T.E.1

العمل والطاقة

1

ناصري أمال

1- العمل :

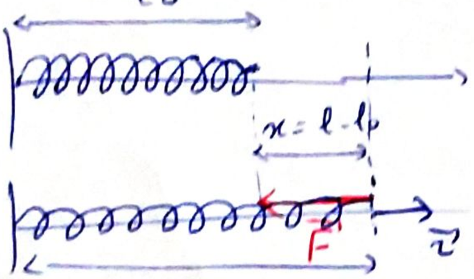
يعطى العمل العنصري للقوة $\vec{F}$ خلال انتقال عنصري $\vec{dl}$ بالعبارة

$$dW = \vec{F}\cdot\vec{dl} = F.dl\cos\alpha$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$: $dW = 0$; منفرجة θ : $dW < 0$; حادة θ : $dW > 0$

- العمل المنجز من طرف قوة $\vec{F}$ من الوضعية A إلى الوضعية B يعطى بالعلاقة

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl}\ (J)$$



مثال: عمل قوة إرجاع نابض $\vec{F} = -Kx\vec{i}$

K ثابت مرونة النابض

بوضع $x = l - l_0$ فيكون الانتقال العنصري $dl = dx$ ومنه

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_A^B -kx\,dl \ / \ \theta = 0$$

$$= -K\int_A^B x\,dx = -\frac{K}{2}x^2\Big|_{x_A}^{x_B} \Rightarrow \boxed{W_A^B = -\frac{1}{2}K(x_B^2 - x_A^2)}$$

II- الاستطاعة :

هي العمل الذي تنجزه القوة في وحدة الزمن، ويرمز لها بـ P

$$P(t) = \frac{dW}{dt} \Rightarrow P(t) = \vec{F}(t)\frac{\vec{dl}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{V}(t)$$

$$P(t) = F.V\cos\theta \quad (\text{watt})$$

III- الطاقة الحركية :

من المبدأ الأساسي للتحريك: $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt}$ بالتعويض في عبارة العمل العنصري

$$dW = m\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\vec{dl} \ / \ \vec{dl} = \vec{V}dt \ \left(\vec{V} = \frac{d\vec{l}}{dt}\right)$$

$$dW = m\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot V dt = m\vec{V}d\vec{V} = mVdV$$

باعتبار الكتلة ثابتة فإن:

$$dW = mVdV \Rightarrow dW = m\,d\left(\frac{1}{2}V^2\right)$$

② المقدار $\frac{1}{2}mV^2 = E_c$ الطاقة الحركية ويكون $dW_A^B = dE_c$ (J)

- نظرية الطاقة الحركية

$$dW_A^B = dE_c \Rightarrow W_A^B = \Delta E_c$$
$$= E_{cB} - E_{cA}.$$

$$W_A^B = \frac{1}{2}m(V_B^2 - V_A^2)$$

- القوى المحافظة والطاقة الكامنة

نقول أن القوة محافظة إذا كان عملها من نقطة A إلى نقطة B لا يتعلق بالمسار المتخذ؛ ويعطى بالعبارة $dW = -dE_p$

$$\Rightarrow W_A^B = \int_A^B dW = -\int_A^B dE_p = E_p(A) - E_p(B)$$

ونكتب:

$$(W_A^B)_c = E_p(A) - E_p(B)$$

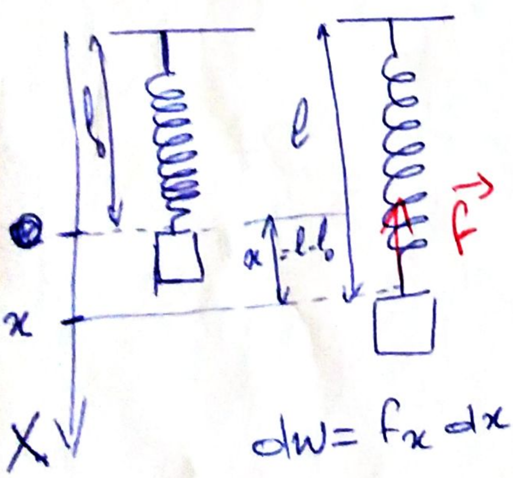
conservatif محافظة

حيث E_p الطاقة الكامنة وتقاس بـ J أو (J)

$(W_A^B)_c$: العمل للقوة المحافظة من النقطة A ← B (لا يتعلق سوى بالوضع الابتدائي والنهائي مهما كان مسار الانتقال A→B)

- الطاقة الكامنة لقوى مرونية:

ندرس حركة جسم كتلته m معلق بنابض مهمل الكتلة مقارنة مع m



نزيح الجسم مسافة x عن وضع التوازن فيبدأ النابض بالاهتزاز ويبدي قوة $\vec{F}$ تحاول إرجاع الجسم إلى الوضع الأول تسمى قوة الإرجاع وتعطى بالعبارة $F_x = -Kx$

لدينا:

$$dW = F_x\,dx = -dE_p$$
$$\Rightarrow -Kx\,dx = -dE_p \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}Kx^2 + Cst$$
$$= \frac{1}{2}K(l - l_0)^2 + Cst$$

- الطاقة الكامنة الثقالية: تخضع جميع الأجسام المادية إلى قوى تجاذب كتلي متبادل بينها من الشكل

$$\vec{F}_{12} = G\frac{M_1 M_2}{r^2}\vec{u}_r$$

وتدعى: قوة الجاذبية العامة.

ناصر أمال

T.E 2

الانتقال العنصري لكل

ملاحظة أخرى :

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p$$

$$\Rightarrow dW = -F\,dr = -dE_p \Rightarrow dE_p = F\,dr$$

$$F = F_{12} = F_{21} = G\frac{M_1M_2}{r^2}$$

$$\Rightarrow dE_p = G\frac{M_1M_2}{r^2}\,dr \Rightarrow E_p = -G\frac{M_1M_2}{r} + cst$$

$$\boxed{\int \frac{dr}{r^2} = \int r^{-2}\,dr = \frac{r^{-2+1}}{-1} = -r^{-1} = \frac{-1}{r}}$$

- العلاقة بين القوة والطاقة الكامنة :

في الاحداثيات الديكارتية

$$dE_p = -\vec{F}\cdot d\vec{l}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

التفاضل الكلي لـ E_p :

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz \quad —(1)$$

$$\Rightarrow dE_p = -(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dy) \quad —(2)$$

بمقارنة (1) و(2) نجد :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} = F_x \\ -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} = F_y \\ -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} = F_z \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p$$

ونقول أن القوة مشتقة من كمون .

- ملاحظة : لتكون $\vec{F}$ محافظة لما

$$rot\,\vec{F} = \vec{0}$$

- القوى الغير محافظة والطاقة الميكانيكية :

عمل القوة الغير محافظة يؤدي إلى ضياع في الطاقة

ونعبر عنه رياضيا بأن العمل يكون سالب وبذلك لا يمكن

كتابة العمل العنصري على شكل تفاضل تام

$$dW \to \delta W$$

$$W_A^B = \underbrace{(W_A^B)_C}_{\text{عمل القوى المحافظة}} + \underbrace{(W_A^B)_{NC}}_{\text{عمل القوى الغير محافظة}}$$

3

$$W_A^B = E_c^B - E_c^A$$

$$(W_A^B)_c = E_p(A) - E_p(B)$$

$$\Rightarrow W_A^B = E_c^B - E_c^A = (W_A^B)_c + (W_A^B)_{nc} = E_p^A - E_p^B + (W_A^B)_{nc}$$

$$\Rightarrow (W_A^B)_{nc} = (E_c^B + E_p^B) - (E_c^A + E_p^A)$$

$$= E_M^B - E_M^B = \Delta E_M$$

الطاقة الميكانيكية.

ومنه خلال الضياع في الطاقة الميكانيكية يساوي عمل القوى الغير محافظة.

<u>نص نظرية الطاقة الميكانيكية:</u>

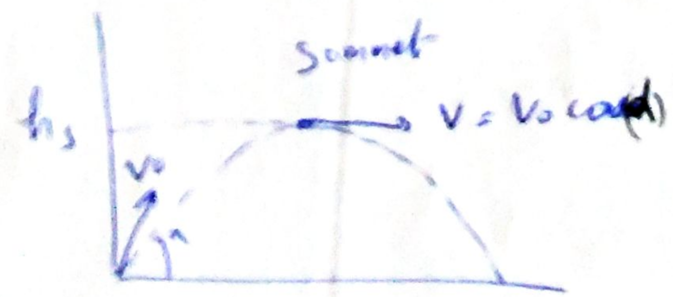
التغير في الطاقة الميكانيكية بين لحظتين t_1 و t_2 (أي نقطتين B, A) يساوي عمل محصلة القوى الغير محافظة المؤثرة على الجسم خلال انتقاله من $A \rightarrow B$.

$$E_M^B - E_M^A = (W_A^B)_{nc}$$

- في حالة كون جميع القوى المؤثرة على الجسم محافظة فإن

$$\Delta E_M = 0 \Rightarrow E_M^A = E_M^B.$$

<u>مثال:</u> قذف جسم كتلته m بزاوية α مع سطح أفقي وبسرعة إبتدائية V_0 فسقط في نفس السطح بعد مرور زمن معين. بإهمال قوى مقاومة الهواء أوجد باستعمال نظرية الطاقة الميكانيكية أعلى ارتفاع h_s يبلغه الجسم بدلالة v_0, g, α



TE3

الحل :
القوة الوحيدة المؤثرة في الجسم هي الثقل وهو قوة محافظة
وبالتالي فإن :

$$\Delta E_M (0 \to 1) = 0$$

$$E_M^0 - E_M^1 = 0 \Rightarrow E_c^0 + E_p^0 = E_c^1 + E_p^1$$

$$E_c^0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \underbrace{mgh_0}_{\text{من قوانين السقوط}} = \frac{1}{2} m (v_0 \cos\alpha)^2 + mgh_s$$

$$\Rightarrow \boxed{h_s = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$$

- شروط توازن الجسم :

نقول أن جسم متوازن إذا كان يتحرك وفق مبدأ العطالة ونقول أنه في حالة توازن سكوني إذا كان هذا الجسم ساكنا في الجملة المدروسة : $\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0}$

من جهة أخرى رأينا أن : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

- رياضيا نقول أن توازن الجسم مستقر إذا كانت المشتقة الثانية للطاقة الكامنة بالنسبة لإحداثيات الجسم موجبة

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial y^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} > 0$$

وعليه فإن ارتفاع التوازن بالنسبة للجسم ما هو إلا
النقطة التي تكون عندها قيمة الطاقة الكامنة
أصغر ما يمكن (قيمة دنيا) والذي يستقر ناحية
الطاقة الأقل قيم ممكنة أو دلالة عظمى

انتهى بالتوفيق للجميع