Méthode de résolution algébrique d'un programme linéaire mixte ou standard.

1. **Standardisation la forme canonique par rapport à une base.**

Soient un programme primal noté P et son dual noté D

$$(P)\begin{cases} X \geq 0 \\ AX \leq = \geq B \\ \mathbf{MAX(Z)= CX} \end{cases} \quad \mathbf{(P)} \begin{cases} X \geq 0 \\ \textbf{Equation contraintes inferieures} \leq \textbf{disponibilité (ECi)} \\ \textbf{Equation contraintes égales} = \textbf{disponibilité (ECe)} \\ \textbf{Equation contraintes supérieure} \geq \textbf{disponibilité (ECs)} \\ \mathbf{MAX(Z)= CX} \end{cases}$$

Le passage à une forme standard/base nécessite l'intervention de variables d'écarts (P) en (P') :

$$\mathbf{(P) \Rightarrow (P')} \begin{cases} X \geq 0, Y \geq 0 \\ \mathbf{MAX(Z)= CX} \\ \mathbf{EC_i + y_i = d_i} \\ \mathbf{EC_e = d_e} \\ \mathbf{EC_s - y_s = d_s} \end{cases}$$

Comment résoudre (P') sous cette forme :

- ✓ Si ∃ une base apparente on applique directement **<u>le simplexe.</u>**
- ✓ Si ∄ une base apparente on fait intervenir des variables artificielles :
  Par exemple : standardisation avec ajout de variables d'écarts

$$\begin{matrix} \mathbf{X_1 + X_2 \leq 6} & & \mathbf{X_1 + X_2 + X_3 = 6} \\ \mathbf{X_1 - X_2 = 10} & \Rightarrow & \mathbf{X_1 - X_2 = 10} \\ \mathbf{2X_1 + X_2 \geq 16} & & \mathbf{2X_1 + X_2 - X_4 = 16} \end{matrix}$$

C’est claire l’inexistence d’une base alors pour construire une base I il faut ajouter des variables artificielles dans les contraintes ne disposant pas de vecteur de base. Donc **(P’)** se transforme en **(P’’)** tel que :

(P’) ➔ (P’’)
$$\begin{cases} X \geq 0, Y \geq 0, A \geq 0 \\ \mathbf{MAX(Z)= CX} \\ \mathbf{EC_i + y_i = d_i} & \mathbf{(a)} \\ \mathbf{EC_e + A_e = d_e} & \mathbf{(b)} \\ \mathbf{EC_s - y_s + A_S = d_s} & \mathbf{(c)} \end{cases}$$

<u>La solution est optimale</u> : $\mathbf{A_e = 0}$ **et** $\mathbf{A_s = 0}$

Problème auxiliaire lorsque min(z’)= $A_e + A_s = 0$

Si **< 0** ➔le problème n’admet pas de solution.

En résumé il s’agit en premier lieu d’ajouter des variables d’écarts et des variables artificielles.

Phase 1 : calculer Min(z’)= $A_e + A_s$ il faut que (Z’ =0)

Si oui alors la solution est réalisable de (P)

Phase 2 à chaque fois qu’une variables sort de la base on supprime complètement sa colonne jusqu’à ce que toutes variables sortantes sortent de la base d’où l’élimination de la ligne Z’. ceci convertit le programme à un programme primal est on continue avec le simplex si la solution optimale n’est pas atteinte (Cj ne sont pas tous négatifs ou nuls).

Détermination de MAX(Z’) = variable artificielles des contraintes égales + variable artificielles des contraintes supérieur

(b)+(c) => $EC_e + EC_s + Z' - Y_s = d_e + d_s \Rightarrow Z' = (d_e + d_s) + Y_s - (EC_e + EC_s)$

Exemple d'applications :

$\mathbf{Max(Z) = 2X_2 + X_3}$

$\mathbf{X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 6}$

$\mathbf{X_1 - X_2 + 2X_3 \geq 2}$

$\mathbf{X_i \geq 0 \quad i=1,3}$

Standardisation par rapport à une base I

$\mathbf{Max(Z) = 2X_2 + X_3}$

$\mathbf{X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 6}$

$\mathbf{X_1 - X_2 + 2X_3 - X_5 + A = 2}$

$\mathbf{X_i \geq 0 \text{ , } i=1,5 \text{ , } A \geq 0}$

Ajout d'une variable artificielle **A** suite à non apparence d'une base I

Calcul de $Z' = \mathbf{A = -X_1 + X_2 - 2X_3 + X_5 + 2}$

$Z' - 2 = \mathbf{-X_1 + X_2 - 2X_3 + X_5}$

Représentation par les tableaux : Itération 0

	X_1	X_2	X_3		X_5		bi	Rapport
X_4	1	1	2	2	0	0	6	3
A	1	-1	2	0	-1	1	2	1
Z	0	2	1	0	0	0	Z- 0	
Z'	-1	1	-2	0	1	0	Z' - 2	

Variable rentrante Min Variable Sortante

Itération 1

Sortie de la variable artificielle d'où élimination de la colonne correspondante

	X_1	X_2			X_5	bi
X_4	0	2	0	1	1	4
X_3	1/2	-1/2	1	0	-1/2	1
Z	-1/2	5/2	0	0	1/2	Z- 1

Variable rentrante Min Variable Sortante

Le problème devient un problème primal qui sera résolu par la méthode du <u>simplexe</u>

<u>Itération 2</u>

	X_1	X_2			X_5	bi
X_2	0	1	0	1/2	1/2	2
X_3	1/2	0	1	1/4	-1/4	2
Z	-1/2	0	0	-5/4	-3/4	Z- 6

La solution optimale est atteinte tous les Cj ≤ 0 ;

LA SOLUTION EST : $X_2 = 2$, $X_3 = 2$? MAX(Z)= 6