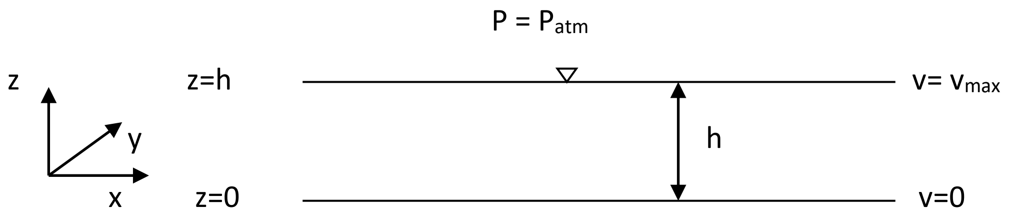
TD d'Hydraulique Générale II

## Série n°01 Équations Hydrodynamiques

### CORRECTION

**Exercice n°1**




$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{v}$$

L'equation de navier-stokes pour un liquide réel par rapport aux axes x, y et z :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=fz-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

Ecoulement unidirectionnel : $v_y = v_z = 0$ , $v_x \neq 0$

Ecoulement stationnaireou permanent $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Ecoulement uniforme $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$

Les forces fx = fy = 0 , fz = - g

On pose $\frac{\partial p}{\partial x} = -k (k > 0)$

Les équations de Naviers – Stokes se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} & (1) \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 & (2) \end{cases}$$

On prend l'équation (1) pour trouver l'expression de la vitesse v= f(z)

$$\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho}k \Leftrightarrow -\frac{k}{\rho\upsilon} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \Leftrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{k}{\mu}z + C_1 \Leftrightarrow v_x = -\frac{k}{2\mu}z^2 + C_1 z + C_2$$

On determine $C_1$ et $C_2$ en utilisant les conditions aux limites :

Pour $z = 0$ => $v_x = 0$ donc $C_2 = 0$

Pour $z = h$ => $v_x = v_{max} = cte$ $\Leftrightarrow \dfrac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{k}{\mu} h + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = \dfrac{kh}{\mu}$

On aura $v_x(z) = -\dfrac{k}{2\mu} z^2 + \dfrac{kh}{\mu} z$ (pour l'application numérique z = 0,5m et h = 1m )

On prend l'équation (2) pour trouver l'expression de la pression P= f(z)

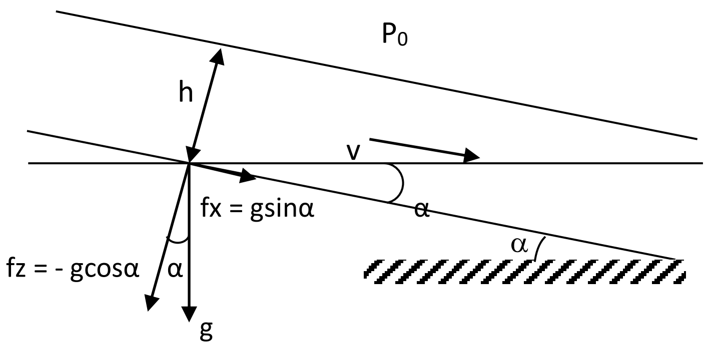
$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = g \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \Leftrightarrow P = -\rho g z + C_1 = -\gamma z + C_1$$

On determine $C_1$ en utilisant les conditions aux limites :

Pour $z = h$ => $P = P_{atm}$ $\Leftrightarrow \dfrac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow P_{atm} = -\gamma h + C_1 \Leftrightarrow C_1 = P_{atm} + \gamma h$

$P(z) = -\gamma z + P_{atm} + \gamma h$ on aura $P(z) = P_{atm} + \gamma(h - z)$ (avec h =1m et z= 0,5m)

**Exercice n°2 :**




Avec les mêmes données que le 1er exercice et avec un plan incliné d'un angle α = 30°C

1) Expression de la vitesse v= f(z) :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - f_x = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \;/\; \text{on pose } \frac{\partial p}{\partial x} = -k(k > 0)$$

$$-\frac{k}{\rho} - g\sin\alpha = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -\frac{k}{\mu} - \frac{g}{\upsilon}\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{k}{\mu} z - \frac{g}{\upsilon} z \sin\alpha + C_1$$

**Série n°01** **Équations Hydrodynamiques**

$$\Leftrightarrow v_x = -\frac{k}{2\mu}z^2 - \frac{g}{2\upsilon}z^2\sin\alpha + C_1 z + C_2$$

On determine $C_1$ et $C_2$ en utilisant les conditions aux limites :

Pour z = 0 => $v_x$ =0 donc $C_2 = 0$

Pour z = h => $v_x = v_{max}$ = cte $\Leftrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow -\frac{k}{\mu}h - \frac{g}{\upsilon}h\sin\alpha + C_1 = 0$

$$\Leftrightarrow C_1 = \frac{k}{\mu}h + \frac{g}{\upsilon}h\sin\alpha$$

On aura : $v_x(z) = -\frac{k}{2\mu}z^2 - \frac{g}{2\upsilon}z^2\sin\alpha + \frac{kh}{\mu}z + \frac{gh}{\upsilon}z\sin\alpha$

$v_x(z) = (-\frac{k}{2\mu} - \frac{g}{2\upsilon}\sin\alpha)z^2 + (\frac{kh}{\mu} + \frac{gh}{\upsilon}\sin\alpha)z$ (avec z= 0,5m)

2) Expression de la pression P= f(z) :

$$fz - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow -g\cos\alpha - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow -g\cos\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g\cos\alpha = -\gamma\cos\alpha \Leftrightarrow P = -\gamma z\cos\alpha + C_1$$

On determine $C_1$ en utilisant les conditions aux limites :

Pour z= h => $P=P_{atm}$ donc $C_1 = P_{atm} + \gamma h\cos\alpha$

On aura : $P(z) = -\gamma z\cos\alpha + P_{atm} + \gamma h\cos\alpha = P_{atm} + \gamma(h-z)\cos\alpha$ ( avec z= 0,5m)