II.2. Régime Sinusoïdale

Lorsque la tension aux bornes d'un dipôle n'est pas continue on dit que le régime **est dépendant du temps** : à l'instant t, la tension prend une valeur que l'on note $v\ (t)$. $v\ (t)$ est donc une fonction mathématique. Si $v\ (t)$ est une fonction **périodique** ou la tension reprend les mêmes valeurs après **une période T** on dit que c'est un **régime périodique**.
Le **régime** alternatif **sinusoïdal** est un régime périodique ou les signaux périodiques possèdent une valeur moyenne nulle et décrivent une sinusoïde. Ce régime est appelé aussi **régime harmonique**.

II.4.1. Tension sinusoïdale

La forme générale d'une tension sinusoïdale est définie par l'équation :

$$v(t) = V_{max}\ \sin(\omega t + \varphi)$$

Dans laquelle :

-V_{max} est **l'amplitude** de la tension

-$(\omega t + \varphi)$ est la phase instantanée

-φ est la phase à l'origine

-ω est la pulsation $\omega = 2\pi f$, ou f est la fréquence mesurée en hertz

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Une telle tension a pour période T.

Remarque

Comme $-1 < \sin(\omega t + \varphi) < +1$ alors $-V_{max} < v(t) < +V_{max}$ on appelle tension crête à crête l'écart $V_{c\ à\ c} = 2V_{max}$

II.4.2. Valeur moyenne et efficace d'une grandeur sinusoïdale

II.4.2.1. Valeur moyenne d'une tension sinusoïdale

Soit la valeur instantanée de la tension v(t) : $v\ (t) = V_{max}\ \sin(\omega t)$

La tension moyenne se calcule selon la relation suivante sur une période T :

$$V_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T V_{max} \sin(\omega t)\, dt$$

Apres calcul **:** $\boldsymbol{V_{moy} = 0}$

II.4.2.2. Valeur efficace d'une tension sinusoïdale

La valeur efficace d'une tension sinusoïdale est définit par :

$$\mathrm{V_{eff}} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{v(t)^2}\ \mathrm{dt}}$$

$$\mathrm{V_{eff}} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} (\mathrm{V_{max}}\ \sin(\omega \mathrm{t}))^2\ \mathrm{dt}}$$

$$\mathbf{V_{eff}} = \frac{\mathbf{V_{max}}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$$

II.4.3.Diagramme de Fresnel__(voir les détails dans les séances de cours)

Pour faciliter les calculs lors de l'étude des associations de dipôles en série et en parallèle on utilise une représentation vectorielle des grandeurs sinusoïdales appelée diagramme de Fresnel.

Le diagramme de Fresnel permet de représenter graphiquement la tension *v(t)* et le courant *i(t)* par des vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{V}$ dans une base orthonormée.

Pour simplifier **on prend le courant pour référence**, la phase à l'origine est nulle. On a donc :

$$i(t) = I_{max}\ \sin(\omega t)\ = I_{eff}\sqrt{2}\ \sin(\omega t)$$

Appliquant la loi d'ohm pour les dipôles de résistance, inductance et condensateur.

Dans ce qui suit-on prend le courant comme référence :

II.4.3.1. Cas de la résistance R

La tension aux bornes d'une résistance s'écrit :

$$\boldsymbol{v(t)} = \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{i(t)} = \boldsymbol{R}\, I_{eff}\sqrt{2}\ \sin(\omega t) = V_{eff}\ \sqrt{2}\ \sin(\omega t)$$

Donc : $V_{eff} = \boldsymbol{R}\, I_{eff}$

Les deux vecteurs $\vec{V}_R$ et $\vec{I}$ sont en phase

Diagramme de Fresnel

Représentation complexe (impédance d'une résistance Z_R)

On considère $\underline{I}$ est la représentation complexe d'un courant sinusoïdale i(t) pris comme référence ayant comme expression instantanée :

$i(t) = I_{max} \ \sin(\omega t + 0)$

On peut écrire aussi :

$i(t) = \boldsymbol{I_{eff}}\sqrt{2} \ \sin(\omega t + 0)$

La loi d'ohm au bornes d'une résistance R conduit à :

$v_R(t) = \ R \ . \ i(t)$

$v_R(t) = \ R \ . \ \boldsymbol{I_{eff}}\sqrt{2} \ \sin(\omega t + 0)$

Or la forme de la valeur instantanée

$v_R(t) = \boldsymbol{V_{eff}}\sqrt{2} \ \sin(\omega t + 0)$

Par comparaison des deux expressions on peut déduire que $\boldsymbol{V_{eff} = R \, I_{eff}}$

Donc : Le courant en nombre complexe s'écrit $I = I_{eff} \ e^{j\,0}$

La tension $v_R(t)$ en nombre complexe s'écrit $v_R = R . I_{eff} \ e^{j\,0}$

L'impédance complexe Z_R d'une résistance est définit par la relation suivante :

$Z_R = \frac{U_R}{I} = \frac{R. \ I_{eff} \ e^{j\,0}}{I_{eff} \ e^{j\,0}} = R . e^{j\,0} = R . [\cos(0) + \ j \ \sin(0)]$

$$\boldsymbol{Z_R = \ R + j\ 0 = R}$$

L'impédance Z d'une résistance est un nombre réel

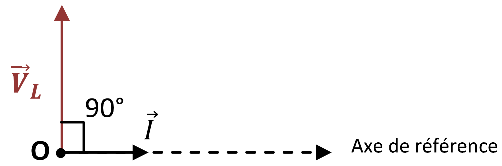
II.4.3.2. Cas de la bobine d'inductance L

$$v_L(t) = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(I_{eff}\sqrt{2} \ \sin(\omega t) \ \right) = L \, I_{eff}\sqrt{2} \, \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Pour une bobine d'inductance L, **la tension $\boldsymbol{v_L(t)}$ est en avance de 90° par rapport au courant i(t).**

Ou bien **le courant est en retard de 90°par rapport à la tension**.

Diagramme de Fresnel



$$|\vec{V_L}| = L\,\omega\,I_{eff}$$

<u>Représentation complexe (impédance d'une inductance L : Z_L)</u>

Le courant sinusoïdal i(t) pris comme référence ayant comme expression instantanée :

$i(t) = I_{max}\ \sin(\omega t + 0)$

On peut écrire aussi :

$i(t) = \boldsymbol{I_{eff}}\sqrt{2}\ \sin(\omega t + 0)$

La tension au bornes d'ohm d'une bobine d'inductance L conduit à :

$$v_L(t) = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(I_{eff}\sqrt{2}\ \sin(\omega t)\ \right) = \boldsymbol{L\omega\, I_{eff}}\sqrt{2}\ \sin\left(\omega t + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right) = \boldsymbol{V_{eff}}\sqrt{2}\ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

On peut déduire que $\boldsymbol{V_{eff} = L\omega\, I_{eff}}$

En nombre complexe on a : $I = I_{eff}\ e^{j0}$

La tension $v_L(t)$ en nombre complexe s'écrit $V_L = L\omega . I_{eff}\ e^{j\frac{\pi}{2}}$

L'impédance complexe Z_L d'une inductance est définit par la relation suivante :

$$Z_L = \frac{V_L}{I} = \frac{L\omega .\ I_{eff}\ e^{j\frac{\pi}{2}}}{I_{eff}\ e^{j0}} = L\omega . e^{j\frac{\pi}{2}} = L\omega . \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{Z_L = 0 + j\,L\omega = j\,L\omega = j\,X_L}$$

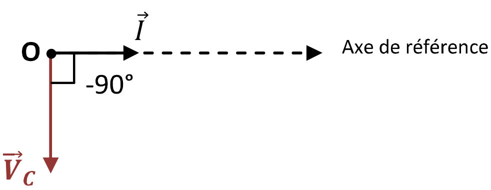
X_L est appelée **réactance inductance**

L'angle de déphasage entre la tension et le courant est de $\frac{\pi}{2}$

II.4.3.3. Cas de d'un condensateur de capacité C

$$v\,(t\,) = \frac{1}{C}\int i(t)\ dt = \frac{I_{eff}}{C\omega}\sqrt{2}\ \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Diagramme de Fresnel



$$|\vec{V_C}| = \frac{I_{eff}}{C\ \omega}$$

<u>Représentation complexe (impédance d'une capacité C : Z_C)</u>

Le courant sinusoïdal $i(t)$ pris comme référence ayant comme expression instantanée :

$i(t) = \boldsymbol{I_{eff}}\sqrt{2}\,\sin(\omega t + 0)$

La tension au bornes d'un condensateur de capacité C conduit à :

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = \frac{I_{eff}}{C\omega}\sqrt{2}\,\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_C(t) = \boldsymbol{V_{eff}}\sqrt{2}\,\sin\left(\omega t - \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\right)$$

On peut déduire que $\boldsymbol{V_{eff}} = \boldsymbol{\frac{I_{eff}}{C\omega}}$

En nombre complexe on a : $I = I_{eff}\,e^{j0}$

La tension $v_C(t)$ en nombre complexe s'écrit $V_C = \boldsymbol{\frac{I_{eff}}{C\omega}}\,e^{-j\frac{\pi}{2}}$

L'impédance complexe Z_C d'un condensateur de capacité C est définit par la relation suivante :

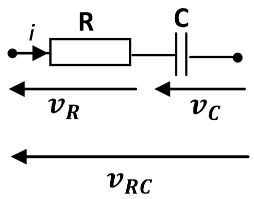
$$Z_C = \frac{V_C}{I} = \frac{\frac{I_{eff}}{C\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}}{I_{eff}\,e^{j0}} = \frac{1}{C\omega}.e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{C\omega}.\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\,\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{Z_L = 0 - j\,\frac{1}{C\omega} = -\frac{j}{C\omega} = -j\,X_C}$$

X_C est appelée **réactance** capacitive

II.4.3.4.Cas des dipôles de nature différente

<u>a. Cas d'un dipôle R-C en série</u>

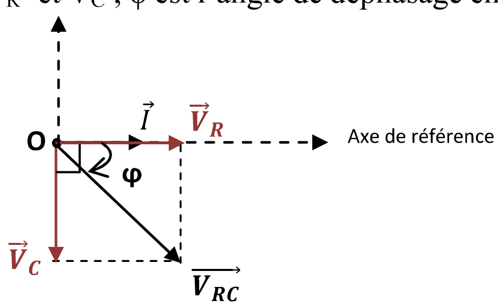


$$v_{RC}\,(t) = v_R + v_C = V_{eff\ R-C}\,.\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \varphi_{RC})$$

Le vecteur $\overrightarrow{V_{RC}}$ et la somme des vecteurs $\overrightarrow{V_R}$ et $\overrightarrow{V_C}$; φ est l'angle de déphasage entre les vecteurs $\overrightarrow{V_{RC}}$ et $\overrightarrow{I}$.

$\overrightarrow{V_{RC}} = \vec{V}_R + \vec{V}_C$

Diagramme de Fresnel



$$\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{RC\omega}\right)$$

Le module du vecteur $|\overrightarrow{V_{RC}}|$ n'est que la valeur efficace $V_{RC\ eff}$

$$V_{RCeff}^2 = \sqrt{V_R^2 + V_C^2} = \sqrt{\left(R\, I_{eff}\right)^2 + \left(\frac{I_{eff}}{C\omega}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{V_{RCeff} = I_{eff}\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

L'angle ϕ peut être déterminé :

A partir du diagramme de Fresnel : $\tan(\varphi_{RC}) = \frac{-\frac{1}{C\omega}}{R} = -\frac{1}{RC\omega}$

$$\boldsymbol{\varphi_{RC} = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{RC\omega}\right)}$$

<u>Représentation complexe (impédance d'une Charge R-C série : Z_{RC})</u>

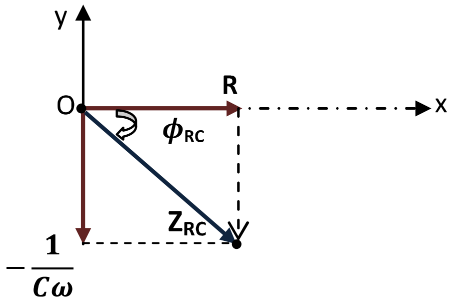
La valeur instantanée de la tension au bornes de la charge RC est définie par :

$$v_{RC}\,(t) = v_R + v_C = V_{eff\ R-C}\,.\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \varphi_{RC})$$

Cette équation en représentation complexe est définie par :

$\bar{V}_{RC} = \overline{V_R} + \overline{V_C}$

$\bar{V}_{RC} = R\, I_{eff}\, e^{j\,0} + \frac{I_{eff}}{C\omega}\, e^{-j\frac{\pi}{2}} = I_{eff}\left[R - j\,\frac{1}{C\uparrow\omega}\right] = I_{eff}\ \overline{Z_{RC}}$



<u>Impédance d'une Charge R-C série</u>

$$\overline{Z_{RC}} = \frac{\overline{V_{RC}}}{\overline{I}} = \frac{I_{eff}\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}\ e^{j\,\varphi_{RC}}}{I_{eff}\quad e^{j\,0}} = \boldsymbol{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}\quad e^{j\,\varphi_{RC}}}$$

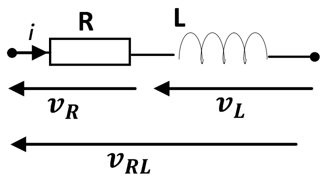
$$\boldsymbol{\overline{Z_{RC}} = \overline{Z}_R + \overline{Z_C} = R - j\,\frac{1}{C\omega}}$$

<u>b. Cas d'un dipôle R-L en série</u>

<u>Représentation vectorielle (Fresnel)</u>

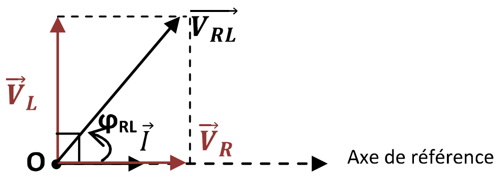
Le vecteur $\overrightarrow{V_{RL}}$ et la somme des vecteurs $\vec{V_R}$ et $\vec{V_C}$; φ_{RL} est l'angle de déphasage entre les vecteurs $\overrightarrow{V_{RL}}$ et $\vec{I}$.

$$\overrightarrow{V_{RL}} = \vec{V}_R + \vec{V}_L$$



$$v_{RL}\,(t) = v_R + v_L = V_{eff\,R-L}\,\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \varphi) \qquad (**)$$

Diagramme de Fresnel diagramme vectoriel pour la charge R-L



$$\varphi_{RL} = \tan^{-1}\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

D'après ce diagramme vectoriel on peut déterminer la valeur efficace V_{RLeff} et l'angle de déphasage φ_{RL}

$$V_{RLeff}^2 = \sqrt{V_{Reff}{}^2 + V_{L\,eff}{}^2}$$

$$V_{RLeff} = \sqrt{\left(R\,I_{eff}\right)^2 + \left(L\omega\,I_{eff}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{V_{RLeff} = I_{eff}.\sqrt{(R)^2 + (L\omega)^2}}$$

L'angle de déphasage φ_{RL}

$$\tan(\varphi_{RL}) = \frac{V_L}{V_R} = \frac{L\omega\,I_{eff}}{R\,I_{eff}} = \frac{L\omega}{R}$$

$$\boldsymbol{\varphi_{RL} = \tan^{-1}\left(\frac{L\omega}{R}\right)}$$

<u>Représentation complexe (impédance d'une Charge R-C série : Z_{RL})</u>

L'equation (**) en représentation complexe est définie par :

$$\bar{V}_{RL} = \overline{V_R} + \overline{V_L}$$

$$\overline{V_{RL}} = V_{RLeff}\ e^{j\,\varphi_{RL}}$$

<u>L'impédance complexe $\overline{Z_{RL}}$</u>

$$\overline{Z_{RL}} = \frac{\overline{V_{RL}}}{\bar{I}} = \frac{V_{RLeff}\ e^{j\,\varphi_{RL}}}{I_{eff}\ \ e^{j\,0}} = \frac{I_{eff}.\sqrt{(R)^2 + (L\omega)^2}\ \ e^{j\,\varphi_{RL}}}{I_{eff}\ \ e^{j\,0}}$$

$$\boldsymbol{\overline{Z_{RL}} = \sqrt{(R)^2 + (L\omega)^2}\,.\ e^{j\,\varphi_{RL}}}$$

$$\boldsymbol{\overline{Z_{RL}} = \overline{Z_R} + \overline{Z_L} = R + j\,L\omega}$$

<u>Les puissances en monophasée</u>

<u>Puissance active réactive et apparente</u>

C'est la puissance réellement consommée elle s'exprime **en watt (W)** selon la formule suivante :

$$\boldsymbol{P = UI\cos(\varphi)}$$

U et I sont respectivement les valeurs efficaces de la tension et du courant.

Puissance réactive et apparente

Elle s'exprime **en Voltampère réactive (var)** selon la formule suivante :

$$\boldsymbol{Q = UI\sin(\varphi)}$$

Puissance apparente

Elle s'exprime **en Voltampère (VA)** selon la formule suivante :

$$S = U\,.\,I$$

On peut conclure que quelque soit $\boldsymbol{\varphi}$ **on a :**

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

Théorème de Boucherot

Les puissances actives et réactives des dipôles d'un circuit s'additionnent :

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

Puissance active , réactive et apparente d'une résistance R pure

$\varphi = 0 \implies \cos\varphi = 1 \implies P = U\,I$ or $U = R\,I$

Donc**:** $\boldsymbol{P = R\,I^2 = \frac{U^2}{R}}$

$\varphi = 0 \implies \sin\varphi = 0 \implies \boldsymbol{Q = 0}$

Puissance active, réactive et apparente d'une bobine parfaite d'inductance L (pure)

$\varphi = \frac{\pi}{2} \implies \cos\varphi = 0 \implies \boldsymbol{P = 0}$

$\varphi = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin\varphi = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{Q = U\,I}$

U= Lω I donc $\boldsymbol{Q = L\omega\, I^2 = \frac{U^2}{L\omega}}$

Puissance active, réactive et apparente pour un condensateur de capacité C

$\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \cos\varphi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{P = 0}$

$\varphi = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin\varphi = -1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{Q = -U\,I}$

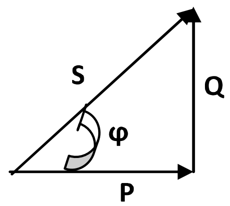
$U = \frac{I}{C\omega}$ donc $\boldsymbol{Q = -\frac{I^2}{C\omega} = -\,U^2\,C\omega}$

Triangle de puissance

La puissance apparente peut s'écrire sous forme complexe, ainsi :

$\bar{S}$ = P + j Q = $\sqrt{(P^2 + Q^2)}\, e^{j\varphi}$

$S = \sqrt{(P^2 + Q^2)} = V\,I$



$\boldsymbol{P = S\ \cos(\varphi)}$ et $\boldsymbol{Q = S\ \sin(\varphi)}$

$\boldsymbol{\tan(\varphi) = \frac{Q}{P}}$

D'où on peut écrire : $\boldsymbol{Q = P\ \tan(\varphi)}$