$.

Exemple 1.17 $F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x\in\,]-\infty,0[\\ \frac{1}{8} & si\ x\in[0,1[\\ \frac{1}{2} & si\ x\in[1,2[\\ \frac{7}{8} & si\ x\in[2,3[\\ 1 & si\ x\in[3,+\infty[\end{cases}$

1.3.7 Densité de probabilité :

Définition : Si la fonction de répartition F_X est dérivable, sa dérivée notée par

$$f_X(x)=\frac{\partial F_X(x)}{\partial x},$$

s'appelle densité de probabilité de la variable aléatoire relle X et on dit aussi que X est absolument continue.

Proposition : Si X une variable aléatoire réelle de densité $f_X(x)$ alors :

1) $F_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt.$

2) $f_X(x)$ est positive.

3) $P(a<x\leq b)=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx.$

4) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1.$

5) $P(X=x)=0.$

1.3.8 Espérence

L'espérence mathématique pour une variable aléatoire discrète est défini par le nombre :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i), \quad (X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}).$$

1.3.9 La variance

La variance pour une variable aléatoire discrète est défini par :

$$V(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}^2(X).$$

où $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i)$.

1.3.10 L'écart type

L'écart type est défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple 1.18 $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) - \mathbb{E}^2(X) \\ &= 0^2\left(\tfrac{1}{8}\right) + 1^2\left(\tfrac{3}{8}\right) + 2^2\left(\tfrac{3}{8}\right) + 3^2\left(\tfrac{1}{8}\right) - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Proposition 1.1 $\left.\begin{array}{c} \mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b \\ V(aX + b) = a^2 V(X). \end{array}\right\} \forall a, b \in \mathbb{R}.$