حل نماذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلاكس

ثانيا– حالة التخفيض:

سنحاول تبيان خطوات الحل في المثال الموالي:

مثال : ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min\ Z = 30\ x_1+24\ x_2+18\ x_3$$
$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3 \geq 80 \\ 3x_1+3x_2+3x_3 \geq 60 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2– 1– كتابة النموذج على الشكل المعياري: بما أن شكل المترجحات من نوع أصغر أو يساوي فإنه يجب طرح متغيرات الفرق Si من الطرف الأول ليصبح مساواة:

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3 - S_1 = 80 \\ 3x_1+3x_2+3x_3 - S_2 = 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

ولكن عند تشكيل الجدول الأولي وعند وضع متغيرات التي تكون في عمود الحل ، لا نستطيع وضعها، لأن المصفوفة الأحادية غير موجودة، ولذا يتم إضافة متغيرات جديدة Ai تسمى **متغيرات وهمية** مساعدة في الحل فقط، لذلك يجب أن لا تظهر في الجدول الأخير لطريقة السمبلاكس، ويتم العمل على اخراجها من الحل بتحميلها بمعامل كبير M بإشارة عكس دالة الهدف. ونضيف متغيرات الفجوة و الاصطناعية إلى دالة الهدف، بمعامل 0 لمتغيرات الفجوة و معامل M التي تمثل كمية موجبة كبيرة إلى المتغيرات الاصطناعية، أما إذا كان النموذج من نوع Max فيتم إضافة معامل $(-M)$ إلى المتغيرات الاصطناعية .

ويصبح النموذج كالتالي:

$$Min\ Z = 30\ x_1+24\ x_2+18\ x_3+0\ S_1+0\ S_2+\boldsymbol{M}\ t_1+\boldsymbol{M}\ t_2$$
$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3 - S_1+\boldsymbol{A_1} = 80 \\ 3x_1+3x_2+3x_3 - S_2+\boldsymbol{A_2} = 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ S_1, S_2 \geq 0 \\ A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

2- 2- تشكيل جدول السمبلكس الأول:

C	V	Q	30	24	18	0	0	M	M
			x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	A_1	A_2
M	A_1	80	5	2	1	-1	0	1	0
M	A_2	60	3	3	3	0	-1	0	1
$Z_j = \sum C_j x_j$ = 80 * M +60 * M Z = 140M			8M-30	5M-24	4M-18	M-	M-	0	0

2-3- أمثلية الحل:

في حالة التخفيض : لكي يكون الحل أمثل يجب أن تكون كل قيم سطر التقييم أصغر أو تساوي الصفر.

وفي مثالنا: لدينا القيم:

8M-30	5M-24	4M-18	M-	M-	0	0

نلاحظ أن هناك ثلاث قيم موجبة، وبالتالي الحل غير أمثل، مما يستدعي القيام بعملية التحسين.

2-4- خطوات عملية تحسين الحل:

أ- تحديد المتغيرة الداخلة إلى عمود الحل: المتغيرة الداخلة هي تلك المتغيرة المقابلة **لأكبر قيمة موجبة** في سطر التقييم ، و يشار إليها بسهم ودائرة خضراء في الجدول، و في مثالنا هذا هي المتغيرة x_1 ذات القيمة 8M-30 (أكبر قيمة من بين : 4M-18، 5M-24، 8M-30).

ب- تحديد المتغيرة الخارجة: يتم تحديدها في الجدول كما يلي: **كما في حالة التعظيم**

- نقوم بقسمة قيم الكميات Q (60, 80) على قيم عمود المتغيرة الداخلة (3, 5) x_1.
  كل قيمة على القيمة المقابلة لها. (5/80 و 3/60)
- فنحصل على القيم (16 ، 20). و بناءً على ذلك فإن المتغيرة الخارجة هي التي تقابل **أقل حاصل قسمة موجب**، و يشار إليها في الجدول بسهم ودائرة حمراء، و في مثالنا هذا تمثل A_1 المتغيرة الخارجة.

ج- تحديد عنصر الارتكاز: يمثل عنصر الارتكاز نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة ويشار إليه بشكل معين أزرق في الجدول، و في مثالنا هو 5.

2- 4- تشكيل جدول السمبلكس الثاني:

C	V	Q	30	24	18	0	0	M	M
			x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	A_1	A_2
30	x_1	16	1	2/5	1/5	-1/5	0	1/5	0
M	A_2	12	0	9/5	12/5	3/5	-1	-3/5	1
$Z_j = \sum C_j x_j$ Z = 480 + 12M			0	9/5M-12	12/5M-12	3/5 M-6	M-	6-8/5M	0

بما أن قيم سطر التقييم ليست كلها سالبة أو معدومة فهذا الجدول ليس هو الحل الأمثل، لذا وجب علينا تحسين الحل إلى غاية الحصول على معاملات سالبة أو معدومة و ذلك بتشكيل جدول سمبلكس ثالث.

2- 5- تشكيل جدول السمبلكس الثالث:

C	V	Q	30	24	18	0	0	M	M
			x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	A_1	A_2
30	x_1	15	1	1/4	0	-1/4	1/12	/	/
18	x_3	5	0	3/4	1	1/4	-5/12	/	/
$Z_j = \sum C_j x_j$ Z = 540			0	3-	0	3-	5-	/	/

بما أن كل قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة فالحل أمثل.

والحل الأمثل هو:

$x_1 = 15$, $x_3 = 5$, $x_2 = 0$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $Z = 540$

ملاحظة هامة:

- إذا خرج المتغير **الوهمي الإصطناعي** Ai من الحل ، نستطيع الاستغناء عن العمود الخاص به، لأنه متغير مساعد فقط وليس له معنى في الحل.

وبذلك يصبح الجدول الثاني كما يلي: A_1 هو المتغير الخارج, إذن نستطيع الاستغناء عن العمود الخاص به:

C	V	Q	30	24	18	0	0	M	M
			x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	A_1	A_2
30	x_1	16	1	2/5	1/5	-1/5	0	1/5	0
M	A_2	12	0	9/5	12/5	3/5	-1	-1/5	1
$Z_j = \sum C_j x_j$ Z = 480 + 12M			0	9/5M-12	12/5M-12	3/5 M-6	M-	6-8/5M	0

وبعد حذف عمود A_1 يكون الجدول كما يلي:

C	V	Q	30	24	18	0	0	M
			x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	A_2
30	x_1	16	1	2/5	1/5	-1/5	0	0
M	A_2	12	0	9/5	12/5	3/5	-1	1
$Z_j = \sum C_j x_j$ Z = 480 + 12M			0	9/5M-12	12/5M-12	3/5 M-6	M-	0

وأيضا الجدول الثالث يصبح كما يلي بعد حذف عمود A_2 :

C	V	Q	30	24	18	0	0
			x_1	x_2	x_3	S_1	S_2
30	x_1	15	1	1/4	0	-1/4	1/12
18	x_3	5	0	3/4	1	1/4	-5/12
$Z_j = \sum C_j x_j$ Z = 540			0	3-	0	3-	5-

ويبقى الحل صحيحا والجداول صحيحة، أي أن خروج المتغير الوهمي من الحل لا يؤثر على الحل.