CHAPITRE 6

MECANIQUE DES FLUIDES

6 Introduction

La mécanique des fluides est la science des lois de l'écoulement des fluides. Elle est la base du dimensionnement des conduites de fluides et des mécanismes de transfert des fluides. C'est une option de la physique qui étudie les écoulements de fluides c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. Elle comprend deux grandes parties :

- la statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède et l'étude de la pression.
- la dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement, dynamique des fluides incompressibles, l'équation de continuité, théorème de Bernoulli, théorème d'Euler .

6.1 Définition d'un fluide

On appelle fluide, un milieu matériel continu et déformable (il épouse la forme du récipient qui le contient), sans forme propre et qui peut s'écouler. Dans les fluides, on distingue les gaz qui sont compressibles (la masse volumique varie en fonction de la pression) et les liquides qui sont très peu compressibles).

6.2 Fluide parfait

C'est un fluide totalement dépourvu de frottements internes. Tl s'écoule sans frottement, avec une viscosité nulle.

6.3 Fluide réel

Contrairement à un fluide parfait qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs et pratiquement inexistant dans la nature, les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prises en considération dans un fluide réel. Le phénomène de frottement visqueux apparait lors du mouvement du fluide.

6.4 Fluide *compressible*

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles : l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles

6.5 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.).

6.6 Caractéristiques physiques des fluides

Les fluides sont caractérisés par les propriétés suivantes :

- Masse *volumique* ρ :

C'est la masse par unité de volume du corps considéré :

$$\rho = \frac{m}{v} \qquad (6.1)$$

P : s'exprime en kg. m^{-3}.

V : volume en m^3.

m : masse en kg.

La masse volumique est fonction de la température et de la pression.(voir tableau 6.1.

Fluide	**Masse volumique ρ ($kg.m^{-3}$)**	**Type de fluide**
Benzène	$0,880.10^3$	Incompressibles
Chloroforme	$1,489.10^3$	
Eau	10^3	
Huile d'olive	$0,918.10^3$	
Mercure	$13,546.10^3$	
Air	$0,001205.10^3$	Compressibles
Hydrogène	$0,000085.10^3$	
Méthane	$0,000717.10^3$	

Tableau 6.1 : Valeurs des Masses volumiques de quelques fluides

- *Volume massique V* :

V est l'inverse de la masse volumique, il est exprimé en $m^3.kg^{-1}$:

$$V = \frac{1}{\rho} \qquad (6.2)$$

- *Poids volumique* m :
  m est exprimé en N $\mathbf{m^{-3}}$, il *est décrit par la relation ci-dessous :*

$$m = \frac{m\ g}{V} = \rho . g \qquad (6.3)$$

- *Densité d :*

C’est le rapport entre la masse volumique du corps considéré et la masse volumique du corps pris en référence dans les mêmes conditions de température et de pression.

La référence est :

- pour les liquides : l’eau prise à 4°C et sous 1013 hPa
- et les gaz : l’air à 0°C et 1013 hPa.

$$\text{Liquides : } d = \frac{\rho}{\rho_0} \qquad (6.4)$$

$$\text{Gaz : } d = \frac{M}{29} \qquad (6.5)$$

Il est à noter que la densité n’a pas d’unité.

- Viscosité :

C’est une grandeur qui caractérise les frottements internes du fluide, autrement dit sa capacité à s’écouler. Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force. Il existe deux types de viscosité : les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement. Elle peut être mesurée par un viscosimètre à chute de bille dans lequel on mesure le temps écoulé pour la chute d’une bille dans le fluide.
L'unité de la viscosité cinématique est le (**m²/s**).

Il existe deux types de viscosité :

- Viscosité dynamique : La viscosité dynamique exprime la proportionnalité entre la force qu'il faut exercer sur une plaque lorsqu'elle est plongée dans un courant et la variation de vitesse des veines de fluide entre les 2 faces de la plaque. Elle est exprimée par un coefficient représentant la contrainte de cisaillement nécessaire pour produire un gradient de vitesse d'écoulement d'une unité dans la matière.

  Considérons deux couches de fluide adjacentes distantes de Δz. La force de frottement F qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à :

  - la différence de vitesse des couches soit Δv
  - leur surface S

  et inversement proportionnelle à :

  - Δz : Le facteur de proportionnalité
  - μ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

$$F = \frac{\mu . S . . \Delta V}{\Delta Z} \qquad (6.6)$$

Où :

F : force de glissement entre les couches en N) , μ : Viscosité dynamique en (kg/m.s), S : surface de contact entre deux couches en (m2), Δv : Écart vitesse entre deux couches en (m/s), Δz : Distance entre deux couches en m.

- Viscosité cinématique

La viscosité cinématique caractérise le temps d'écoulement d'un liquide. Par contre, la viscosité dynamique correspond à la réalité physique du comportement d'un fluide soumis à une sollicitation (effort). En d'autres termes, cette dernière exprime la rigidité d'un fluide à une vitesse de déformation en cisaillement. Elle est par la relation 6.7 :

$$v = \frac{\mu}{\rho} \qquad (6.7)$$

Les propriétés précédentes seront utilisées ultérieurement. Le comportement mécanique et les propriétés physiques des fluides compressibles et ceux des fluides incompressibles sont différents.

En effet, les lois de la mécanique des fluides ne sont pas universelles. Elles sont applicables uniquement pour une classe de fluides donnée. Conformément à la classification des fluides : parfait, réel compressible et incompressible, les lois relatives à chaque type de fluides seront exposées d'une façon indépendante

Remarque : Dans le système international (SI), l'unité de la viscosité dynamique est le Pascal seconde (Pa·s) ou Poiseuille (Pl) : 1 Pa·s = 1 Pl = 1 kg/m·s

6.7 Statique des fluides

Elle comprend l'étude des fluides au repos : Les lois et les théorèmes fondamentaux, la notion de pression, le théorème de Pascal, le principe d'Archimède et la relation fondamentale de l'hydrostatique.

6.7.1 Notion de pression d'un fluide

La pression est une grandeur scalaire. Un fluide est capable d'exercer une force sur un solide. De la force qu'exerce ce fluide sur une surface en résulte une pression.

Par définition la pression P s'exprime par :

$$P = \frac{dF_N}{S} \qquad (6.8)$$

La force exercée par le fluide sur un élément de surface dS peut se décomposer en composantes tangentielle et normale : (voir Fig. 6.1).

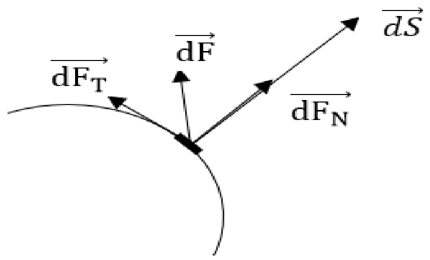


Figure 6.1 : Forces exercées par le fluide

- une composante tangentielle dF_T
- une composante normale dF_N

En statique des fluides, on ne s'intéresse qu'à la composante normale, la composante tangentielle n'intervenant que si le fluide est en mouvement

P, s'exprime en Pascal (Pa).

D'autres unités sont unités sont utilisés pour la pression :

- le bar : 1 bar = 10^5 Pa
- l'atmosphère : 1atm = 101325 Pa
- le millimètre de mercure : 760 mmHg = 101325 Pa

6.7.2 Relation fondamentale de l'hydrostatique

Considérons un élément de volume d'un fluide incompressible (liquide homogène de poids volumique $\overline{w}$). Cet élément de volume a la forme d'un cylindre d'axe (G, $\vec{u}$) qui fait un angle α comme indiqué en Fig. 6.2, avec l'axe vertical (O,Z) d'un repère R(O,X,Y,Z).
où :
l la longueur du cylindre, ds sa section, G_1 d'altitude Z_1 et G_2 d'altitude Z_2, les centres des sections droites extrêmes.

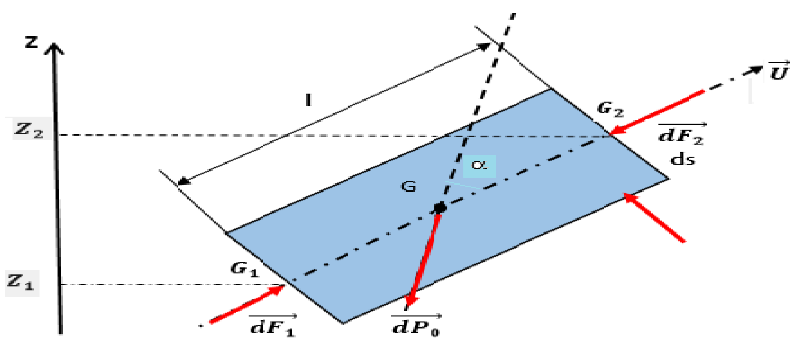


Figure 6.2 : Fluide incompressible

Etudions l'équilibre du cylindre élémentaire, celui-ci est soumis aux :

- son poids :

$$dp_0 = -\overline{w}.l.ds.z \qquad (6.9)$$

- forces de pression s'exerçant sur :
  - l a surface latérale : $\Sigma\, \overrightarrow{dF_l}$
  - les deux surfaces planes extrêmes :

$$\overrightarrow{dF_1} = -dp_1.ds.(-\vec{u}) \qquad (6.10)$$
$$\overrightarrow{dF_2} = -dP_2\,.\,ds.(\vec{u}) \qquad (6.11)$$

avec p_1 et p_2 les pressions du fluide respectivement en G1 et G2.

Le cylindre élémentaire est en équilibre dans le fluide. Donc la résultante des forces extérieures = $\vec{0}$

$$\overrightarrow{dp_0} + \overrightarrow{dF_l} + \overrightarrow{dF_1} + \overrightarrow{dF_2} = \vec{0} \qquad (6.12)$$

En projection sur l'axe de symétrie (G, $\vec{u}$) du cylindre, on obtient :

$$\overline{w}.l.ds\cos\alpha + p_1.ds. - p_2.ds = 0 \qquad (6.13)$$

On exprime la différence de pression $p_1 - p_2$, après avoir divisé par ds et noté que :

$$l.\cos\alpha = Z_1 - Z_2$$

$$p_1 - p_2 = \overline{w}.(Z_2 - Zz_1) = \rho.g.(Z_2 - Z_1) \qquad (6.14)$$

(C'est la relation fondamentale de l'hydrostatique)

6.7.3 Poussée d'Archimède

Elle est énoncée comme suit : « Tout corps plongé dans un fluide (liquide ou gaz) au repos, subit de la part de ce fluide une poussée verticale dirigée du bas vers le haut. Cette poussée appliquée au centre de masse de ce volume est égale au poids du volume de fluide déplacé.

$$\overrightarrow{\pi_A} = -\rho_{fluide}.V_{corps\ immergé}.\vec{g} \qquad (6.15)$$

Une illustration est donnée en Fig. 6.2.

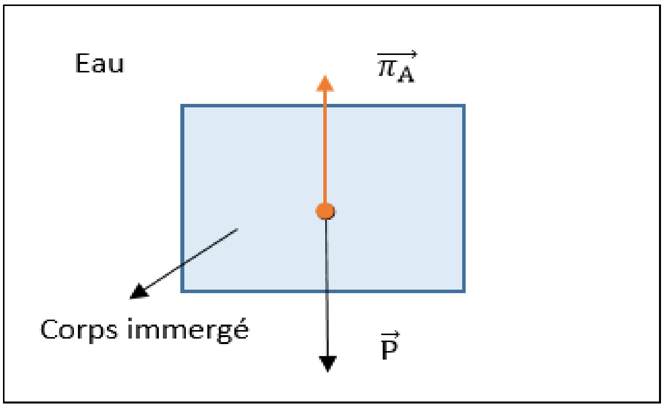


Figure 6.2 : Corps immergé dans un fluide

6.7.4 Théorême de *Pascal*

Un liquide transmet intégralement et dans toute les directions les variations de pression qu'on lui fait subir. Ceci est lié à la compressibilité qui implique une masse constante.

Exemple : la presse hydraulique (illustrée en Fig. 6.3)
On exerce une force F sur le piston de surface s. La pression $p = \frac{F}{s}$ est intégralement transmise au piston de surface S. En effet, la relation fondamentale de la statique des fluides s'écrit : $p_2 - p_1 = \rho . g . h$, si h est constant

Alors : $\Delta p_2 = \Delta p_1$

La force qui s'exerce sur S vaut :

$$P = p \text{ x } S = F \text{ x } \frac{S}{s}$$

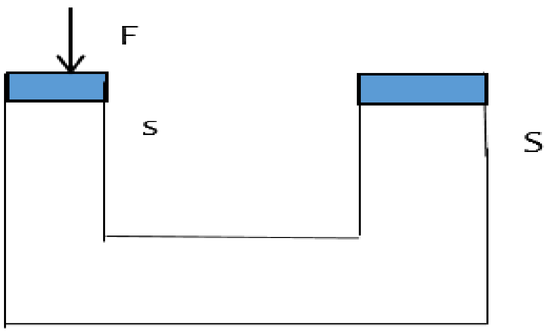


Figure 6.3 : Presse hydraulique

Toute variation de pression en un point engendre la même variation de pression en un point.

6.8 Dynamique des fluides incompressibles

La dynamique des fluides parfaits qui étudie les fluides en mouvement. Contrairement aux solides, les éléments d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes. L'écoulement des fluides est un phénomène complexe.

On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier :

- L'équation de continuité (conservation de la masse) ;
- Le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie) ;
- Le théorème d'Euler (conservation de quantité de mouvement) ; à partir duquel on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement (exemple les jets d'eau).

6.8.1 Définition

Ecoulement permanent : écoulement d'un fluide parfait incompressible est dit permanent, si les grandeurs (pression, température, vitesse, ...) qui le caractérisent vont rester constantes au cours du temps.

6.8 .2 Débit

Soit une canalisation de section S. La quantité de fluide traversant cette section pendant une certaine durée, permet d'exprimer le débit :

- Débit massique q_m en kg/s :

$$q_m = \frac{dm}{dt} \qquad (6.16)$$

- Débit volumique q_V en m³/s :

$$q_V = \frac{dV}{dt} \qquad (6.17)$$

- Les deux débits sont reliés par la relation suivante :

$$q_m = \rho . q_V \qquad (6.18)$$

6.8.3 Conservation du débit (ou équation de continuité)

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent (voir Fig. 6.4) :

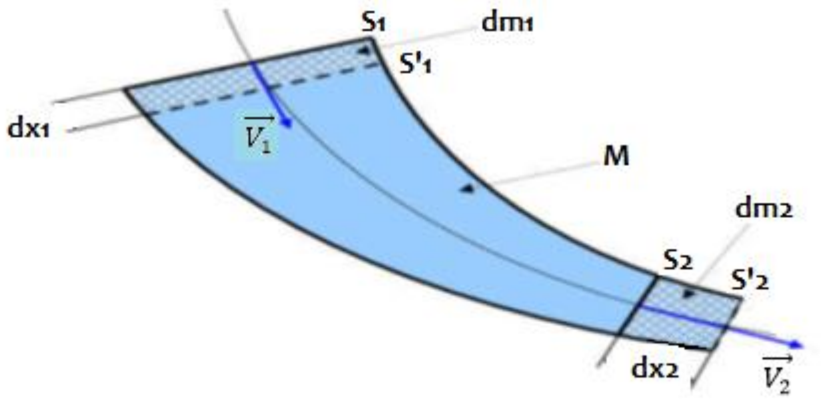


Figure 6.4 : Veine

On note :

S_1 *et* S_2 : la section d'entrée et de sortie à l'instant t respectivement
S'_1 *et* S'_1 : les sections d'entrée et de sortie à l'instant t'
$\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ **:** les vecteurs vitesse d'écoulement respectivement à travers les sections de la veine
$\overrightarrow{dx_1}$ et $\overrightarrow{dx_2}$: les déplacements des sections S_1 *et* S_2 pendant l'intervalle de temps dt

dm_1 : masse comprise entre les sections S_1 *et* S'_1
dm_2 : masse comprise entre les sections S_2 *et* S'_2

Pendant l'intervalle de temps dt, la masse dm_1 ayant traversé la surface S_1 sera la même que celle traversant l'élément de surface S_2, d'où :

$$\rho_1 . dx_1 . S_1 = \rho_2 . dx_2 . S_2 \quad (6.19)$$

$$\rho_1 . S_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 . S_2 . \frac{dx_2}{dt} \quad (6.20)$$

$$\rho_1 . S_1 . v_1 = \rho_2 . S_2 . v_2 \quad (6.21)$$

Comme le fluide est parfait : $\rho = \rho_1 = \rho_2$,

d'où :

$$S_1 . v_1 = S_2 . v_2 \quad \text{ou bien} \quad q_V = Sv \quad (6.22)$$

6.8.4 Equation de Bernoulli (sans échange de travail)

Soit un fluide parfait et incompressible, avec écoulement permanent.
L'équation de Bernoulli énonce le fait que l'énergie totale reste constante lors de l'écoulement.
Rappelons que l'énergie totale E_t est la somme de l'énergie cinétique (E_c), l'énergie de pesanteur (Epz), et l'énergie potentielle de pression (E_{pp}).

On écrit :

$$E_t = E_c + E_{pz} + E_{pp} \qquad (6.23)$$

Après remplacement dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$E_t = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 + \frac{m}{\rho}p_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2 + \frac{m}{\rho}p_2 \qquad (6.24)$$

De l'équation (6.24), nous déduisons les trois formes de l'équation de Bernouilli : (6.26), (6.27) et (6.28).

1ère forme : Equation de Bernoulli en fonction des énergies massiques
En divisant l'équation (6.24) par la masse *m*, on obtient :

$$\mathrm{E_t} = \frac{1}{2}\mathrm{v}_1^2 + \mathrm{gz}_1 + \frac{\mathrm{p}_1}{\rho} = \frac{1}{2}\mathrm{v}_2^2 + \mathrm{gz}_2 + \frac{\mathrm{p}_2}{\rho} \qquad (6.25)$$

D'où :

$$\mathbf{E_t} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{v^2} + \mathbf{gz} + \frac{\mathbf{p}}{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{cte}.\ (\mathbf{en\ J/kg}) \qquad (6.26)$$

2ème forme : Equation de Bernoulli en fonction des pressions
En multipliant l'équation (6.26) par ρ on obtient :

$$\mathbf{E_t} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\mathbf{2}}\mathbf{v^2} + \boldsymbol{\rho}\mathbf{gz} + \mathbf{P} = \boldsymbol{cte} \qquad (\mathbf{en\ Pa}) \qquad (6.27)$$

avec P : pression statique, $\frac{\rho}{2}\mathrm{v}^2$: pression cinétique, Pgz : pression de pesanteur

3ème forme : Equation de Bernoulli en fonction des hauteurs
En divisant l'équation (6.27) par ρ.g, on obtient :

$$\frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{2g}} + \mathbf{z} + \frac{\mathbf{P}}{\boldsymbol{\rho.g}} = \boldsymbol{cte}.\ (\mathbf{en\ m}) \qquad (6.28)$$

Avec z : hauteur géométrique, $\frac{v^2}{2g}$: hauteur due à la vitesse ou hauteur dynamique, $\frac{\mathrm{P}}{\rho.g}$: hauteur due à la pression

6.8.5 Théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement)

Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$$\sum\vec{F}_{ext} = \frac{\overrightarrow{dP}}{dt}, \text{ avec } \vec{P} = m.\vec{v}_G \qquad (6.28)$$

où : $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ est la quantité de mouvement.

Ce théorème permet de déterminer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets qui les environnent. L'application du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau, celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, etc.

Le théorème d'Euler est la résultante ($\sum F_{ext}$) des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (liquide contenu dans l'enveloppe par S_1 et S_2) est égale à la variation de la quantité de mouvement du fluide qui entre en S_1 à une vitesse v_1 et sort par S_2 à une vitesse v_2 :

$$\sum \boldsymbol{F_{ext}} = \boldsymbol{q_m}(\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}) \qquad \textbf{(6.29)}$$

6.9 Exercices

Exercice 1 : Répondez par vrai ou faux

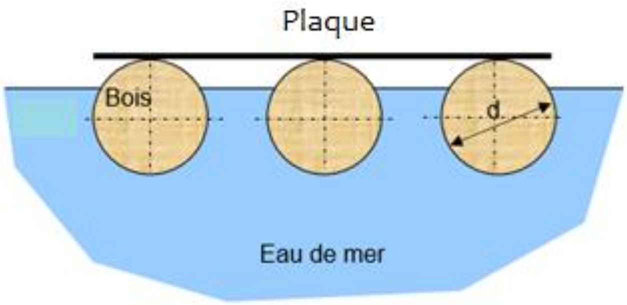
1. La mécanique des fluides étudie et caractérise
- **Le comportement mécanique des fluides**
- Le comportement chimique des fluides
- Le comportement thermodynamique des fluides
2. La viscosité d'un fluide caractérise
- sa couleur
- sa capacité à s'écouler
- **sa résistance à l'écoulement**
3. Les fluides ont une structure moléculaire :
- il est compressible
- il possède une surface libre
- **il est incompressible**

Exercice 2 : Statique des fluides

On considère une plate-forme composée d'une plaque plane et de trois poutres cylindriques en bois qui flottent à la surface de la mer.
On donne :

a- Les dimensions d'une poutre :
- diamètre d=0,5 m
- longueur L=4 m,
- la masse volumique du bois : ρ_{bois} = 700 Kg/m^3
- la masse volumique de l'eau de mer : ρ_{mer} = 1027 Kg/m^3
- la masse de la plaque m_p= 350 kg,

b- l'accélération de la pesanteur g=9,81 m/s^2

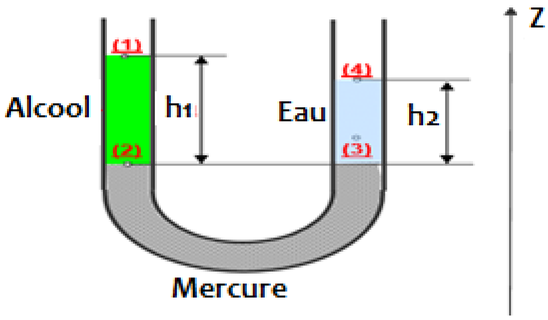


1- Calculer le poids total P_0 de la plate-forme.
2- Ecrire l'équation d'équilibre de la plate-forme.
3- En déduire la fraction F (%) du volume immergé des poutres.
4- Déterminer la masse Mc maximale qu'on peut placer sur la plate-forme sans l'immerger

Exercice 3 : Statique des fluides

Un tube en U contient du mercure sur une hauteur de quelques centimètres. On verse dans l'une des branches un mélange d'eau - alcool éthylique qui forme une colonne de liquide de hauteur h1=30 cm. Dans l'autre branche, on verse de l'eau pure de masse volumique 1000 kg/m³, jusqu'à ce que les deux surfaces du mercure reviennent dans un même plan horizontal. On mesure alors la hauteur de la colonne d'eau h_2=24 cm.

1- Appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique pour les trois fluides.

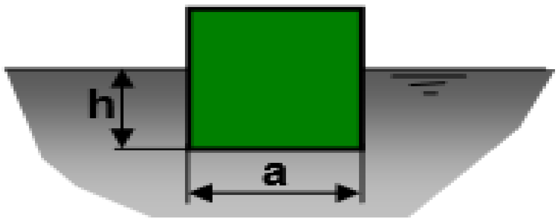


2- En déduire la masse volumique du mélange eau – alcool éthylique

Exercice 3 : Statique des fluides

Un cube en acier de côté a=50 cm flotte sur du mercure. On donne les masses volumiques : acier ρ1= 7800 kg/m³ et mercure ρ2= 13600 kg/m³ (voir le schéma ci dessous).

1- Appliquer le théorème d'Archimède,
2- Déterminer la hauteur h immergé

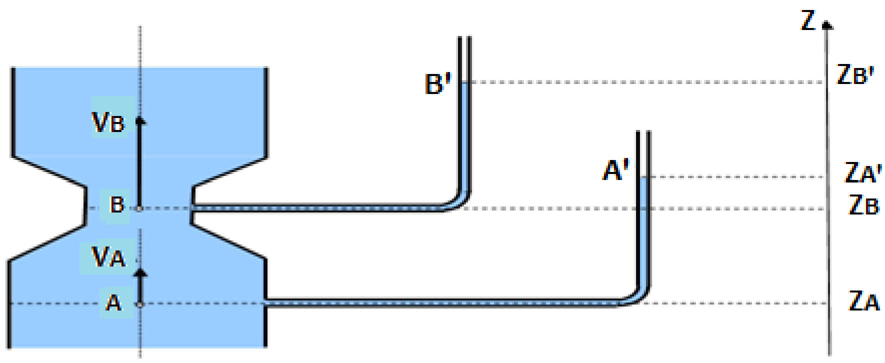


Exercice 4 : Dynamique des fluides incompressibles parfaits

Dans le tube de Venturi représenté sur le schéma ci-dessous, l'eau s'écoule de bas en haut. Le diamètre du tube en A est d_A= 30 cm et en B il est de dB=15 cm. Afin de mesurer la pression PA au point A et la pression PB au point B, deux manomètres à colonne d'eau (tubes piézométriques) sont connectés au Venturi. Ces tubes piézométriques sont gradués et permettent de mesurer les niveaux $Z_{A'}$=3,061m et

$Z_{B'}$ =2,541 m respectivement des surfaces libres A' et B'. On donne :

- l'altitude de la section A : Z_A= 0 m,
- l'altitude de la section B : Z_B= 50 cm,
- l'accélération de la pesanteur est g=9,8 m/s²,
- la pression au niveau des surfaces libres $P_{A'}=P_{B'}=P_{atm}$= 1bar,
- la masse volumique de l'eau est ρ=1000 kg/m³. On suppose que le fluide est parfait.



Questions :

1) Appliquer la RFH (Relation Fondamentale de l'Hydrostatique) entre B et B', et calculer la pression P_B au point B ?
2) De même, calculer la pression P_A au point A ?
3) Ecrire l'équation de continuité entre les points A et B. En déduire la vitesse d'écoulement V_B en fonction de V_A.
4) Ecrire l'équation de Bernoulli entre les points A et B.