République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA
FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Polycopié du TP

$$\underbrace{\widehat{BIOSTATISTIQUES}}$$

Statistiques Appliquées à l'Expérimentation En Sciences Biologique sous SPSS (Troisième Année Licence)

Préparé par :
Dr. CHERFAOUI Mouloud

Université de Biskra, 2020/2021

Table des matières

Chapitre 1

Estimation sous SPSS

Introduction

L'objectif du présent chapitre est d'illustrer, à travers d'un exemple numérique, les principales étapes à suivre dans le logiciel SPSS pour obtenir une estimation par intervalle de confiance d'une moyenne à un seuil de confiance donné. Avant la présentation de ces étapes, un bref rappel sur la notion d'estimation ponctuelle et par intervalle de confiance d'un paramètre sera présentée.

1.1 Notion d'estimation d'un paramètre

L'estimation consiste à évaluer certaines caractéristiques d'une variable aléatoire à base des observations réalisées sur un échantillon. C'est-à-dire, elle consiste à évaluer un paramètre inconnu θ (dont θ peut être une moyenne, une variance, une fréquence,...) de la population à partir d'un échantillon représentatif tiré de cette population.

La valeur estimée du paramètre θ est généralement notée $\hat{\theta}$, alors

- θ : est la vraie valeur (inconnue) du paramètre.
- $\hat{\theta}$: est la valeur estimée du paramètre θ.

Un survol de la littérature nous permet de distinguer deux principales classes de méthodes d'estimation, à savoir : l'estimation ponctuelle et l'estimation par intervalle de confiance. Les principes de ces deux types d'estimation sont résumés dans les deux prochaines sections.

1.1.1 Estimation ponctuelle

Lorsqu'un paramètre θ est estimé par un seul nombre déduit des résultats de l'échantillon, ce nombre est appelé une estimation ponctuelle de ce paramètre. Entre autres on peut citer l'exemple de :

- L'estimateur de la moyenne μ qui est donné par la moyenne de l'échantillon

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

- L'estimateur de la variance σ^2 qui est donné par la variance corrigée de l'échantillon

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

- L'estimateur de la variance σ^2, lorsque la moyenne μ est connue, qui est donné par

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2.$$

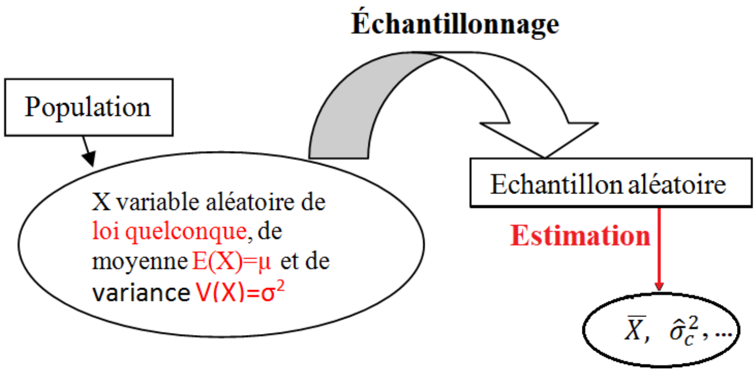


FIGURE 1.1: *Illustration graphique de la notion d'estimation.*

1.1.2 Estimation par intervalle de confiance

Les estimations ponctuelles, bien qu'utiles en pratique, ne fournissent aucune information concernant la précision des estimations. Ceci le fait qu'elles ne tiennent pas compte de l'erreur possible dans l'estimation due aux fluctuations (erreurs) d'échantillonnage. La théorie d'estimation par des intervalles de confiance (IC) consiste à construire, autour d'une estimation ponctuelle $\hat{\theta}$, un intervalle qui aura une forte probabilité $(1-\alpha)$ de contenir la vraie valeur du paramètre θ recherché.

Typiquement, on cherche deux nombres réels a et b tel que :

$$P(a \leq \theta \leq b) = 1 - \alpha,$$

où

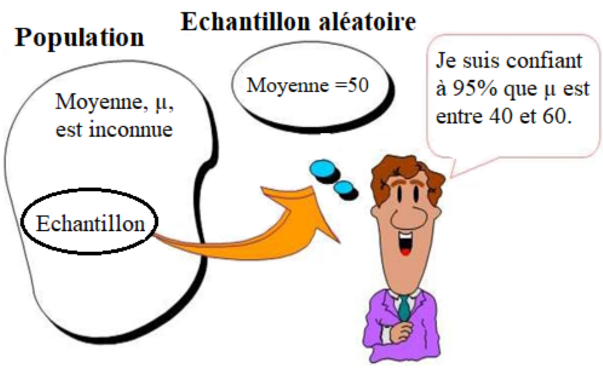
- L'intervalle $[a, b]$ est appelé intervalle de confiance pour θ et il est noté par

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = [a, b].$$

- La probabilité $(1-\alpha)$ est appelé le niveau de confiance et α est appelé le risque de se tromper que l'on est prêt à prendre c'est-à-dire la probabilité que la vraie valeur du paramètre θ n'appartienne pas à l'intervalle $[a, b]$ $(P(\theta \notin [a, b]) = \alpha)$.

Dans la pratique, généralement, on prend $\alpha \in \{10\%, 5\%, 2\%, 1\%, 0.1\%\}$.

Par exemple si on prend $\alpha = 5\%$, ce qui correspond à un IC à 95%, se traduit par :" il y a 95% de chance que la vraie valeur inconnue de θ soit comprise entre a et b".



1.2 Intevalle de confiance d'une moyenne sous SPSS

Dans les problèmes statistiques on peut s'intéresser à l'estimation de divers caractéristiques d'une population mais dans ce document nous allons se limiter uniquement à la détermination de la moyenne.

L'objectif de la présente section est de lister les étapes à suivre dans le logiciel SPSS pour construire un intervalle de confiance d'une moyenne. Pour ce faire, considérant l'exemple suivant :

Exemple 1 *La mesure de la taille (en cm) de 10 enfants d'une ville donnée à fourni ce qui suit :*

70.5	*85.2*	*93.8*	*99.1*	*101*	*105.8*	*110.3*	*121.2*	*138.6*	*166.1*

Questions :

1. *Déterminer une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart-type des tailles de ces enfants.*
2. *Déterminer une estimation par intervalle de confiance de la taille moyenne de ces enfants pour un risque* $\alpha = 5\%$.
3. *Déterminer une estimation par intervalle de confiance de la taille moyenne de ces enfants pour un risque* $\alpha = 1\%$.

Pour répondre aux questions de cet exemple sous SPSS, il suffit de suivre les étapes suivantes :

Etape 1. Saisie des données :

Entrez les données dans SPSS, dont nous avons une seule variable quantitative (**Tailles des enfants**) à définir dans SPSS : cliquez sur "**Affichages des variables"** puis saisissez tous ses caractéristiques : **Nom**, **Type**, **Largeur**,...), ensuite cliquez sur "**Affichage des données"** pour entrer les valeurs des variables où chaque colonne représente une variable (Voir Figure 1.2).

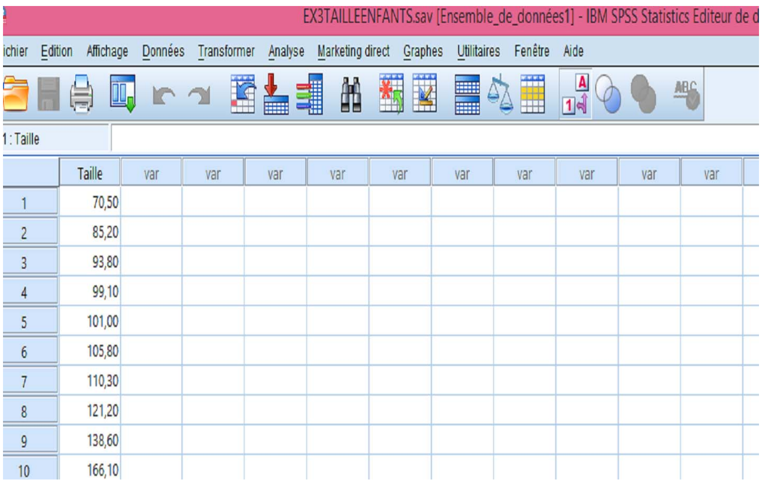


FIGURE 1.2: *Saisie des données sous SPSS.*

Remarque 1.1

1. *Il faut sauvegardez votre fichier.*
2. *Lors de l'introduction des nombres décimales dans SPSS si la configuration du PC est par défaut sont présenté par une virgule et non par un point. Exemple : on doit écrire* $''70,50''$ *et non* $''70.50''$.

Etape 2. Réalisation de l'estimation sous SPSS (partie 1). Sélectionnez sur la barre de menu

Analyse → Comparer les moyennes → Test T pour échantillon unique (Voir Figure 1.3).

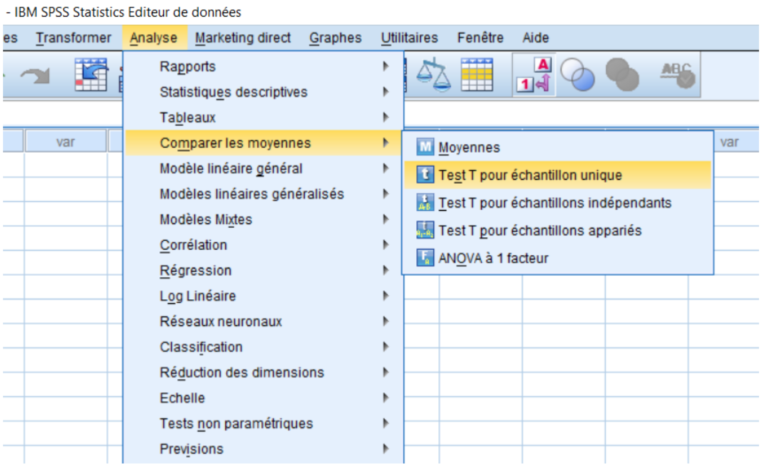


FIGURE 1.3: *Sélection de la méthode d'estimation par IC sous SPSS.*

Etape 3. En cliquant sur " **Test T pour échantillon unique**" (voir Etape 2) une fenêtre sera affichée dont la forme est présentée dans la figure 1.4 à gauche. Alors il faut suivre ce qui suit :

1. Mettez la variable **Taille enfant** dans la case "**Variables à tester"**.
2. Vérifiez dans la case "**Valeur de test"** qu'elle est égale à 0.
3. Cliquez sur "**option"** une fenêtre va s'ouvrir (voir Figure 1.4 à droite).
4. Choisissez le niveau de confiance, par exemple dans la question 2, on a le risque $\alpha = 5\%$, donc le niveau de confiance égale à $1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0.95$ (95%).
5. Cliquez sur "**poursuivre"**.
6. Cliquez sur "**OK"** pour afficher les résultats.

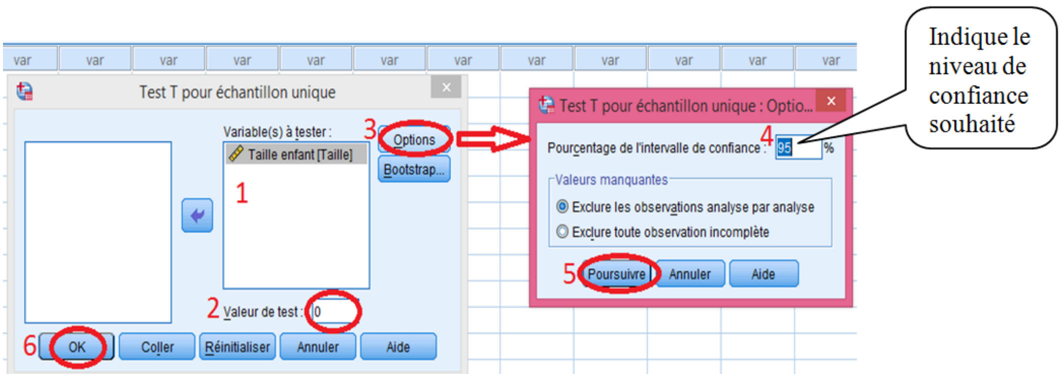
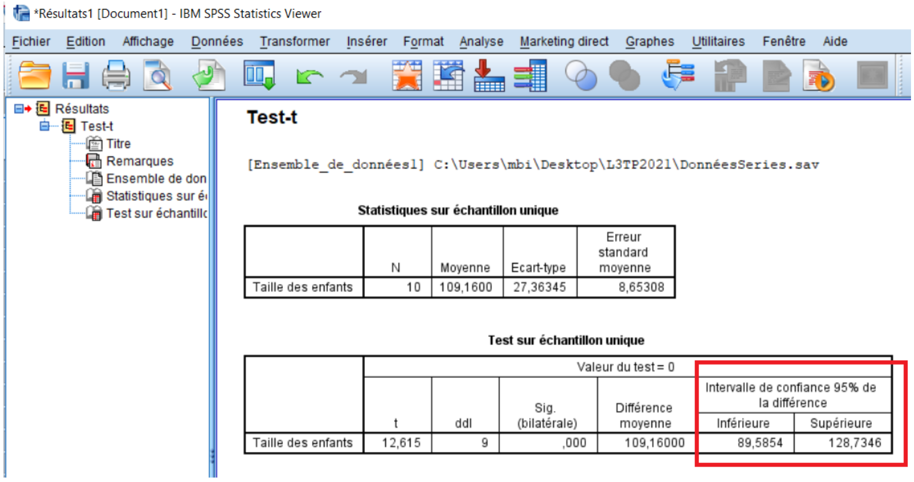


FIGURE 1.4: *Sélection de la variable à traiter et le seuil de confiance.*

Etape 4. Résultats : L'application des trois étapes précédentes sans erreurs sur les données de l'exemple permet d'obtenir les résultats (2 tableaux) qui sont présentés dans la Figure 1.5. Ces résultats contiennent des réponses sur la questions 1 (tableau 1) et la question 2 (tableau 2).

Etape 5. Interprétation des résultats :

Le premier tableau fourni :



Statistiques sur échantillon unique

	N	Moyenne	Ecart-type	Erreur standard moyenne
Taille des enfants	10	109,1600	27,36345	8,65308

Test sur échantillon unique

	Valeur du test = 0					
					Intervalle de confiance 95% de la différence	
	t	ddl	Sig. (bilatérale)	Différence moyenne	Inférieure	Supérieure
Taille des enfants	12,615	9	,000	109,16000	89,5854	128,7346

FIGURE 1.5: *Fenêtre d'affichage des résultats de l'estimation sous SPSS.*

- La taille de l'échantillon : $N = 10$.
- Une estimation ponctuelle de la taille moyenne des enfants : $\hat{\mu} = \overline{X} = 109.16\ cm$.
- Une estimation ponctuelle de l'écart-type : $\hat{\sigma}_c = \sqrt{\hat{\sigma}_c^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = 27.36345$ cm.
- Une estimation ponctuelle pour l'erreur standard moyenne : $\frac{\hat{\sigma}_c}{\sqrt{n}} = 8.65308\ cm$.

Pour le deuxième tableau, l'information cruciale dans ce tableau, pour l'objectif de notre exemple, est la colonne intitulée "**Intervalle de confiance 95% de la différence"** qui représente l'intervalle de confiance de niveau 95% de la taille moyenne des enfants (les bornes inférieure et supérieure de cet intervalle), d'où :

$$IC_{95\%}(\mu) = [89.5854, 128.7346].$$

Remarque 1.2 *Pour répondre à la question 3 de l'exemple, c'est-à-dire pour obtenir un intervalle de confiance de la taille moyenne des enfants au risque $\alpha = 1\%$, il suffit de suivre les mêmes étapes précédentes avec le changement du seuil de confiance au niveau de l'étape 3, dans ce cas, il est égale à 99% (voir figure 1.4). L'intervalle de confiance de la taille moyenne des enfants est donné cette fois-ci comme suite :*

$$IC_{99\%}(\mu) = [81.0389, 137.2811].$$

Test sur échantillon unique

	Valeur du test = 0					
					Intervalle de confiance 99% de la différence	
	t	ddl	Sig. (bilatérale)	Différence moyenne	Inférieure	Supérieure
Taille enfant	12,615	9	,000	109,16000	81,0389	137,2811

FIGURE 1.6: *Intervalle de confiance de la taille moyenne des enfants au risque $\alpha = 1\%$.*

Chapitre 2

Tests d'hypothèses

Introduction

Les tests de conformité statistiques constituent une approche décisionnelle de la statistique inférentielle. Un tel test a pour objet de décider sur la base d'un échantillon si une caractéristique de la loi mère (ou de la population) répond ou non à une certaine spécification que l'on appelle hypothèse, par exemple : on désir savoir si la moyenne d'une loi est significativement supérieure à 10.

Dans ce chapitre, dans un premier lieu nous allons présenter les notions de base nécessaires pour la compréhension d'un test statistique et ces différents types. Par la suite nous nous intéressons à la mise en œuvre du test de conformité et d'homogénéité de moyennes de Student sous SPSS.

2.1 Principe d'un test statistique

Les tests d'hypothèses sont des outils statistiques d'aide à la décision. Ils vont permettre de comparer un ou plusieurs échantillons, et de valider ou d'invalider une hypothèse donnée avec un certain risque de se tromper. En effet, un test statistique est une mise à l'épreuve d'une hypothèse concernant une population sur la base de données fournies à partir d'un échantillon (ou plusieurs) représentatif de la population, qui permet de prendre la décision de rejeter ou de ne pas rejeter les hypothèses.

2.2 Eléments d'un test

On a vu que le principe d'un test statistique est une règle de décision qui permet, sur la base des données observées et avec des risques d'erreur déterminés, d'accepter ou de refuser une hypothèse statistique. Ça sous-entend, qu'un test statistique est constitué principalement de deux éléments à savoir : hypothèses et risque.

2.2.1 Hypothèses d'un test

Une hypothèse est l'information qu'on veut confirmer ou infirmer concernant les caractéristiques (valeurs des paramètres, forme de la distribution des observations,...) d'une population.

Le principe est de comparer la probabilité d'une hypothèse versus le contraire de cette même hypothèse. Ainsi, on distingue deux types d'hypothèses, dont une et une seule est vraie.

L'hypothèse nulle : Cette hypothèse est notée H_0, elle est l'hypothèse principale du test et qu'on considère vraie a priori.

L'hypothèse alternative : Cette hypothèse est notée H_1. C'est l'hypothèse qu'on choisisse en cas de rejet de l'hypothèse H_0. Quoi qu'on a une liberté pour le choix de cette hypothèse ça reste qu'elle doit être choisis d'une manière qu'elle soit compatible avec le problème étudie et elle soit différente de l'hypothèse H_0.

2.2.2 Risque d'un test

Dans un test statistique y a toujours des erreurs de décision c'est-à-dire on ne pourra jamais conclure avec certitude sur le rejet ou le non rejet d'une hypothèse. A cet effet, pour effectuer un test statistique, il faudra choisir un certain risque d'erreur qui décrit la probabilité de se tromper en prenant la décision retenue. Dans la pratique, on choisit un risque α qui qui reflète la probabilité de rejeter l'hypothèse H_0 alors qu'elle est vraie :

$$\alpha = P(\text{rejeter } H_0/H_0 \text{ est vraie}).$$

Remarque 2.1

- *On appelle α le seuil de risque ou niveau de signification (ou encore seuil de signification).*
- *Les valeurs usuelles de α sont* 10%, 5%, 2%, 1%, 0.1%.

2.3 Tests bilatéral et unilatéral

Avant d'appliquer tout test statistique, il s'agit de bien définir le problème posé. En effet, selon les hypothèses formulées, on appliquera soit un test bilatéral, soit un test unilatéral.

2.3.1 Test bilatéral

Un test bilatéral s'applique quand on cherchera une différence entre deux paramètres, ou entre un paramètre et une valeur donnée sans se préoccuper des détails sur le signe ou le sens de la différence.

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 \\ H_1 : \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases} .$$

2.3.2 Tests unilatéral

Un test unilatéral s'applique quand on cherchera à savoir si un paramètre est supérieur (respectivement inférieur) à un autre ou à une valeur donnée et on parlera d'un test unilatéral à droite (respectivement à gauche).

- Test unilatéral à droite : $\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 \\ H_1 : \theta_1 > \theta_2 \end{cases} .$
- Test unilatéral à gauche : $\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 \\ H_1 : \theta_1 < \theta_2 \end{cases} .$

2.4 La démarche de réalisation d'un test sous SPSS

On peut résumer la démarche d'un test sous SPSS de la manière suivante :

1. Choix des hypothèses H_0 et H_1.
2. Fixation du seuil de risque α.
3. Choix du type du test qu'on doit appliquer (selon le problème posé).
4. Exécution du test sous SPSS.
5. Interprétation des résultats : Prise de décision à l'aide de la valeur "signification (Sig)" fournie par le logiciel SPSS : rejet ou non rejet de H_0 au risque α.

2.5 Test de conformité de la moyenne sous SPSS

Il existe plusieurs types de tests paramétriques, dont l'objet est de tester certaine hypothèse relative à un ou plusieurs paramètres d'une variable aléatoire de loi spécifique, qui sont regroupés principalement en deux classes, à savoir : la classe des tests de conformité et la classe des tests d'homogénéité.

Dans cette section, nous allons s'intéresser sur le test de Student pour la conformité d'une moyenne.

2.5.1 Formulation d'un test de conformité de la moyenne

Dans ce test d'hypothèses, on veut valider l'hypothèse que la moyenne μ de la population entière diffère d'une certaine valeur μ_0, qui est déterminée par une expérience précédente ou par analogie avec une situation semblable. Par exemple, dans une certaine expérience, on veut voir si le rendement moyen d'un engrais pour la culture du blé (tonnes par hectare) est significativement supérieur à 8 tonnes/hectare. Alors, on pose les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 8, \\ H_1 : \mu > 8. \end{cases}$$

Dans le cas général, les hypothèses à tester sont de la forme suivante

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad \text{ou } (H_1 : \mu > \mu_0)\,;\, (H_1 : \mu < \mu_0)\ . \end{cases}$$

2.5.2 Test T pour la conformité de la moyenne sous SPSS

Pour expliquer les étapes à suivre dans le logiciel SPSS pour la mise en œuvre du test de conformité d'une moyenne reprenant l'exemple 1 présenté dans le chapitre précédent et on se pose dans ce qui suit :

"Au vu de l'échantillon de l'exemple 1, peut-on considérer, au seuil de risque 5%*, que la taille moyenne des enfants est significativement égale à* 110 *cm ?"*

La formulation des hypothèses du test souhaité dans cette exemple est exprimé comme suit :

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 110 \\ H_1 : \mu \neq 110 \end{cases}.$$

La procédure de validation d'une hypothèse sur la valeur de la moyenne d'une population lorsqu'on dispose d'un seul échantillon, plus précisément le test de Student pour la conformité de la moyenne, dans le logiciel SPSS, est la même procédure que celle de l'estimation par intervalle de confiance d'une moyenne c'est-à-dire "**Test T pour échantillon unique**". En effet, pour répondre aux questions de l'exemple à l'aide de logiciel SPSS, il suffit de suivre les étapes suivantes :

Etape 1. Saisie des données :

Entrez les données dans SPSS, dont nous avons une seule variable quantitative (**Tailles des enfants**) à définir dans SPSS : cliquez sur "**Affichages des variables"** puis saisissez tous ses caractéristiques : **Nom**, **Type**, **Largeur**,...), ensuite cliquez sur "**Affichage des données"** pour entrer les valeurs des variables où chaque colonne représente une variable (Voir Figure 1.2).

Etape 2. Test T pour échantillon unique sous SPSS : Sélectionnez sur la barre de menu

Analyse $\rightarrow$ Comparer les moyennes $\rightarrow$ Test T pour échantillon unique (Voir Figure 1.3).

Etape 3. En cliquant sur " **Test T pour échantillon unique**" une fenêtre sera affichée dont la forme est présentée dans la figure 2.1. Alors il faut faire ce qui suit :

1. Mettez la variable **Taille enfant** dans la case "**Variables à tester"**.
2. Mettez la valeur de μ_0 dans la case "**Valeur de test"**. Dans le cas de notre exemple, il faut mettre la valeur **110**.

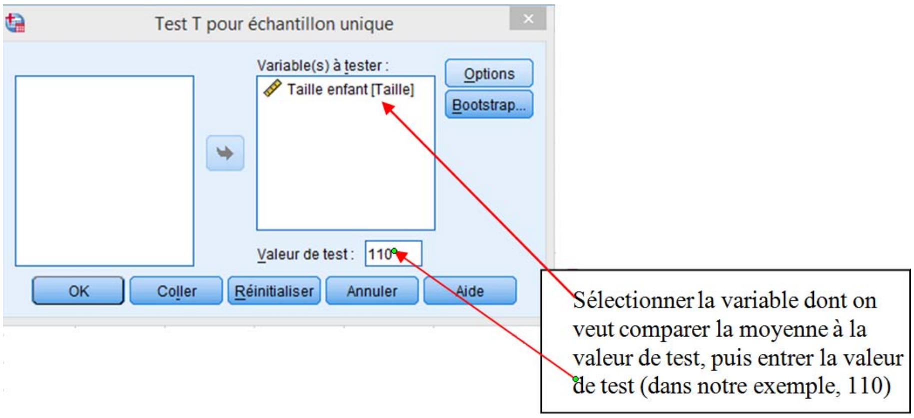
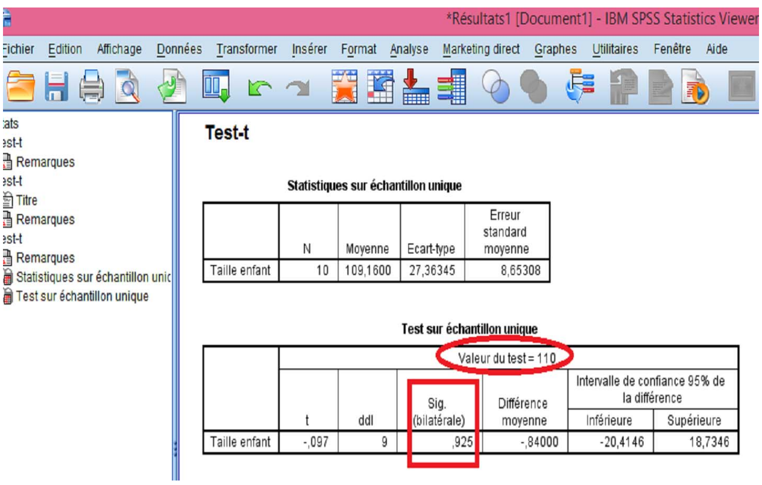


FIGURE 2.1: *Etapes de la réalisation d'un test de conformité de la moyenne sous SPSS.*

3. Une fois que les étapes 1-3 sont chevées sans erreurs, il reste à cliquez sur le boutton "**OK"** pour obtenir les résultats. Les résultas obtenus dans le cas de l'exemple considéré sont présentés dans la figure 2.6.



Statistiques sur échantillon unique

	N	Moyenne	Ecart-type	Erreur standard moyenne
Taille enfant	10	109,1600	27,36345	8,65308

Test sur échantillon unique

	Valeur du test = 110					
	t	ddl	Sig. (bilatérale)	Différence moyenne	Intervalle de confiance 95% de la différence Inférieure	Supérieure
Taille enfant	-,097	9	,925	-,84000	-20,4146	18,7346

FIGURE 2.2: *Fenêtre des résultats du test de conformité de la moyenne sous SPSS.*

Etape 4. Interprétation des Résultats : Dans le cas d'un test bilatérale ($H_1 : \mu \neq \mu_0$), afin de prendre une décision sur le rejet ou le non rejet de l'hypothèse H_0, on procède comme suit :

$$\begin{cases} \text{non rejet de } H_0 \text{ au risque } \alpha\,; & \text{si } \alpha < signification\,; \\ \text{rejet de } H_0 \text{ au risque } \alpha\,; & \text{si } \alpha \geqslant signification\,; \end{cases}.$$

A partir des résultats obtenus sur notre exemple, on constate que pour un seuil de risque $\alpha = 5\%$, qu'on ne peut pas rejeter H_0, c'est-à-dire, la taille moyenne des enfants est significativement égale à 110 cm car $\alpha < signification$ $(0.05 < 0.925)$.

Remarque 2.2 *Dans le cas d'un test unilatérale (i.e. cas $H_1 : \mu < \mu_0$ ou $H_1 : \mu > \mu_0$), afin de prendre une décision si on rejette ou non l'hypothèse H_0 on procède comme suit :*

$\trianglerighteq$ *on rejette pas H_0 si $2\alpha < signification$ (i.e. la moyenne μ est significativement égale à μ_0) ;*

$\trianglerighteq$ *on rejette H_0 si $2\alpha \geq signification$ (i.e. la moyenne μ significativement supérieur à μ_0 si $H_1 : \mu > \mu_0$ et la moyenne μ significativement inférieur à μ_0 si $H_1 : \mu < \mu_0$).*

2.6 Test d'homogénéité de deux moyennes sous SPSS

Contrairement aux tests de conformité qui sont utilisés lorsque nous désirons savoir si une caractéristique d'une population donnée correspond à une valeur fixe, les tests d'homogénéité consiste à vérifier si une caractéristique de deux ou de plusieurs populations sont semblables. Ça sous-entend qu'on ne peut parler sur les tests d'homogénéité que lorsque nous disposons de deux échantillons indépendents ou plus (≥ 2).

Dans ce passage nous allons exposer les étapes de la mise en œuvre du test d'homogénéité de Student, pour la comparaison des moyennes de deux échantillons, sous SPSS.

2.6.1 Formulation d'un test d'homogénéité de deux moyennes

Dans ce type de tests, on veut valider l'hypothèse que la moyenne μ_1 de la première population diffère ou non de la moyenne μ_2 d'une deuxième population. Par exemple, dans une certaine expérience, on veut voir si le rendement moyen d'un engrais de `Type 1` pour la culture du blé est significativement supérieur au rendement moyen d'un engrais de `Type 2`. Dans ce cas, on devrait poser les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}.$$

Dans le cas général, les hypothèses à tester sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{ou } (H_1 : \mu_1 > \mu_2)\,;\,(H_1 : \mu_1 < \mu_2) \end{cases}.$$

2.6.2 Test T pour l'hmogénéité de moyennes sous SPSS

Pour expliquer les étapes à suivre dans le logiciel SPSS pour la mise en œuvre du test d'homogénéité de moyennes considérons l'exemple numérique suivant :

Exemple 2 *:* Afin de comparer deux types d'arbre vis-à-vis leurs hauteurs, nous avons réalisés un recueil de hauteur de quelques arbres, dont les mesures sont rangées dans le tableau suivant.

Arbre 1	23.3	24.0	24.3	24.5	25.0	25.9
Arbre 2	21.1	21.1	22.1	22.4	23.3	

Question : Supposons qu'on désir savoir si les deux types d'arbres ont la même hauteur en moyenne. Alors, pour un seuil de risque $\alpha = 2\%$, que peut-on conclure sur la hauteur moyenne des deux types d'arbres.

D'après l'énoncé de l'exemple, le test qui nous permettera de répendre à la question posé est le test d'homogéniété de moyennes de deux populations dont la formulation est :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Pour réaliser ce dernier test à l'aide du logiciel SPSS, il suffit de suivre les étapes suivantes :

Etape 1. *Introduction des données :* Les données des deux échantillons doivent être introduites comme étant une seule variable (i.e. comme étant un seul échantillon), et d'ajouter une deuxième variable qui indique le numéro de l'échantillon dont l'observation X_i provienne c'est-à-dire de transformer nos données sous forme de couple (X_i, G_i), où X_i est une observation et G_i est numéro de l'échantillon qui contient cette observation. Ainsi pour les données de notre exemple on aura ce qui suit :

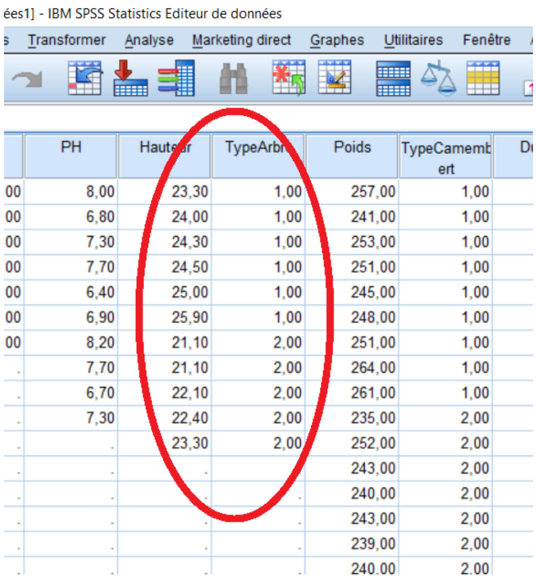


FIGURE 2.3: *Introduction des données pour le test d'homogénéité T sous SPSS.*

Etape 2. Réalisation de l'estimation sous SPSS : Sélectionnez sur la barre de menu

Analyse → Comparer les moyennes → Test T pour échantillons indépendants.

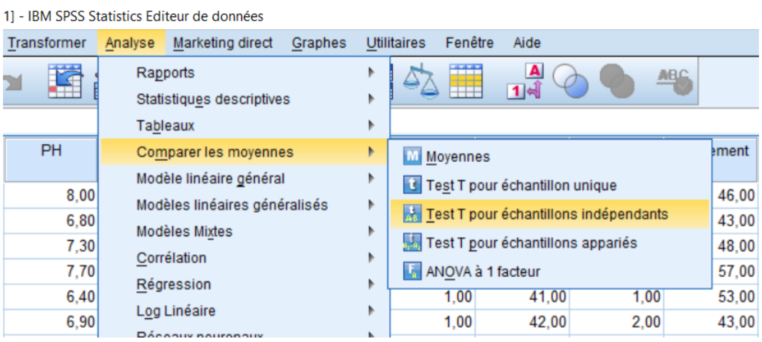


FIGURE 2.4: *Sélection du test d'homogénéité dans SPSS.*

Etape 3. En cliquant sur " **Test T pour échantillons indépendants**" une fenêtre sera affichée dont la forme est présentée dans la figure 2.5. Les taches qu'il faut effectuer sur cette fenêtre sont :

(A) Mettez la variable **Hauteur** dans la case "**Variable(s) à tester**".

(B) Mettez la variable **TypeArbre** dans la case "**Critère de regroupement qualitatif numérique**".

(C) Sélectionnez la variable **TypeArbre** est cliquez sur le bouton **Définir des groupes...** et une petite nouvelle fenêtre vas apparaitre.

(D) Au niveau des cases Groupe introduire les numéros des deux échantillons souhaité à comparer. Dans notre cas "***1***" pour l'échantillon de la hauteur de premier type d'arbre et "***2***" pour l'échantillon de la hauteur de deuxième type d'arbre.

(E) Une fois les groupes sont définis il faut cliquer sur le bouton **Poursuivre**.

(F) Il reste qu'à cliquer sur le bouton **OK** pour afficher les résultats du test.

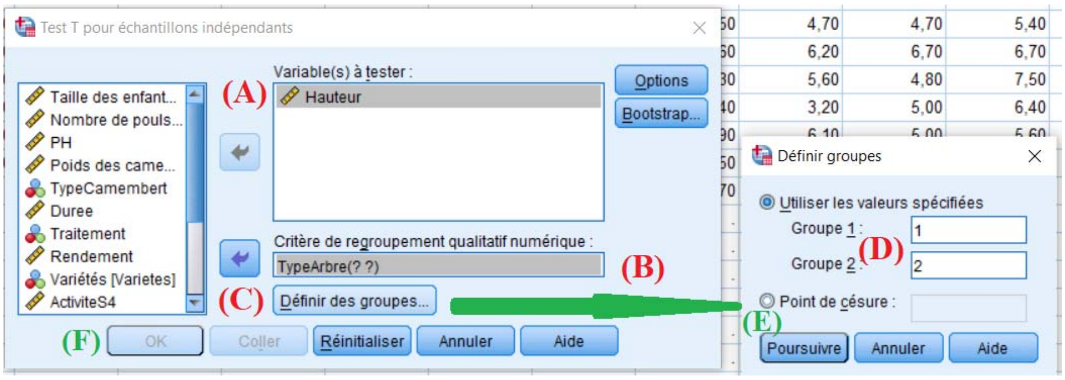


FIGURE 2.5: *Etapes de la réalisation d'un test d'homogénéité T de deux moyennes sous SPSS.*

Etape 4. Prise de décisions : Une fois que les étapes 1–3 sont chevées sans erreurs deux tableaux de résultats seront affichés dans la fenêtre d'affichage des résultats où le premier tableau résume quelques caractéristiques descriptives des deux échantillons (la taille d'échantillon, la moyenne, l'écart-type et l'erreur standard moyenne) tandis que le deuxième tableau résume les résultats associés purement au test de Student pour l'homogénéité de moyennes. Les résultats obtenus, dans le cas de l'exemple considéré, sont présentés dans la figure 2.6.

Test-t

[Ensemble_de_données1] C:\Users\mbi\Desktop\DonnéesSeries.sav

Statistiques de groupe

	TypeArbre	N	Moyenne	Ecart-type	Erreur standard moyenne
Hauteur	Arbre 1	6	24,5000	,88769	,36240
	Arbre 2	5	22,0000	,93274	,41713

Test d'échantillons indépendants

		Test de Levene sur l'égalité des variances		Test-t pour égalité des moyennes						
									Intervalle de confiance 95% de la différence	
		F	Sig.	t	ddl	Sig. (bilatérale)	Différence moyenne	Différence écart-type	Inférieure	Supérieure
Hauteur	Hypothèse de variances égales	,076	sig1= ,789	4,547	9	sig2= ,001	2,50000	,54981	1,25623	3,74377
	Hypothèse de variances inégales			4,524	8,461	sig3= ,002	2,50000	,55257	1,23775	3,76225

FIGURE 2.6: *Résultats du test d'homogénéité T de deux moyennes sous SPSS.*

Dans le cadre d'un test bilatérale (i.e. $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$) et pour un seuil de risque α, la décision sur le rejet ou non de l'hypothèse H_0 se fait selon le schéma suivant :

▷ Si $\alpha < sig_1$ alors les deux variances sont significativement égales et dans ce cas pour la décision sur les deux moyennes il faut utiliser la valeur de signification sig_2 où :

  - ⊵ on ne rejette pas H_0 si $\alpha < sig_2$ (i.e. les deux moyenne sont significativement égales).
  - ⊵ on rejette H_0 si $\alpha \geq sig_2$ (i.e. les deux moyenne sont significativement inégales).

▷ Si $\alpha \geq sig_1$ alors les deux variances sont significativement inégales (sont différentes) et dans ce cas pour la décision sur les deux moyennes il faut utiliser la valeur de signification sig_3 où :

  - ⊵ on ne rejette pas H_0 si $\alpha < sig_3$ (i.e. les deux moyenne sont significativement égales).
  - ⊵ on rejette H_0 si $\alpha \geq sig_3$ (i.e. les deux moyenne sont significativement inégales).

Ainsi, à partir des résultats obtenus sur les données de notre exemple, on déduit que les deux types d'arbres ont une variation de hauteur significativement égale par contre leurs hauteurs moyennes sont significativement différentes et ceci le fait que :

$$\alpha = 0.05 < sig_1 = 0.789\ (\sigma_1^2 = \sigma_2^2) \text{ et } \alpha = 0.05 > sig_2 = 0.001\ (\mu_1 = \mu_2).$$

Remarque 2.3 *Dans le cadre d'un test* ***unilatérale*** *(i.e. $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ ou $H_1 : \mu_1 > \mu_2$), pour un seuil de risque α la décision sur le rejet ou non de l'hypothèse H_0 se fait comme suit :*

▷ *Si $\alpha < sig_1$ alors les deux variances sont significativement égales et dans ce cas pour la décision sur les deux moyennes, il faut utiliser la valeur de signification sig_2 où :*

  - ⊵ *on ne rejette pas H_0 si $2\alpha < sig_2$ (i.e. les deux moyenne sont significativement égales).*
  - ⊵ *on rejette H_0 si $2\alpha \geq sig_2$ (i.e. $\mu_1 < \mu_2$ si $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ ou $\mu_1 > \mu_2$ si $H_1 : \mu_1 > \mu_2$).*

▷ *Si $\alpha \geq sig_1$ alors les deux variances sont significativement inégales (sont différentes) et dans ce cas pour la décision sur les deux moyennes, il faut utiliser la valeur de signification sig_3 où :*

  - ⊵ *on ne rejette pas H_0 si $2\alpha < sig_3$ (i.e. les deux moyenne sont significativement égales).*
  - ⊵ *on rejette H_0 si $2\alpha \geq sig_3$ (i.e. $\mu_1 < \mu_2$ si $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ ou $\mu_1 > \mu_2$ si $H_1 : \mu_1 > \mu_2$).*

Chapitre 3

L'analyse de la variance à 1 facteur sous SPSS

Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter dans un premier lieu les principales étapes à suivre pour réaliser une analyse de la variance à un seul facteur à l'aide du logiciel SPSS. Par la suite, nous allons intéresser aux étapes de vérification de homocédasticité (égalité de variances) et de détermination des sous-ensembles homogènes lorsque le facteur à un effet significatif sur la variable quantitative analysée. De plus, pour que les étapes en question soient compréhensibles nous allons les illustrer à travers d'un exemple d'application.

Avant de présenter les étapes à suivre pour réaliser une ANOVA à 1 facteur sous SPSS, rappelons d'abord que les hypothèses (H_0 et H_1) à tester sont comme suit :

$$H_0 : {}''\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_p = \mu'' \text{ contre } H_1 : {}''\exists\ i, j \in \{1, 2, .., p\} \text{ tel que } \mu_i \neq \mu_j;'' ,$$

avec p est le nombre d'échantillons dont on dispose.

Remarque 3.1 *Pour plus de détails sur la méthode ANOVA 1, le lecteur peut se référer au polycopié du cours disponible sur la plateforme de Moodle.*

Exemple 3 *Nous souhaitons comparer quatre traitements, notés A, B, C et D. Nous répartissons par tirage au sort les patients, et nous leur affectons l'un des quatre traitements. Nous mesurons sur chaque patient la durée, en jours, séparant de la prochaine crise d'asthme. Les mesures sont reportées dans le tableau ci-dessous :*

Traitement A	*Traitement B*	*Traitement C*	*Traitement D*
36 ; 37 ; 35 ; 38 ; 41	*42 ; 38 ; 39 ; 42 ; 44*	*26 ; 26 ; 30 38 ; 34*	*42 ; 45 ; 50 ; 56 ; 58*

Pouvons-nous conclure, à un seuil de risque α, que le facteur traitement a une influence sur la durée séparant la prochaine crise d'asthme ? Dans le cas affirmatif, quels sont les traitements qui ont le même impact sur la durée moyenne entre deux crises d'asthme ?

3.1 ANOVA à seul facteur sous SPSS

La méthode de l'ANOVA à 1 facteur se réalise sous le logiciel SPSS en générale en effectuant les étapes suivantes :

Étape 1. *Introduction des données :* les différents échantillons doivent être introduit comme étant une seule variable (un seul échantillon), et d'ajouter une deuxième variable qui indique le numéro de l'échantillon dont l'observation X_i provienne c'est-à-dire de transformer nos données sous forme de couple (X_i, G_i), où X_i est une observation et G_i est numéro de l'échantillon qui contient cette observation. Ainsi pour les données de notre exemple on aura ce qui suit :

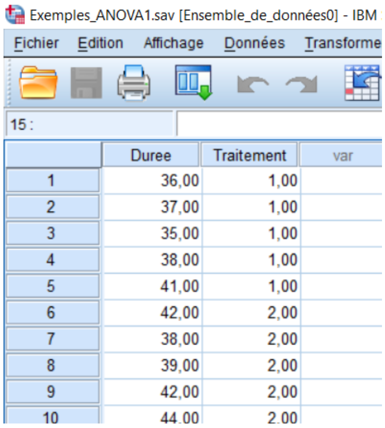


FIGURE 3.1: *Introduction des données Pour une ANOVA à une facteur sous SPSS.*

Étape 2 *Trouvez ANOVA à 1 facteur dans SPSS :* Pour localiser la méthode ANOVA à 1 facteur, dans le logiciel SPSS, il suffit de parcourir sur la barre de menu

Analyse → Comparer les moyennes → ANOVA à 1 facteur (voir figure 3.2).

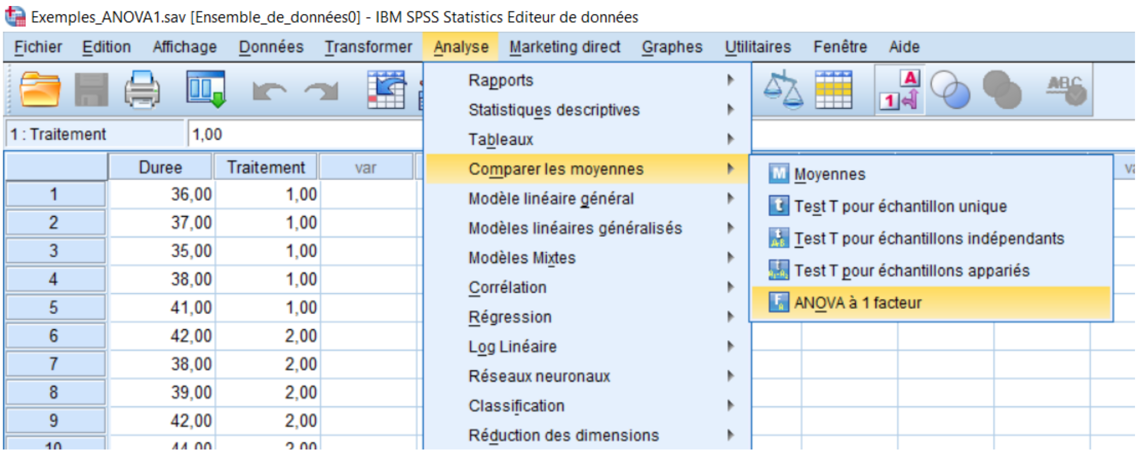


FIGURE 3.2: *Retrouver ANOVA à 1 facteur dans le logiciel SPSS.*

Étape 3 *Affectation des variables :* en cliquant sur " *ANOVA à 1 facteur*" (voir Etape 2) une fenêtre sera affichée dont la forme est présentée dans la figure 3.3 à gauche. Cette fenêtre contient trois espaces réservés pour les variables où :

La case A : Dans cette case on trouve la totalité des variables déclarées (dans notre exemple on n'a que deux variables, à savoir : la variable "Durée" et la variable "Traitement").

La case B : Cette espace est réservé pour la variable quantitative que nous désirons analyser. Dans notre exemple ça correspond à la variable "Durée".

La case C : Cette dernière case est réservée pour la variable qualitative (le facteur) qui indique le regroupement des observations. Dans notre exemple cette case est réservé à la variable de regroupement G_i c'est-à-dire à la variable "Traitement".

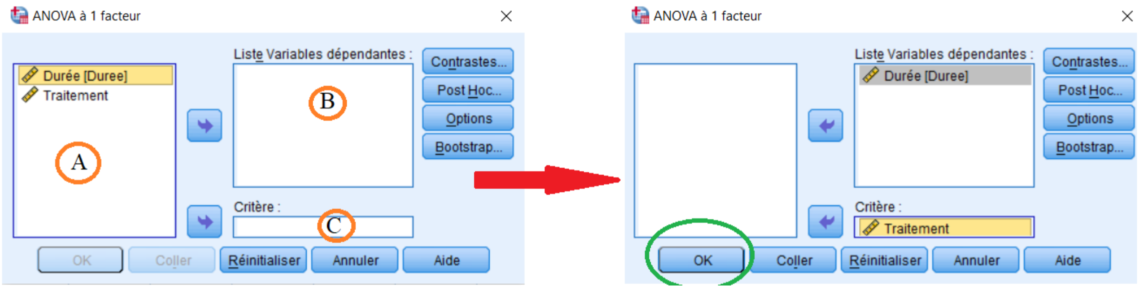


FIGURE 3.3: *Listes des variables et affectation des variables*

Étape 4 *Résultats : Résultats :* Une fois que l'étape 3 est achevée, il suffit de cliquer sur le Bouton "***OK***" (voir figure 3.3 à droite) alors dans toute une nouvelle fenêtre (fenêtre spéciale pour l'affichage des résultats) on aura les résultats de l'ANOVA à 1 facteur correspondant aux données qu'on sélectionnées dans l'étape 3. Dans le cas de notre exemple les résultats qu'on obtient sont présentés dans la figure 3.4.

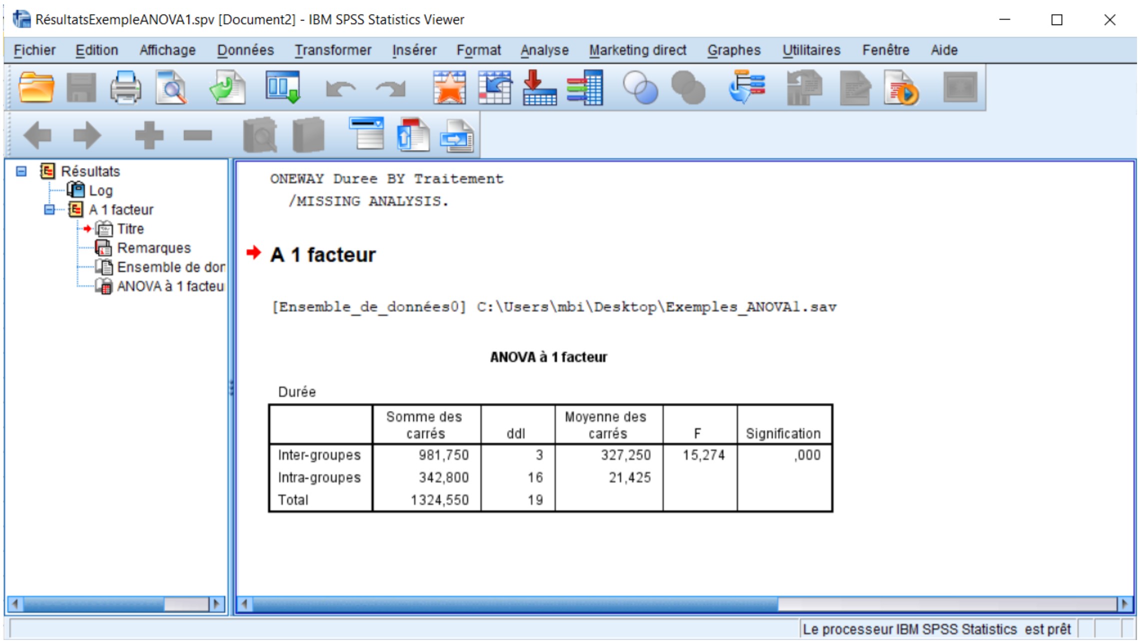


FIGURE 3.4: *Fenêtre des résultats dans SPSS*

Étape 5 *Interprétation des résultats :* Afin d'en prendre une décision si le facteur à un effet significative ou non sur la variable quantitative analysée il suffit de comparer le seuil de risque α, fixé préalablement par l'analyste, avec la valeur " signification" affichée dans la dernière colonne de la table d'ANOVA à 1 facteur où on conclut :

$$\begin{cases} \text{Le facteur n'a pas un effet significatif } (H_0), & \text{si } \alpha < signification\,; \\ \text{Le facteur a un effet significatif } (H_1), & \text{si } \alpha \geq signification\,; \end{cases}$$

Ainsi, pour notre exemple on constate que si on fixe, par exemple, le seuil de risque à $\alpha = 1\%$, le facteur traitement à un effet significatif sur la durée séparant la prochaine crise d'asthme car $\alpha > signification$.

Remarque 3.2 *Pour les détails de la table d'ANOVA à 1 facteur le lecteur peut se référer au polycopie du cours.*

3.2 ANOVA à 1 facteur : Conditions et Classes homogènes

L'ANOVA en générale et à l'ANOVA 1 facteur en particulier ne permet de détecter que si toutes les moyennes sont les mêmes (H_0) ou si y a au moins une moyenne qui est différente des autres (H_1). Dans cette dernière situation, une question s'impose :

Comment savoir et déterminer les quelles de ces moyennes qui sont différentes et les quelles qui sont homogènes ?

- ✓ Si on ne rejette pas H_0, ce qui signifier que le facteur n'a pas d'effet sur la variables quantitative analyser. Dans ce cas on peut s'arrêter car tous les populations où les échantillons ont été prélevés ont significativement les mêmes moyennes.
- ✓ Si on rejette H_0, ce qui signifier qu'il y a au moins une moyenne qui est différente des autres. Dans ce cas, afin de déterminer les classes homogènes on dispose de plusieurs et différents tests (tests de comparaison multiples) tels : le test de Bonferroni, le test de Tukey, le test de Dunnett, le test de Sidak, le test de Scheffee,...

Mais ce qu'il faut retenir est que les tests de comparaison multiples dépendent de l'homogénéité de variances des différents échantillons. En effet, les tests de comparaisons multiples sont regroupés en deux catégories, à savoir : l'ensemble des tests qui sont utilisés sous l'hypothèse d'homogénéité de variances (exemple : Bonferroni, Tukey,...) et l'ensemble des tests qui sont utilisés sous l'hypothèse de variances inégales (exemple : T2 de Tamhan, C de Dunnett,...). Par conséquent, avant de procéder aux comparaisons multiples des moyennes, il est nécessaire de vérifier si les échantillons ont les mêmes variances ou non.

Ci-dessous une illustration des étapes à suivre sous SPSS pour vérifier l'hypothèse d'égalité de variances et la sélection des tests de comparaisons multiples.

3.2.1 Test d'homogénéité de variances

Reprenant les étapes 2 et 3 de l'ANOVA à 1 facteur citées précédemment dans la section 3.1 (" *sélectionner ANOVA à 1 facteur dans SPSS*" et " *Affectation des variables* ") mais avant de procéder à l'affichage des résultats c'est-à-dire avant de cliquer sur le bouton ***OK***, il faut réaliser ce qui suit :

1. sélectionner le Bouton ***Option***, qui se trouve sur la droite de la fenêtre. Une fois que qu'on clique sur ce dernier bouton, on aura une autre nouvelle fenêtre qui va apparaitre où il faut cocher la case " *Test d'homogénéité de variance*" (voir sur la figure 3.5).
2. cliquer sur le bouton ***Poursuivre***.
3. par la suite, cliquer sur le bouton ***OK*** pour afficher les résultats.

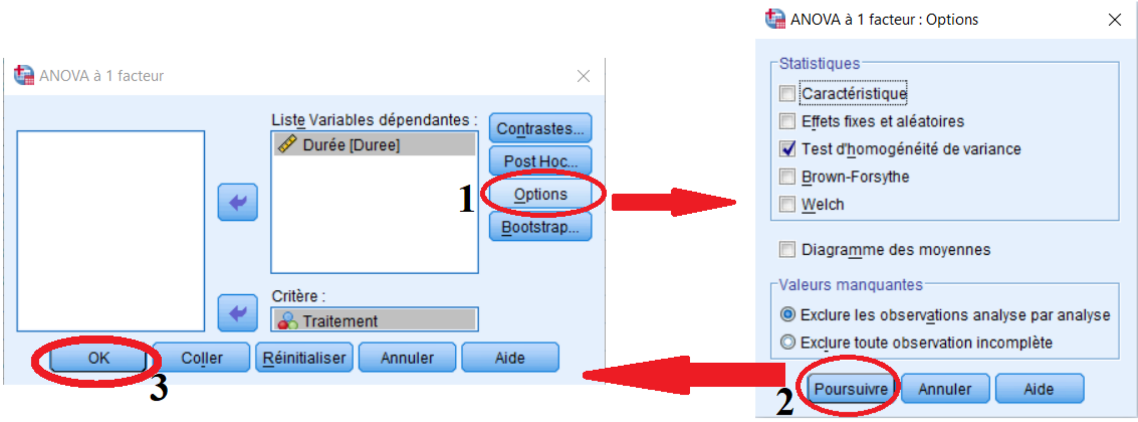


FIGURE 3.5: *Fenêtre des résultats de test d'homogénéité de variance.*

Si c'est trois étapes ont été réalisées convenablement sur nos données présentées dans l'exemple 1, les résultats qui seront affichés doivent être comme suit :

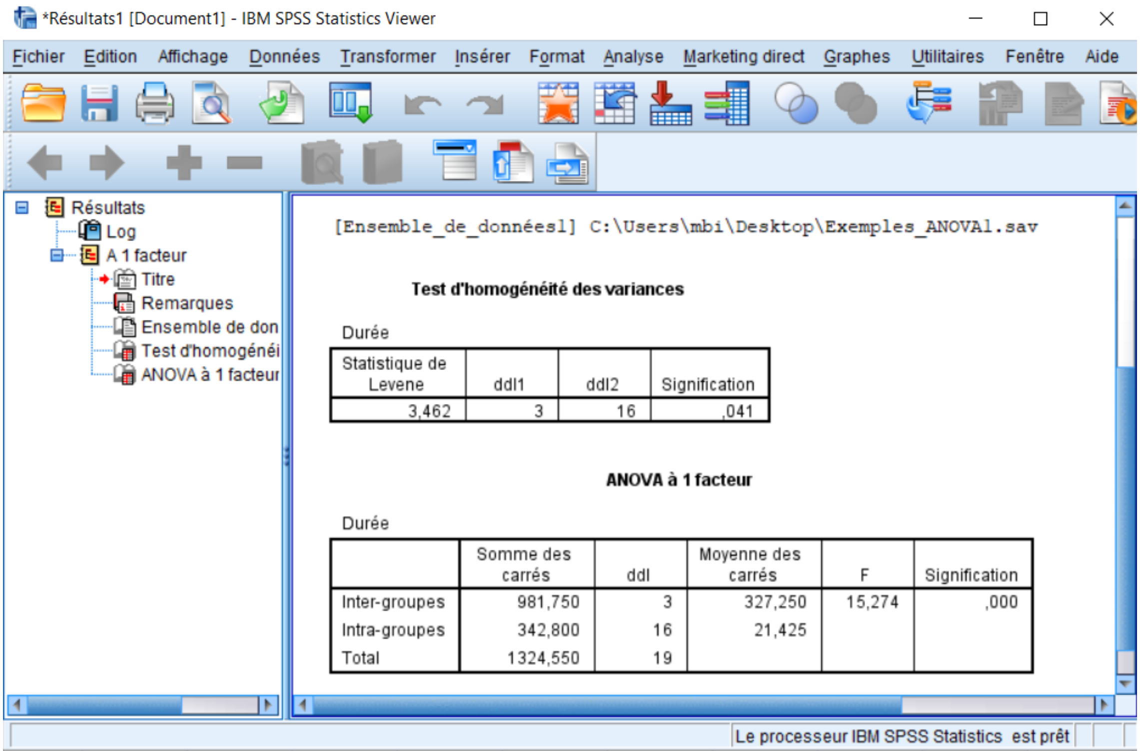


FIGURE 3.6: *Fenêtre des résultats de test d'homogénéité de variance et d'ANOVA à 1 facteur.*

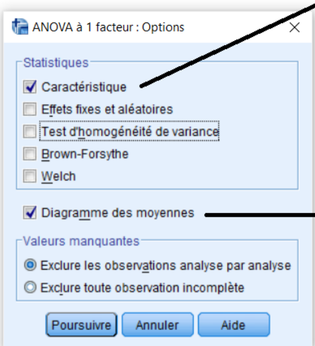
Afin de prendre une décision si les variances sont égales ou non on procède comme suit :

$$\begin{cases} Si\ \alpha < signification & \text{les variance sont égales ;} \\ Si\ \alpha \geq signification & \text{les variance sont inégales ;} \end{cases}$$

A partir des résultats obtenus sur notre exemple, on constate que pour un seuil de risque $\alpha = 5\%$, les variances sont significativement différentes car $\alpha > signification = 0.041$. Par contre, si on fixe le seuil de risque à une valeur $\alpha < 4\%$, on déduit que les variances sont égales $\alpha < signification = 0.041$.

Remarque 3.3 *Dans la fenêtre " ANOVA à 1 facteur : Options " (voir figures 3.5 et 3.7) si on coche la case " Caractéristiques " et la case " Diagramme des moyennes " on aura respective-*

ment les caractéristiques descriptives de chaque échantillons et le diagramme de la variation des moyennes d'un échantillon à un autre. Les résultats qu'on obtient sur les données notre exemple sont présentés dans la figure 3.7.



Descriptives

Durée

	N	Moyenne	Ecart-type	Erreur standard	Intervalle de confiance à 95% pour la moyenne		Minimum	Maximum
					Borne inférieure	Borne supérieure		
Traitement A	5	37,4000	2,30217	1,02956	34,5415	40,2585	35,00	41,00
Traitement B	5	41,0000	2,44949	1,09545	37,9586	44,0414	38,00	44,00
Traitement C	5	30,8000	5,21536	2,33238	24,3243	37,2757	26,00	38,00
Traitement D	5	50,2000	6,87023	3,07246	41,6695	58,7305	42,00	58,00
Total	20	39,8500	8,34944	1,86699	35,9423	43,7577	26,00	58,00

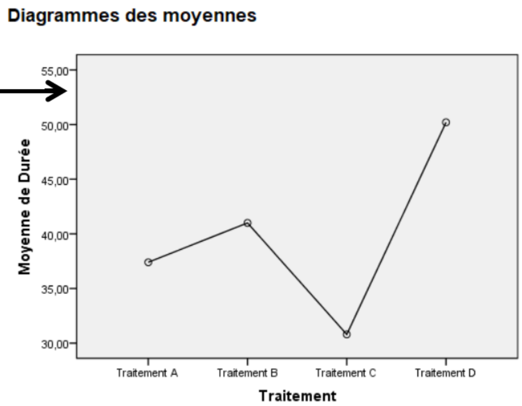


FIGURE 3.7: *Statistiques descriptives des échantillons et diagrammes des moyennes*

3.2.2 Test de comparaisons multiples (Post Hoc)

Pour réaliser le test de comparaisons multiples, on doit reprendre les étapes 2 et 3 de l'ANOVA à 1 facteur citées dans la section 3.1, mais avant de cliquer sur le bouton ***OK*** pour afficher les résultats, il faut cette fois-ci :

1. sélectionner le Bouton ***Post Hoc***. Une fois cliqué sur le bouton ***Post Hoc*** on aura une autre nouvelle fenêtre (voir figure 3.8) où cette dernière contient deux listes de tests de comparaisons multiples, à savoir : la liste des tests conditionnés par l'hypothèse de variances égales (voir 'A' dans la figure 3.8) et la liste des tests conditionnés par l'hypothèse de variances inégales (voir 'B' dans la figure 3.8). Ce qui fait, il suffit de cocher la case du test souhaité à réaliser toute en prenant en considération l'hypothèse imposée sur les variances.
2. fixer le seuil de risque α. Cette étape n'est pas obligatoire pour certains tests car leurs résultats sont indépendant de la probabilité α.
3. cliquer sur le bouton ***Poursuivre***.
4. En fin, cliqué sur le bouton ***OK*** pour afficher les résultats.

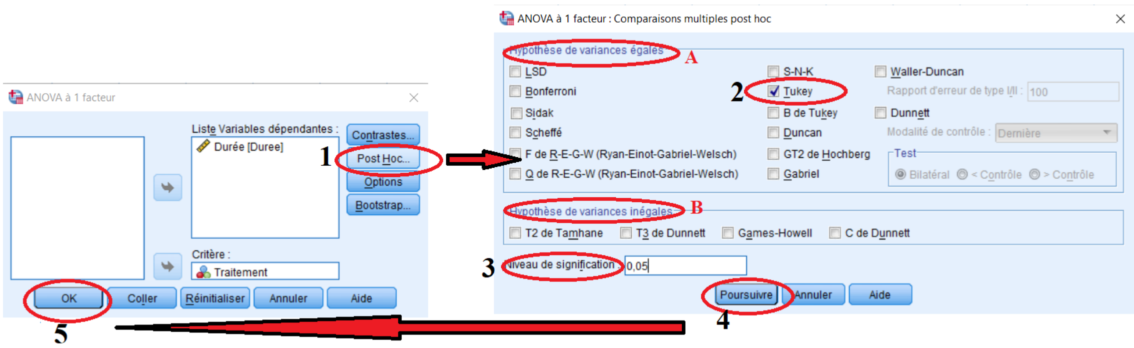


FIGURE 3.8: *Sélection d'un test de comparaisons multiples dans SPSS.*

Si on opte pour le test de comparaisons multiples de Tukey et un seuil de risque $\alpha = 5\%$ les résultats qu'on obtient qui serons affichés pour les données de notre exemple d'application sont présentés dans la figure 3.9.

Tests post hoc

Comparaisons multiples

Variable dépendante: Durée
Test de Tukey

(I) Traitement	(J) Traitement	Différence de moyennes (I-J)	Erreur standard	Signification	Intervalle de confiance à 95% Borne inférieure	Intervalle de confiance à 95% Borne supérieure
Traitement A	Traitement B	-3,60000	2,92746	,618	-11,9755	4,7755
	Traitement C	6,60000	2,92746	,151	-1,7755	14,9755
	Traitement D	-12,80000*	2,92746	,002	-21,1755	-4,4245
Traitement B	Traitement A	3,60000	2,92746	,618	-4,7755	11,9755
	Traitement C	10,20000*	2,92746	,015	1,8245	18,5755
	Traitement D	-9,20000*	2,92746	,029	-17,5755	-,8245
Traitement C	Traitement A	-6,60000	2,92746	,151	-14,9755	1,7755
	Traitement B	-10,20000*	2,92746	,015	-18,5755	-1,8245
	Traitement D	-19,40000*	2,92746	,000	-27,7755	-11,0245
Traitement D	Traitement A	12,80000*	2,92746	,002	4,4245	21,1755
	Traitement B	9,20000*	2,92746	,029	,8245	17,5755
	Traitement C	19,40000*	2,92746	,000	11,0245	27,7755

*. La différence moyenne est significative au niveau 0.05.

Sous-ensembles homogènes

Durée

Test de Tukey[a]

Traitement	N	Sous-ensemble pour alpha = 0.05: 1	2	3
Traitement C	5	30,8000		
Traitement A	5	37,4000	37,4000	
Traitement B	5		41,0000	
Traitement D	5			50,2000
Signification		,151	,618	1,000

Les moyennes des groupes des sous-ensembles homogènes sont affichées.

a. Utilise la taille d'échantillon de la moyenne harmonique = 5,000.

FIGURE 3.9: *Illustration des sous-ensembles homogènes fournis par le de Tukey.*

D'après le tableau "*sous-ensembles homogènes*" (voir figure 3.9 à droite), on remarque que pour un seuil de risque $\alpha = 5\%$, il existe trois sous-ensembles qui sont significativement homogènes, à savoir :

Sous-ensemble 1 : Traitement C et Traitement A ($\mu_C = \mu_A$).
Sous-ensemble 2 : Traitement A et Traitement B ($\mu_A = \mu_B$).
Sous-ensemble 3 : Traitement D.

On constate également que le *Traitement A* appartient à la fois au premier sous-ensemble et au deuxième sous-ensemble. Enfin, l'illustration graphique de ces sous-ensembles peut être schématisée comme suit :

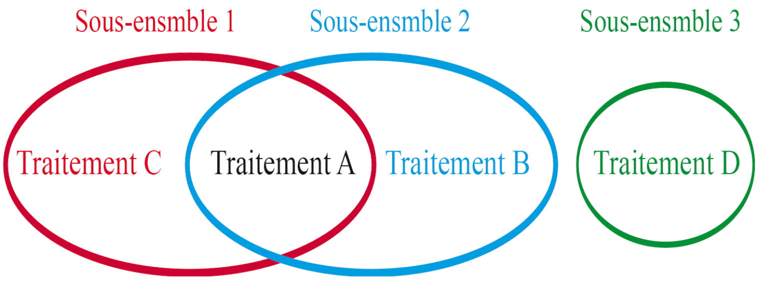


FIGURE 3.10: *Résultats du test de comparaisons multiples de Tukey*

Il est à signaler que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_C = \mu_A \\ \mu_A = \mu_B \end{array} \right. \not\Rightarrow \mu_C = \mu_B \ ,$$

car ce n'est pas une comparaison purement mathématique.