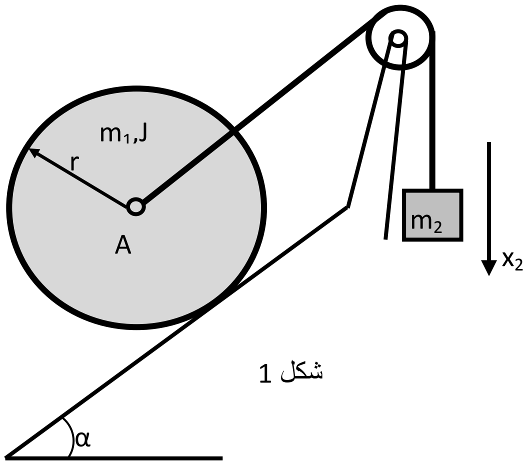
# تمارين للمرجعة الميكانيك

## التمرين الأول



شكل 1

عجلة كتلتها $m_1$ وعزم قصورها الذاتي $J$، تتدحرج بدون انزلاق علي مستوى مائل بواسطة حبل يمر علي بكرة مهملة الكتلة و تتصل بالكتلة $m_2$ (شكل-1-)
باستعمال مبدأ دالمبار احسب التسارع الكتلة 2
الحل بتطبيق مبدأ دلمبار

## حل التمرين

$$(F - m\ddot{x}_2)\delta x_2 + (m_1 g\sin(\alpha) - m_1\ddot{x}_1)\delta x1 + (0 - J\varepsilon)\delta\alpha = 0 \quad (1)$$

لدينا القوي الفعالة $mg\sin(\alpha)$

$F = m_2 g$

كذاك طول الخيط مساويا $x_1 + x_2 = l$ ( 2 )

$$\delta x_1 + \delta x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta x_1 = -\delta x_2 \quad , \quad \ddot{x_1} = -\ddot{x_2} \quad (3)$$

$$x_1 = r\varphi \quad \Rightarrow \delta\varphi = -\frac{\delta x_2}{r} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{\ddot{x}_2}{r} \qquad (4)$$

بتعويض قيم لمعادلات 2.3.4 في 1 نجد

$$(m_2 g - m_2\ddot{x_2})\delta x_2 + (m_1 g\sin(\alpha) - m_1\ddot{x_1})\delta x_1 + (0 - J\varepsilon)\delta\varphi = 0$$

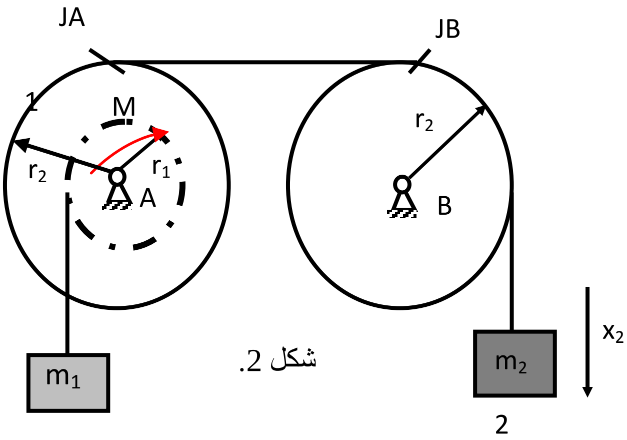
$$(m_2 g - m_2\ddot{x_2})\delta x_2 + \big(m_1 g\sin(\alpha) - m(-x_2)\big)(-\delta x_2) + \left(0 - J\left(-\frac{\ddot{x}_2}{r}\right)\right)(-\delta\frac{x_2}{r})$$

$$\delta x_2 \neq 0$$

$$(m_2 g - m\ddot{x_2}) + \big(-m_1 g\sin(\alpha) - m_1(x_2)\big) + \left(0 - J\left(\frac{\ddot{x}_2}{r}\right)\right)(\frac{x_2}{r})$$

$$m_2 g - m_1 g\sin(\alpha) = \ddot{x_2}(m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2})$$

$$x = \frac{m_2 g - m_1 g\sin(\alpha)}{m_2 + m_1 + \frac{J}{r^2}}$$




شكل 2.

# التمرين الثاني

يتم توصيل اثنين من الطبول عن طريق حبل الفك وحمل كتل من الأوزان $m_1g$ و $m_2g$ (الشكل -2-). يتم تشغيل Drum 1 لحظة $M_0$. حدد تسارع الكتلة 2 باستخدام مبدأ دالمبرت. إهمال كتلة الحبال.

# حل التمرين الثاني

$$(m_2g - m_2\ddot{x}_2)\delta x_2 + (m_1g - m_1\ddot{x}_1)\delta x_1 + (0 - J\varepsilon)\delta\varphi + (M - J\varepsilon)\delta\varphi = 0$$

$$x_1 + x_2 + l + 2\pi r = 0 \quad , \qquad \delta x_1 + \delta x_2 = 0 \quad \Rightarrow \delta x_1 = -\delta x_2$$

$$v_1 = r_1\dot{\varphi}$$

$$\acute{v}_2 = r_2\dot{\varphi}$$

$$\frac{v_1}{r_1} = \frac{\acute{v}_2}{r_2} \qquad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{r_1}{r_2}\acute{v}_2$$

$$\delta x_1 = \frac{r_1}{r_2}\delta x_2 \qquad {\scriptstyle \delta x_1 = -\delta x_2}$$

$$\delta x_1 = -\frac{r_1}{r_2}\delta x_2$$

$$\acute{v}_2 = r_2\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \delta x_2 = r_2\delta\varphi$$

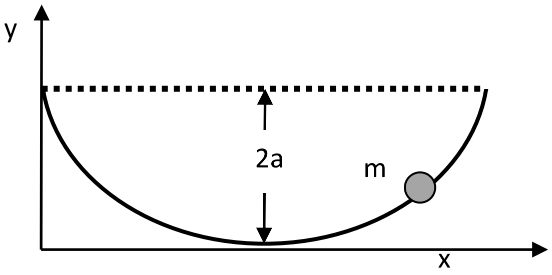
$$(m_2g - m_2\ddot{x}_2)\delta x_2 + \left(m_1g - m_1(-\frac{r_1}{r_2}\ddot{x}_2)\right)(-\frac{r_1}{r_2}\delta x_2) + \left(0 - J(\frac{\ddot{x}_2}{r_2})\right)(\frac{\delta x_2}{r_2})$$
$$+ \left(M - J(\frac{\ddot{x}_2}{r_2})\right)(\frac{\delta x_2}{r_2}) = 0$$

$$m_2g - m_1g\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + \frac{M}{r_2} - m_2\ddot{x}_2 - m_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\ddot{x}_2 - \frac{J_A}{r_2^2}\ddot{x}_2 - \frac{J_B}{r_2^2}\ddot{x}_2 = 0$$

$$m_2g - m_1g(\frac{r_1}{r_2}) + \frac{M}{r_2} = \left((m_2 + m_1(\frac{r_1}{r_2})^2 + \frac{J_A}{r_2^2} + \frac{J_B}{r_2^2}\right)\ddot{x}_2$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_2g - m_1g(\frac{r_1}{r_2}) + \frac{M}{m_2gr_2}}{m_2 + m_1(\frac{r_1}{r_2})^2 + \frac{J_A}{r_2^2} + \frac{J_B}{r_2^2}}$$

# التمرين الثالث




شكل 3.

تتحرك نقطة مادية كتلتها m دون احتكاك علي مسار دائري بالمعادلة $x = a(\varphi - \sin(\varphi))$ ، $y = a(1 + \cos(\varphi))$ (with $0 \le \varphi \le 2\pi$).

حدد

(أ) لاكرانج ، و (ب) معادلة الحركة. (ج) حل معادلة الحركة

# حل التمرين الثالث

معادلة السيكلويدا تعطى بالعلاقة

$$x = a(\varphi - \sin(\varphi)) \quad , y = a(1 + \cos(\varphi)) \quad (1)$$

حيث $0 \le \varphi \le 2\pi$

الطاقة الحركية هي

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \qquad (2)$$

$$\dot{x} = a(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}\cos(\varphi)) = a(1 - \cos(\varphi))\dot{\varphi} \,,$$

$$\dot{y} = a(-\dot{\varphi}\sin(\varphi)) = -a\dot{\varphi}\sin(\varphi)$$

$$T = \frac{1}{2}ma^2\{[(1 - \cos(\varphi))\dot{\varphi}]^2\} + [-(\sin(\varphi))\dot{\varphi}]^2 \quad (3)$$

الطاقة الكامنة

$$V = mgy = mga(1 + \cos(\varphi)). \quad (4)$$

بتعويض بمعادلة الطاقة الحركية و الكامنة معادلة لاكرانج تكون علي الشكل التالي

$$L = T - V = ma^2(1 - \cos(\varphi))\dot{\varphi}^2 - mga(1 + \cos(\varphi)) \quad (5)$$

نعلم أن معادلة لاكرانج هي :

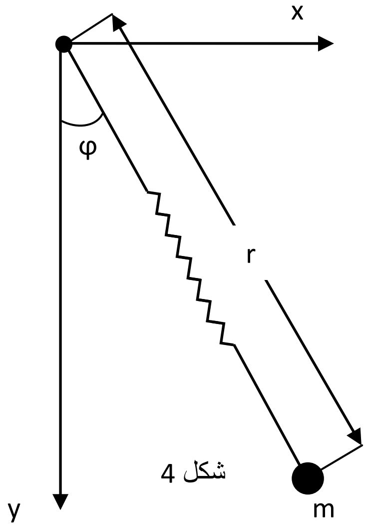
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = [2ma^2(1 - \cos(\varphi))\dot{\varphi}]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = [ma^2(\sin(\varphi))\dot{\varphi}^2 + mga\sin(\varphi)]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}[2ma^2(1-\cos(\varphi))\dot{\varphi}]$$
$$= 2ma^2[1-\cos(\varphi)]\ddot{\varphi} - 2ma^2[0-\dot{\varphi}\sin(\varphi)]\dot{\varphi}$$
$$[1-\cos(\varphi)]\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}[\sin(\varphi)]\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{2a}\sin(\varphi) = 0$$

# التمرين الثالث



شكل 4

نابض ثابتة مرونته k و طوله $r_0$ في حالة الاسترخاء ، علقت بيه كتلته m ، يتحرك تحت تأثير الجاذبية الأرضية (الشكل -4-).

# حل التمرين الثالث

لحل هذه المسالة نأخذ الإحداثيات القطبية و نصف القطر r والزاوية القطبية φ كإحداثيات معممة.

$$y = r\cos(\varphi), \quad x = r\sin(\varphi) \qquad 1$$

$$\dot{y} = \dot{r}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}\sin(\varphi), \quad \dot{x} = \dot{r}\sin(\varphi) + r\dot{\varphi}\cos(\varphi) \quad (2)$$

تكتب الطاقة الحركية علي الشكل التالي

$$= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \qquad (3)$$

النابض في حالة الارتخاء يكون طوله $r_0$ ، إذا تعطى الطاقة الكامنة بدلالة

$$V = -mgy + \frac{K}{2}(r-r_0)^2 = -mgr\cos(\varphi) + \frac{K}{2}(r-r_0)^2 \qquad (4)$$

نعوض المعادلات 5،4 في معادلة لاكرانج نحصل عليالمعادلة 6 :

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr\cos(\varphi) - \frac{K}{2}(r-r_0)^2 \quad (5)$$

يتم الحصول على معادلات حركة النظام مباشرة عبر معادلات لاكرانج::

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = -mgr\sin(\varphi)$$

هذا هو مجرد قانون الزخم الزاوي مع الإشارة إلى أصل الإحداثيات. ثم لدينا

$$mr\ddot{\varphi} = -mg\sin(\varphi) - 2m\dot{r}\dot{\varphi}$$

المصطلح الأخير على الجانب الأيمن هو قوة كوريو ليس الناجمة عن اختلاف الوقت لطول البندول r.
للتنسيق ص ، يحصل واحد

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 + mg\cos(\varphi) - k(r - r_0)$$

يمثل المصطلح الأول على الجانب الأيمن التسارع الشعاعي $\ddot{\vec{r}}$ ، المصطلح الثاني المكون لشعاعي القوة ، والفترة الأخيرة تمثل القوة المشتقة من كمون و في الأخير تظهر الحركة على أنها تراكب للاهتزازات المتناسقة في r، φ في المستوي .

# التمرين الرابع

يتحرك جسيم كتلته m دون احتكاك تحت تأثير الجاذبية، على السطح الداخلي لمسار قطع مكافئ ، معادلته علي الشكل التالي

$$x^2 + y^2 = ax.$$

(أ) تحديد معادلة لاكرانج لحركة.
(ب) تبين أن الجسيم يتحرك على دائرة أفقية في المستوى z = h ، بشرط أن يحصل على سرعة زاوية أولية. العثور على هذه السرعة الزاوية.
(ج) تبين أن الجسيم يتأرجح حول مدار دائري إذا كان قد شُرد فقط ضعيفاً. تحديد تردد التذبذب.

# حل التمرين الرابع

(أ) الإحداثيات المناسبة هي الإحداثيات الأسطوانية r، φ، z. الطاقة الحركية المعبّر عنها في الإحداثيات الأسطوانية تكون علي الشكل التالي .

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \dot{r}\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)\ 1.$$

إذا معادله لاكرانج :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{r}\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad 2\,.$$

معادلة القيد من الشكل التالي $x^2 + y^2 = ax$
لدينا $^2 + y^2 = r^2$ وكذلك $r^2 - az = 0$

نفاضل $2\delta r - a\delta z = 0$
لدينا $q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \ q_3 = z$

$$\sum_{\alpha} A_\alpha \alpha = 0 \quad 3$$

من المعادلة القيد  نجد معامل لاكرانج

$$A_1 = 2r, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -a$$

و عليه تتكون معادلة لاكرانج من الشكل

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_1 A_\alpha, \quad \alpha = 1.2.3;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 2\lambda_1 r,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

و

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = -\lambda_1 a,$$

من المعادلة 2نحصل علي :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = 2\lambda r, \quad d\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}), \qquad m\ddot{z} = -mg - \lambda_1 a,$$

معادلة القيد $2r\dot{r} - a\dot{z} = 0$ حل الجملتين نجد

$r, \varphi; \lambda_1$

ب عند

$$z = hr^2 = az \qquad\qquad r_0 = \sqrt{ah}$$

$$mz = -mg - \lambda_1 a \quad z = h$$

$$mz = -mg - \lambda_1 a$$

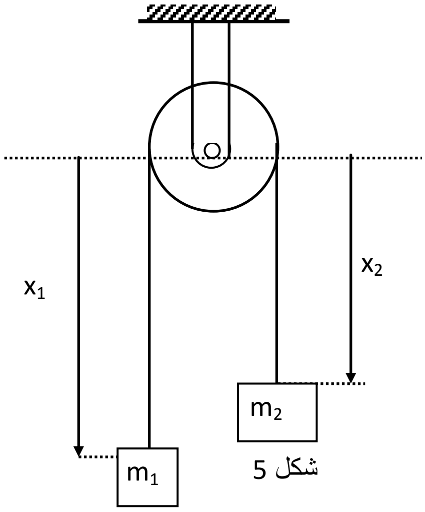
$$\lambda_1 = -\frac{mg}{a}$$

$$m(\ddot{r} - r^2 = 2\lambda_1 r \ ) \qquad r = r_0$$

$$m(-r_0\omega^2) = 2\left(-\frac{mg}{a}\right)r \quad or \quad \omega^2 = \frac{2g}{a} \ ;$$

# التمرين الخامس

تستعمل مبدأ دالمبار لاجاد معادلة الحركة للنظام الميكانيكي ماكينة أتود شكل -5-



شكل 5

# حل التمرين الخامس

نكتب علاقة لمبدأ دالمبار كالتالي:

$$(m_1 g - m_1\ddot{x}_1)\delta x_1 + (m_2 g - m_2\ddot{x}_2)\delta x_2 = 0$$

لحل هذه المسالة يجد البحث عن علاقة تربط $_1, x_2$

طول الخيط يساوي إلي

نفاضل هذه المعادلة

$$\delta x_1 + \delta x_2 = 0\,, \quad \delta x_1 = -\delta x_2$$

نعوض هذه المعادلة نجد

$$(m_1 g - m_1 \ddot{x}_1)\delta x_1 + \left(m_2 g - m_2(-\ddot{x}_1)\right)(-\delta x_1) = 0$$

و في الأخير

$$\ddot{x}_1 = g(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2})$$

طريقة ثانية باستعمال معادلات لاكرانج

الطاقة الحركية تساوي

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

الطاقة الكامنة نأخذ مرجع الطاقة من الأعلى

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_1^2 + m_1 g x_1 - m_2 g x_1$$

$$\frac{\partial l}{\partial \dot{x}} = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m_1 g - m_2 g$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_1) = m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_1 - m_1 g - m_2 g = 0$$

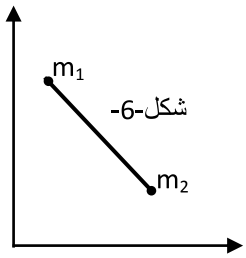
$$\ddot{x}_1 = g(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2})$$

# التمرين السادس

يتحرك جسمان كتلتهما على التوالي $m_2$،$m_1$ يصل بينهما قضيب طوله ثابت r في مستوى بحيث تكون سرعة منتصف القضيب دائما في اتجاه الخط الواصل بين الجسمين (شكل -6-)

اوجد معادلة القيد

اوجد معادلة الحركة باستعمال معادلات لاكرانج من الرتبة الأولى




# حل التمرين السادس

إحداثيات منتصف القضيب هي:

$$\vec{r} = \left[\frac{(x_1 + x_2)}{2} + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)\right]$$

و بذلك تكون سرعة منتصف القضيب هي كالتالي

$$\dot{\vec{r}} = \left(\frac{\dot{\vec{r_1}} + \dot{\vec{r_2}}}{2}\right) = \frac{(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)}{2}, \left(\frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{2}\right)$$

بما أن السرعة تقع علي امتداد الخط الواصل بين الكتلتين إذا يجب ان تحقق شرط التوازي

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \wedge (\vec{v}) = \vec{0}$$

نجد أن

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - r^2 = 0 \quad (1)$$
$$(x_2 - x_1)(\dot{y}_2 + \dot{y}_1) + (\dot{y}_2 - \dot{y}_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_1) = 0 \quad (2)$$

معادلات لاكرانج من الرتبة الأولى هي

$$m\ddot{x}_1 = -2\lambda(x_2 - x_1) - \mu(y_2 - y_1) \quad (3)$$
$$m\ddot{y}_1 = -2\lambda(y_2 - y_1) + \mu(x_2 - x_1) - mg \quad (4)$$
$$m\ddot{x}_2 = +2\lambda(x_2 - x_1) - \mu(y_2 - y_1) \quad (5)$$
$$m\ddot{y}_2 = +2\lambda(y_2 - y_1) + \mu(x_2 - x_1) - mg \quad (6)$$

6 معادلات ترافق 6 مجاهيل التي يجب تعيينها

$$x_1, y_1, x_2, y_2\ \lambda, \mu$$

من المعادلات 3،4،5 ،6 نجد

$$\lambda = -\frac{m}{2r^2}[\ddot{x}_1(x_2 - x_1) + (\ddot{y}_1 + g)(y_2 - y_1)] \quad (7)$$
$$\lambda = -\frac{m}{2r^2}[\ddot{x}_2(x_2 - x_1) + (\ddot{y}_2 + g)(y_2 - y_1)] \quad (8)$$
$$\mu = -\frac{m}{r^2}[\ddot{x}_1(y_2 - y_1) - (\ddot{y}_1 + g)(x_2 - x_1)] \quad (9)$$
$$\mu = -\frac{m}{r^2}[\ddot{x}_2(y_2 - y_1) - (\ddot{y}_2 + g)(x_2 - x_1)] \quad (10)$$

اذا

$$(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1)(x_2 - x_1) + (\ddot{y}_2 + \ddot{y}_1 + 2g)(y_2 - y_1) = 0 \qquad (11)$$
$$(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)(y_2 - y_1) - (\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1)(x_2 - x_1) = 0 \qquad (12)$$

نضع المتغير التالي:

$$u = \dot{x}_2 - \dot{x}_1, \quad v = y_2 - y_1, \quad p = \dot{x}_1 + \dot{x}_2, \quad q = \dot{y}_2 + \dot{y}_2 \quad 13$$

تكون المعادلات 1،2،12،13 علي الشكل التالي

$$u^2 + v^2 - h^2 = 0 \quad (14)$$
$$\ddot{u}v - \ddot{v}u = 0 \quad (15)$$
$$uq - vp = 0 \quad (16)$$

$$\dot{p}.u + (\dot{q} + 2g)v = 0 \quad 17$$

حل المعادلات 14،15 يكون :

$$u = x_2 - x_1 = h\cos(\omega t + \beta) \quad (18)$$
$$v = y_2 - y_1 = h\sin(\omega t + \beta) \quad (19)$$

# التمرين السابع

القضيب $AB$ متجانس كتلته $M$ و طوله $L$ متصل مفصليا مع سلك رقيق مهمل الكتلة، و طوله $l$. السلك مثبت في المفصلة $O$. المجموعة تتحرك في مستوي عمودي.

اكتب دالة لاجرنج للمجموعة

اكتب معادلة حركة المجموعة.