الفصل الخامس

حساب التكاملات

(1) الدوال الأصلية:

1- تعريف: ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة حقيقية
وليكن $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق
نقول أن F دالة أصلية لـ f إذا حقق الشرط:
$$\forall x\in[a,b]:\quad F'(x)=f(x)$$
نستنتج أنه إذا كان F و G دالتين أصليتين لـ f
فإنه: $\forall x\in[a,b]: G'(x)=f(x)$ و $F'(x)=f(x)$
أي أن $[G(x)-F(x)]'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$.
أي أن $G(x)-F(x)$ ثابت أي أن $G(x)-F(x)=c$
أي أن الدوال الأصلية للدالة f لا تختلف عن بعضها إلا بثابت c.
نرمز لمجموعة كل الدوال الأصلية لـ f بالرمز $\int f(x)dx$
أي أن $\int f(x)dx=F(x)+C$
ونسمى $\int f(x)dx$ تكاملا غير محدود أو دالة أصلية لـ f

CIMPA-UNESCO-EGYPT School
Recent Developments in the Theory
of Elliptic PDE
CIMPA

نظرية: إذا كان $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة
و $x_0\in[a,b]$ فإن $F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)dt$ دالة أصلية لـ f
أي: f مستمر على $[a,b]$ $\Leftarrow$ f لها دالة أصلية
عكس الاستنتاج غير صحيح، أي إذا كان F دالة أصلية لـ f $\not\Leftarrow$ f مستمر

مثال: $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ دالة أصلية لـ f حيث،
$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ لأن $F'(x)=f(x)$
ورغم ذلك f غير مستمر عند $x=0$

(2) النظرية الأساسية:

إذا كان $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة وكان F دالة أصلية لـ f، أي أن $F'(x)=f(x)$، $\forall x\in$ عندئذ لدينا:
$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$
ونرمز بـ $F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b$

③ كيفية حساب تكامل:

عند حساب $\int f(x)dx$ ، فإننا نفكر أولا في تطبيق تعريف الدالة الأصلية، فإذا استطعنا إيجاد دالة $F(x)$ بحيث يكون $F'(x)=f(x)$ فعندئذ يكون لدينا: $\int f(x)dx = F(x)+C$

مثال:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad , n\in\mathbb{N}, C\in\mathbb{R}$$

$$\int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sqrt{x^2+a^2}+C$$

أما إذا لم نستطع فعل ذلك لسبب من الأسباب فإننا نلجأ إلى حساب التكامل $\int f(x)dx$ بإحدى الطرق التالية:

① بطريقة استبدال المتغير: لحساب $\int f(x)dx$ نغير المتغير بوضع $t=h(x)$ ومنه $dt=f'(x)dx$ ونستخرج عبارة $f(x)$ و dx بدلالة t و dt ثم نعوض في التكامل المعطى فنحصل على تكامل سهل حسابه.

CIMPA-UNESCO-EGYPT School
Recent Developments in the Theory
of Elliptic PDE

نظرية: إذا كان f و g يقبلان المكاملة فإن $f\pm g$ ، αf $(\alpha\in\mathbb{R})$ يقبلان المكاملة ولدينا

$$\int (f\pm g)(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha\int f(x)dx$$

ولدينا الخواص التالية:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad c\in[a,b]$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

French Embassy in Cairo IMU

مثال: لحساب $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^3}\,dx$

نضع $t = 1+x^3$ فيكون $dt = 3x^2\,dx$

ومنه $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,dt$ ونحصل على

$$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^3}\,dx = \int \frac{1}{3}\,\frac{1}{t^3}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^3}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\int t^{-3}\,dt = \frac{1}{3}\,\frac{t^{-2}}{(-2)}$$

$$= \frac{-1}{6t^2} + C$$

وحيث $t = 1+x^3$ فإن،

$$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^3}\,dx = \frac{-1}{6(1+x^3)^2} + C$$

CIMPA
CIMPA-UNESCO-EGYPT School
Recent Developments in the Theory
of Elliptic PDE

ب) طريقة التكامل بالتجزئة،

إذا كانت $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالتين قابلتين للاشتقاق فإن،

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

ويسمى دستور المكاملة بالتجزئة

مثال، $\int x \sin x\,dx$

نضع

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)\,dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

UNESCO
ICTP
French Embassy in Cairo
IMU

ج) طريقة حساب تكامل دالة كسرية:

لحساب تكامل من الشكل $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيري حدود فإننا نقوم بما يلي:

1) نقسم $P(x)$ و $Q(x)$ إقليديا (عندما تكون درجة $P(x)$ أكبر من $Q(x)$) ونكتب:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = h(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

حيث $h(x)$ هو ناتج القسمة و $P_1(x)$ كثير حدود درجته أقل من درجة $Q(x)$،

2) نحلل $Q(x)$ إلى جداء مضاريب (إذا أمكن) من الشكل

$(ax+b)^n$ و $(\alpha x^2+\beta x+\delta)^m$

ونكتب عندئذ مثلا:

CIMPA-UNESCO-EGYPT School
Recent Developments in the Theory
of Elliptic PDE

$$\frac{P_1(x)}{(ax+b)^n(\alpha x^2+\beta x+\delta)^m} = \frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\dots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$
$$+\frac{C_1x+D_1}{\alpha x^2+\beta x+\delta}+\dots+\frac{C_mx+D_m}{(\alpha x^2+\beta x+\delta)^m}$$

حيث a,b,α,β,δ ، A_i, C_i, D_i كلها ثوابت نعينها بعد توحيد المقامات ومطابقة الطرفين، وبذلك نكون قد حصلنا على تفكيك الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ثم نكامل الطرفين فنجد $\int\frac{P(x)}{Q(x)}$

مثال 1: لحساب $I=\int\frac{x^4-x^2+1}{x^2-1}$ ، نرى أن

$$\frac{x^4-x^2+1}{x^2-1} = x^2+\frac{1}{x^2-1} = x^2+\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$
$$= x^2+\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}$$

بتوحيد المقامات والمطابقة نجد ،

$A_1 = -\frac{1}{2}$ و $A_2 = \frac{1}{2}$

وبمكاملة الطرفين نجد I ،

مثال 12: لحساب $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx$ ، نرى

أن مميز المقام $\Delta = 9-8>0$ لأن المقام يقبل

جذرين هما $x_1 = \frac{3-1}{2}$ و $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$ ومنه

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{x+1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2}$$

ونفس الشيء مثل المثال 1،

مثال 13: لحساب $L = \int \frac{dx}{x^2+x+1}$

نرى أن مميز المقام $\Delta = 1-4<0$ وبالتالي

$x^2+x+1>0$ أي لا يملك جذور لأنه لا

يمكننا إيجاد مضاريب، في هذه الحالة

نقوم بإكماله إلى مربع كامل كالتالي ،

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow L = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx$$

ثم نضع $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t$ ، فيكون

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}t^2$$

و $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$

ومنه L يصبح ،

$$L = \int \frac{1}{\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3} \int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan t + C$$

وبما أن $t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ فإن

$$L = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] + C$$

3) التكامل بالتدريج: لحساب تكامل من الشكل

و $\int \frac{dx}{(x^2+1)}$ مثلاً فإننا نعتبر التكامل

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ ونحسب بالتجزئة عبارة

CIMPA-UNESCO-EGYPT School
Recent Developments in the Theory
of Elliptic PDE

I_{n-1} فنجد علاقة تدريجية تربط بين

I_n و I_{n-1} ومنه نحسب $I_1, I_2, \dots$

لحساب $I_{n-1} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$ نضع،

$$dv = dx \longrightarrow v = x$$

$$u = \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \longrightarrow du = \frac{-2(n-1)x}{(x^2+1)^n}$$

وحسب دستور التجزئة

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\, dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^n}\, dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\left[I_{n-1} - I_n\right]$$

UNESCO ICTP French Embassy in Cairo IMU

ومنه $n \geq 2$

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}$$

وحيث

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$$

$$I_0 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^0} = \int dx = x$$

$$n=2 \Rightarrow I_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} I_1$$

$$n=3 \Rightarrow I_3 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} I_2$$

CIMPA-UNESCO-EGYPT School
Recent Developments in the Theory
of Elliptic PDE

⑤ حساب تكامل من الشكل $I=\int f(\cos x, \sin x)\,dx$

أي أن f دالة كل من $\cos x$ و $\sin x$ في هذه الحالة
إما نستعمل الدساتير المثلثية أو نغير المتغير
بوضع $t=\tan\frac{x}{2}$

كذلك لحساب $\int f(\operatorname{ch}x, \operatorname{sh}x)\,dx$ فنغير المتغير
بوضع $t=\operatorname{th}\frac{x}{2}$

مثال

UNESCO ICTP French Embassy in Cairo IMU