كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك　　　　　　　　　　03 جانفي 2020

السنة الأولى　　　　　　　　　　رياضيات 1

السلسلة رقم 02

التمرين 01 : عين مجموعة تعريف الدوال التالية ثم أدرس شافعيتها.

1° $\sqrt{1-|x|}$　　　　2° x^2-x

3° $|x-1|+|x+1|$　　　　4° $x^3-\sqrt{x}$

5° $e^x-\dfrac{1}{e^x}$　　　　6° $\ln\dfrac{x+1}{x-1}$

7° $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$　　　　8° $\dfrac{4|x|}{x}$

التمرين 02 : أحسب النهايات التالية :

1° $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$　　　　2° $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5-1}{x^2-1}$

3° $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+1}$　　　　4° $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt[3]{1-x^3}$

5° $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$　　　　6° $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$

التمرين 03 : أدرس الاستمرارية عند 0 للدوال التالية :

1° $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{si } x\leq 0\\ x\ln x & \text{si } x>0\end{cases}$

2° $g(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x\leq 0\\ 2x+1 & \text{si } x>0\end{cases}$

التمرين 04 : أدرس استمرارية الدوال التالية :

1° $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$

2° $g(x)=\ln(1+x^2)$

3° $h(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$

التمرين 05 : أثبت ان المعادلات التالية تقبل على أقل جذر حقيقي :

1° $x^5 - 4x^2 + 1 = 0$

2° $x^8 + 5x^3 + 2 = 0$

3° $x^2 - 3\cos x + 2 = 0$

التمرين 06 : أدرس قابلية اشتقاق الدوال التالية عند 0 :

1° $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$

2° $g(x) = (x + 1)|\ln(x + 1)|$

3° $h(x) = x\sqrt{|x|}$

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير

قسم الجذع المشترك

السنة الأولى
2021 / 2020

المقياس : رياضيات 01

الحل النموذجي للسلسلة رقم 02

التمرين الأول:

مجموعة تعريف ودراسة شفعية دالة:

1. $f(x)=\sqrt{1-|x|}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid 1-|x|\geq 0\}$

لدينا:

$1-|x|\geq 0 \Rightarrow |x|\leq 1$

$\Rightarrow -1\leq x\leq 1$

$\Rightarrow x\in[-1,1]$

$D_f=[-1,1]$

• $\forall x\in D_f,\ -x\in D_f$

$f(-x)=\sqrt{1-|-x|}$, $\boxed{|-x|=|x|}$

$=\sqrt{1-|x|}$

$=f(x)$

ومنه f دالة زوجية.

2. $f(x)=x^2-x$

$D_f=\mathbb{R}$

• $\forall x\in\mathbb{R},\ -x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=(-x)^2-(-x)$

$=x^2+x \neq f(x)$

$\neq -f(x)$

ومنه f دالة لا زوجية لا فردية

3. $f(x)=|x-1|+|x+1|$

$D_f=\mathbb{R}$

• $\forall x\in\mathbb{R},\ -x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=|-x-1|+|-x+1|$

$=|-(x+1)|+|-(x-1)|$

شفعية دالة:

$\forall x\in D_f,\ -x\in D_f$

$$f(-x)=\begin{cases} f(x) & \text{زوجية} \\ -f(x) & \text{فردية} \end{cases}$$

$= |x+1| + |x-1|$

$= f(x)$

ومنه f دالة زوجية.

4. $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}_+$

$= [0, +\infty[$

• $\forall x \in \mathbb{R}_+ , -x \notin \mathbb{R}_+$.

ومنه f دالة لا زوجية لا فردية.

5. $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$

$D_f = \mathbb{R}$

• $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = e^{-x} - \frac{1}{e^{-x}}$

$= \frac{1}{e^x} - e^x$

$= -\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) = -f(x)$

ومنه f دالة فردية.

6. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+1}{x-1} > 0, x-1 \neq 0\right\}$

$\frac{x+1}{x-1} > 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) > 0$

نبحث عن حلول المتراجحة

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
		$+$		$-$		$+$	

ومنه الحلول هي:

$x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

إذن:

$D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

• $\forall x \in D_f , -x \in D_f$

$f(-x) = \ln \frac{-x+1}{-x-1}$

$= \ln \frac{-(x-1)}{-(x+1)}$

$= \ln \frac{x-1}{x+1}$

$= \ln \left(\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

$= -\ln \frac{x+1}{x-1}$

$= -f(x)$

ومنه f دالة فردية

7. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+x+1 \geq 0 , x^2-x+1 \geq 0\}$

$$\boxed{\ln \frac{1}{x} = -\ln x}$$

لدينا: $x^2+x+1=0$

$\Delta=-3<0$

ومنه إشارة العبارة من إشارة معامل x^2، وهو موجب

أي:

$\forall x\in \mathbb{R},\ x^2+x+1>0$

وكذلك

$x^2-x+1=0$

$\Delta=-3<0$

ومنه إشارة العبارة من إشارة معامل x^2، وهو موجب

أي:

$\forall x\in \mathbb{R},\ x^2-x+1>0$

إذن:

$D_f=\mathbb{R}$.

• $\forall x\in \mathbb{R},\ -x\in \mathbb{R}$

$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+(-x)+1}-\sqrt{(-x)^2-(-x)+1}$

$=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}$

$=-\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

$=-f(x)$

ومنه f دالة فردية

8. $f(x)=\dfrac{4|x|}{x}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq 0\}=\mathbb{R}^*$

• $\forall x\in \mathbb{R}^*,\ -x\in \mathbb{R}^*$

$f(-x)=\dfrac{4|-x|}{-x}=-\dfrac{4|x|}{x}=-f(x)$

ومنه f دالة فردية

التمرين الثاني:

حساب النهايات

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{0}{0}$ ح.ع.ت

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to -1}(x-1)=\boxed{-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^2-1}=\dfrac{0}{0}$ ح.ع.ت

نستخدم طريقتين.

ط1: باستخدام لوبيتال.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^4}{2x}=\boxed{\dfrac{5}{2}}$

قاعدة لوبيتال

إذا كان:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$ أو $\dfrac{\infty}{\infty}$

و f و g دالتين قابلتين للاشتقاق

فإن:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

ط: القسمة الإقليديــــة

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 1 & x - 1 \\ \hline
-(x^5 - x^4) & x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ \hline
x^4 - 1 & \\
-(x^4 - x^3) & \\ \hline
x^3 - 1 & \\
-(x^3 - x^2) & \\ \hline
x^2 - 1 & \\
-(x^2 - x) & \\ \hline
x - 1 & \\
-(x - 1) & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

$$\frac{x^5-1}{x^2-1} = \frac{x^5-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x+1}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x+1}$$

$$= \frac{5}{2}$$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^2+1} =$ ح ع ت

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}$$

$$= 2$$

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty - \infty$

ح.ع.ت

بالضرب في المرافق

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2})}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \frac{1}{+\infty} = 0$$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = +\infty - \infty$ ح ع ت

بالضرب في المرافقة

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2})}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\cancel{x}}}+1} = \frac{1}{2}$$

التمرين الثالث:

دراسة الاستمرارية

1. $$f(x)=\begin{cases}\sin x & , x\leq 0\\ x\ln x & , x>0\end{cases}$$

$D_f=\mathbb{R}$.

- ندرس استمرارية f على مجموعة تعريفها.
- في المجال $]-\infty,0[$ ،
$f(x)=\sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$
وبالتالي مستمرة على $]-\infty,0[$.
- في المجال $]0,+\infty[$ ،
$f(x)=x\ln x$ مستمرة لأنها جداء دالتين مستمرتين
- دراسة الاستمرارية عند 0

f مستمرة عند النقطة 0 إذا كان:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$$

لدينا:

* $f(0)=\sin 0=0$.
* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sin x=0=f(0)$

ومنه f مستمرة على يسار 0.

* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0=f(0)$

ومنه f مستمرة على يمين 0.

بما أن:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

فإن f مستمرة عند 0.

إذن f مستمرة على $\mathbb{R}$.

2. $$g(x)=\begin{cases}2x & , x\leq 0\\ 2x+1 & , x>0\end{cases}$$

$D_f=\mathbb{R}$

g مستمرة على المجالين $]-\infty,0[$ و $[0,+\infty[$ لأنها كثير حدود.

ندرس الاستمرارية عند 0.

* $g(0)=2\times 0=0$
* $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0=g(0)$

---

f مستمرة عند نقطة a إذا كان:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

f مستمرة عند نقطة a إذا كانت مستمرة على يمين ويسار a أي:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

ومنه g مستمرة على يسار 0.

* $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} 2x+1 = 1 \neq g(0)$

ومنه g ليست مستمرة على يمين 0.

g مستمرة على يسار 0، وليست مستمرة على يمينه، فهي ليست مستمرة عنده.

اذن:

g مستمرة على $\mathbb{R}-\{0\}$

التمرين الرابع:

دراسة الاستمرارية:

1. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$

$D_f = \mathbb{R}$

نعلم أن:

$x \mapsto \sin x$ دالة مستمرة في $\mathbb{R}$،

$x \mapsto x^2+1$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}$،

f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها حاصل قسمة دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$.

2. $g(x) = \ln(1+x^2)$

$D_g = \mathbb{R}$

g دالة مستمرة على $\mathbb{R}$

لأنها تركيب دالتين مستمرتين

3. $h(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3x+2 \neq 0\}$

$= \mathbb{R}-\{1,2\}$

h دالة مستمرة على $\mathbb{R}-\{1,2\}$

لأنها حاصل قسمة دالتين مستمرتين.

التمرين الخامس:

1. $f(x) = x^3-4x^2+1$, $[0,1]$

اثبات أن $f(x)=0$.

لدينا f مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالتالي مستمرة على $[0,1]$.

$f(0) = 1$ و $f(1) = -2$

$f(0) \cdot f(1) = 1 \times (-2) = -2 < 0$

حسب نظرية القيم المتوسطة

$\exists c \in]0,1[$

حيث: $f(c) = 0$

أي أن $f(x)=0$، f تقبل جذر على الأقل.

نظرية القيم المتوسطة:

اذا كانت f مستمرة على $[a,b]$

و

$f(a) \cdot f(b) < 0$

فانه:

$\exists c \in]a,b[$ /

$f(c) = 0$

نفس الطريقة بالنسبة

المجالين ② ، ③ على التوالي

[-1,0] ، [0,1] على التوالي

التمرين السادس

- دراسة قابلية الاشتقاق

1. $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & , x \leq 0 \\ \dfrac{x}{1+x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$

• على المجال $]-\infty,0[$ ، f تقبل الاشتقاق لأنها حاصل قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق.

• على المجال $]0,+\infty[$ ، f تقبل الاشتقاق لأنها حاصل قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق.

• ندرس قابلية الاشتقاق عند النقطة 0

$$* \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{x}{1+x}-0}{x-0}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x}{x(1+x)} = 1 = f'_d(0)$$

$$* \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\frac{x}{1-x}-0}{x-0}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x}{x(1-x)} = 1 = f'_g(0)$$

بما أن:

$$f'_d(0) = f'_g(0) = 1$$

فإن: f تقبل الاشتقاق عند 0.

إذن: f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

2. $g(x) = (x+1)\,|\ln(x+1)|$

$$= \begin{cases} -(x+1)\ln(x+1) & , x \leq 0 \\ (x+1)\ln(x+1) & , x \geq 0 \end{cases}$$

$D_g = \mathbb{R}$.

لأن:

$$|\ln(x+1)| = \begin{cases} -\ln(x+1) & , x \leq 0 \\ \ln(x+1) & , x \geq 0 \end{cases}$$

• على المجالين $]-\infty,0[$ ، $]0,+\infty[$ g تقبل الاشتقاق لأنها جداء وتركيب دوال تقبل الاشتقاق.

• f تقبل الاشتقاق عند a إذا كان:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l = f'(a)$$

• f تقبل الاشتقاق عند a إذا كانت تقبل الاشتقاق على يمين ويسار a.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \overset{<}{\to} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$$

أي:

$$f'_d(a) = f'_g(a)$$

3. $h(x) = x\sqrt{|x|}$

$$= \begin{cases} x\sqrt{x} & , x \geq 0 \\ x\sqrt{-x} & , x \leq 0 \end{cases}$$

$D_h = \mathbb{R}$.

• على المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

h تقبل الإشتقاق لأنها جداء دالتين قابلتين للإشتقاق.

دراسة قابلية الإشتقاق عند 0.

* $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = 0$

$= h'_d(0)$

* $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x\sqrt{-x}}{x} = 0$

$= h'_g(0)$

$h'_d(0) = h'_g(0)$

ومنه h تقبل الإشتقاق عند 0

إذن:

h تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$

* $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-(x+1)\ln(x+1)}{x-0}$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{(-x-1)\ln(x+1)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x\ln(x+1) - \ln(x+1)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} \left[-\ln(x+1) - \frac{\ln(x+1)}{x}\right]$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} (\cancel{-\ln(x+1)})^{\,0} - \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\ln(x+1)}{x}$

لوبيتال:

$= \lim\limits_{x \to 0^-} (\cancel{-\ln(x+1)})^{\,0} - \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x+1}$

$= -1 = g'_g(0)$

* $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \cancel{\ln(x+1)}^{\,0} + \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}$

لوبيتال

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1 = g'_d(0)$

$g'_g(0) \neq g'_d(0)$

ومنه g لا تقبل الإشتقاق عند 0

إذن:

g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$