الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم علوم التسيير

مطبوعة مقياس

محاضرات ومسائل في مقياس رياضيات المؤسسة

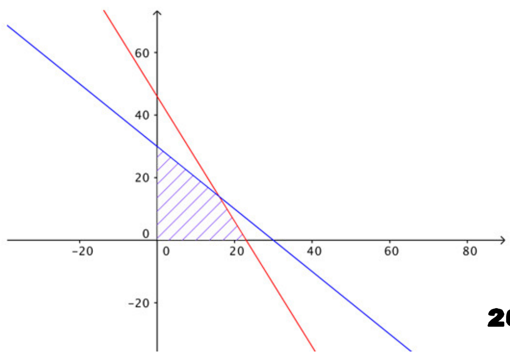
محاضرات مدعمة بأمثلة وتمارين

موجهة لطلبة السنة الثانية علوم التسيير

الدكتور: فالته اليمين

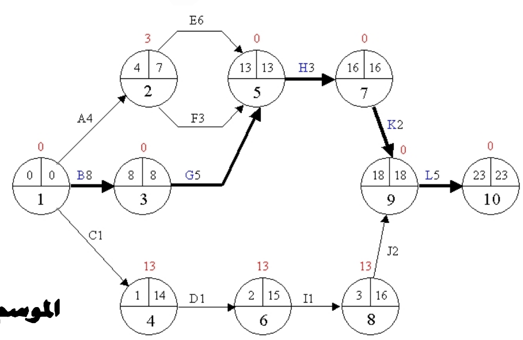
$$Z(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min),$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i=1,2,\dots,m,$$
$$x_j \ge 0,\ j=1,2,\dots,n.$$

$$\text{Maximize } z = C^T x$$
$$Ax \le b$$
$$x \ge 0$$



$$x_2 + x_6 = 2$$

1+1=3



الموسم الجامعي 2019-2020

فهرس المحتويات

مقدمة

جاءت مطبوعة "رياضيات المؤسسة" كنتيجة لمجهود تدريس هذه المادة لمدة تزيد عن عشر سنين لكي تعرض جوانب عديدة لأهم وأشهر الطرق والأدوات الرياضية الحديثة الضرورية لطلبة علوم التسيير، بأسلوب مبسط يمكن استيعابه بسهولة والاستفادة منه بشكل أفضل، بسرد مجموعة من أمثلة تطبيقية (ما يقارب 30 مثالا توضيحيا) وعدد معتبر من التمارين النموذجية المفتوحة (عشرة تمارين نموذجية) إنما هي أقرب ما يكون إلى الحقيقة وتعكس واقع الحال من أجل تقريب هذه الطرق والأداوت الرياضية للطالب وكيفية تطبيقها ميدانيا، حيث يرتبط استعمال هذه التقنيات الرياضية بإمكانيات المؤسسة ومواردها واهدافها، وبقدرات متخذي القرارات فيها، على اختلاف مستوياتهم التنظيمية، وكيفية تعاملهم مع ظروف مؤسساتهم وطرق تكميمهم للظواهر و للمشاكل التي تواجهها، من أجل معالجتها والبت فيها حيثما توجد إمكانية المفاضلة والخيار ثمة يكمن اتخاذ القرار سواء في العمليات التي تتم في المدى القصير أو الطويل،ما تعلق منها بالعمليات الإدارية في تسيير وظائف المؤسسة. وفضلاً عن ذلك فقد تم تزويد موضوعات هذه المطبوعة بعدد متنوع من التمارين والمسائل المحلولة التي راعينا فيها التدرج والتنوع بعيداً عن التكرار والملل للفكرة الواحدة، وإنما التطرق لعديد من الأفكار المتنوعة.

والله نسأل، أن نكون قد أضفنا شيئاً نافعاً يحقق الغرض منه.

الفصل الأول

01

المسألة المطروحة في البرمجة الخطية

البرمجة الخطية

01 – 01– البرمجة الخطية، متطلبات وتطبيقات

إذا كانت البرمجة الرياضية في عمومها هي فرع من فروع العلوم الرياضية الذي يبحث في كيفية تحديد القيمة القصوى (العظمى) أو الدنيا (الصغرى) لدالة محددة تعتمد على عدد من المعادلات أو المتراجحات التي قد تكون مستقلة عن بعضها أو حتى مرتبطة تسمى قيود، فإن البرمجة الخطية هي أسلوب رياضي يساعد على اتخاذ أفضل القرارات المتعلقة بالتوزيع أو التخصيص الأمثل لمجموعة من الموارد المحدودة على مجموعة من الاستخدامات المتعددة، مما يعني أنها تبحث عن أفضل الاستعمالات لتحقيق أحسن النتائج، لتحقق بذلك الكفاءة في استخدام الموارد والفعالية في تحقيق النتائج.

رياضيا، يتم وضع مشكلة ما في نموذج رياضي بغرض تحديد حل أمثل لها من بين جملة من الحلول المشتركة، بحيث تكون العلاقة بين المتغيرات المكونة للنموذج الرياضي هي علاقة خطية. ولكي يتمكن متخذ القرار في المؤسسة من استخدام هذه الأسلوب الرياضي لابد من توفر الشروط أو المتطلبات التالية:

1- وجود هدف تسعى المؤسسة لتحقيقه، يمكن التعبير عنه رياضياً في شكل دالة كتخفيض التكاليف، تعظيم الأرباح، تقليص استهلاك المواد... الخ.
2- وجود مجموعة من القيود والشروط التي في ظلها يتم تحقيق الهدف.
3- يجب أن تكون هناك استخدامات متعددة للموارد المتاحة.
4- إمكانية صياغة المسألة في شكل نموذج رياضي.

في الحقيقة فإن للبرمجة الخطية استخدامات متعددة وكثيرة جدا، إذ يمكن استعمالها في العديد من ميادين الحياة، كالعلوم، الهندسة، الاقتصاد، التجارة، الصناعة، التأمين...الخ. وفي مطلق الحال تستعمل البرمجة الخطية لحل الكثير من المسائل التي تواجهنا على أن تستوفي الشروط المذكورة سابقا.

ففي المؤسسة الاقتصادية حيث تكون الموارد والامكانيات محدودة في مقابل الخيارات والاستعمالات العديدة، فإنه يمكن استعمال البرمجة الخطية في العديد من المجالات من بينها:

1- في حل المشاكل المتعلقة بالإنتاج، كتحديد التشكيلة الممكنة من مختلف المنتجات وكمياتها في ظل كميات متاحة من عوامل الإنتاج تدخل جميعها في التشكيلة الإنتاجية.
2- تحديد المزيج الإنتاجي المتمثل في العناصر التي تمزج مع بعضها بكيفية معينة وبنسب مختلفة، للحصول على منتوج آخر، ويتعلق الأمر بصناعة الأدوية، الأغذية، الدهن...الخ.
3- في اختيار وتعيين الأفراد في المؤسسة بغرض القيام بعمليات ومهام مختلفة.
4- توزيع المواد والمنتجات المتجانسة من مصادر تواجدها نحو أماكن استخدامها.
5- كما يمكن استخدام البرمجة الخطية في الإشهار، المخزون... الخ.

01 –02– عرض نماذج ومسائل البرمجة الخطية

النموذج هو ترجمة رياضية للمشكلة التي نريد البحث عن حل لها، مكون من هدف نريد الوصول اليه مُعبراً عنه بمعادلة رياضية تسمى دالة الهدف، وقد تأخذ إحدى الصيغتين: التعظيم *Maximisation* كما في حالة البحث عن تحقيق اقصى الأرباح والعوائد والمداخيل...الخ، أو تأخذ دالة الهدف صيغة التقليل أو التدنية *Minimisation* كالبحث عن أدنى تكلفة أو تحمل أقل الخسائر... الخ. كما يتكون النموذج من قيود أو شروط في ظلها يجب أن يتحقق الهدف تشمل بدورها مجموعة من متغيرات القرار وهي تلك المجاهيل التي نبحث عن تحديد قيمة لها وإعطائها المعنى التفسيري للمسألة، يُعبر عن القيود بمتراجحات أو معادلات رياضية.

نموذج البرمجة الخطية قد يكون في شكل قانوني (*Canonique*)، أو في شكل معياري (*Standard*) وتأخذ المسألة الشكل المعياري إذا كانت القيود عبارة عن معادلات كما يلي:

$$\begin{cases} [MAX]\ Z = C_iX_i \\ A_iX_i = b_i \\ X_i \geq 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} [MIN]\ Z = C_iX_i \\ A_iX_i = b_i \\ X_i \geq 0 \end{cases}$$

أما إذا كانت قيود المسألة عبارة عن متراجحات نقول أن المسألة على شكل قانوني وتأخذ إحدى الصيغتين التاليتين:

$$\begin{cases} [MAX]\ Z= C_iX_i \\ A_iX_i \geq b_i \text{ أو } A_iX_i \leq b_i \\ X_i \geq 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} [MIN]\ Z= C_iX_i \\ A_iX_i \leq b_i \text{ أو } A_iX_i \geq b_i \\ X_i \geq 0 \end{cases}$$

يمكن النظر لمسألة البرمجة الخطية من زاويتين، الأولى تسمى المسألة المطروحة أو الأولية (*Problème Primal*)، والزاوية الثانية تسمى بالمسألة المعكوسة أو الثنائية (*Problème Dual*).

- يكون نموذج المسألة المطروحة بشكل عام على النحو التالي:

$$[Max/Min]\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots\dots + C_n X_n$$

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots\dots + a_{1n} X_n \leq b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots\dots + a_{2n} X_n \leq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots\dots + a_{mn} X_n \leq b_m \end{cases}$$

- أما نموذج المسألة المعكوسة فتكون بصفة عامة على الشكل التالي:

$$[Max]\ G = b_1u_1 + b_2u_2 + \dots\dots + b_m u_m$$

$$\begin{cases} a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \dots\dots + a_{m1} u_n \geq C_1 \\ a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \dots\dots + a_{m2} u_n \geq C_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \dots\dots + a_{mn} u_n \geq C_n \end{cases}$$

ولحل أيٍّ من المسألتين لدينا الطرق التالية:

1. الطيقة الجبرية
2. طريقة الرسم البياني
3. الطريقة المبسطة (السمبلاكس Simplexe)

مثال*(01-01): تقوم إحدى المؤسسات الإنتاجية بتصنيع نوعين من لعب الأطفال (B,A) لإنتاج الوحدة الواحدة من النوع الأول (A) يتطلب استعمال وحدتي قياس(2) من مادة البلاستيك كمادة أولية، كما أنها تستغرق في ورشة التصنيع 3 ساعات عمل. بينما تتطلب الوحدة الواحدة من النوع (B) وحدة قياس واحدة من المادة الأولية البلاستيك، وتستغرق 6 ساعات عمل بورشة التصنيع. تخصص المؤسسة للفترة القادمة 1000 وحدة قياس من المادة الأولية البلاستيك لإنتاج هذه المنتجات كما أن طاقة ورشة التصنيع المتاحة خلال هذه الفترة هي 2400 ساعة عمل. تتوقع أن تحقق بذلك ربحا قدره (20 وحدة نقدية) للوحدة من النوع (A) و(30 وحدة نقدية) من النوع (B).

*- نستخدم هذا المثال كنموذج لتسهيل الفهم ولإمكانية مقارنة الحلول والنتائج المتوصل إليها في كل طريقة

المطلوب:

1. صياغة المشكلة في نموذج مسألة البرمجة الخطية.
2. تحديد التشكيلة الإنتاجية المثلى من النوعين لتحقيق أقصى ربح ممكن.

الحل: قبل صياغة النموذج الرياضي للمسألة المطروحة أمامنا لابد من مراعاة إمكانية وجود المتطلبات المذكورة سابقا (متطلبات البرمجة الخطية) وهي:

- ✓ يتضح أن المؤسسة تبحث عن أفضل توليفة من لعب الأطفال (A,B) من بين العديد من التوليفات الممكنة، والتي تسمح لها بتحقيق الهدف المرجو وهو تعظيم الأرباح.
- ✓ إن هذا الهدف تحكمه مجموعة من القيود والشروط التي في ظلها يتم تحقيقه وتتمثل هذه القيود في الموارد المتاحة والمخصصة لإنتاج هذين النوعين وهي ساعات عمل ورشة التصنيع، والمادة الأولية المتاحة البلاستيك.
- ✓ إن هذه الموارد كما يمكن استعمالها في إنتاج النوع (A) فإنها أيضا يمكن استخدامها في الوقت نفسه لإنتاج النوع الثاني(B) فهي بذلك متعددة الاستخدامات. وهذا شرط أساسي ومهم في البرمجة الخطية وبدونه لا يمكن حل مثل هذه المسائل بطرق البرمجة الخطية.
- ✓ ولإمكانية صياغة المسألة في شكل نموذج رياضي لا بد من إعطاء بعض الرموز مع العلم أن وضع الرموز يساعد على تشكيل نموذج المسألة وتفسير الحلول.

نرمز بـ (X) لعدد الوحدات التي يمكن أن تنتجها المؤسسة من النوع (A)؛

وبالرمز (Y) لعدد الوحدات التي يمكن أن تنتجها أيضا من النوع (B)؛

و بالرمز (Z) لقيمة الأرباح الممكن تحقيقها.

أ- الصياغة الرياضية للهدف: في مثالنا هذا يتمثل الهدف المراد تحقيقه في الحصول على أقصى الأرباح (تعظيم الأرباح)، فإذا كان الربح في الوحدة الواحدة من النوع الأول (A) هو20 وحدة نقدية، فإن الربح المحتمل تحقيقه من انتاج X وحدة يمكن إنتاجها من النوع الأول من لعب الأطفال هو (20X) وحدة نقدية. وإذا كان الربح في الوحدة الواحدة من النوع (B) هو30 وحدة نقدية، فإن الربح المتوقع تحقيقه من انتاج Y وحدة يمكن إنتاجها من النوع الثاني هو (30Y) وحدة نقدية.

وعليه، تأخذ دالة الهدف الصيغة التالية: $\textbf{[MAX] Z = 20X + 30Y}$

ب- صياغة قيود المسألة: القيود هي مجموعة من المعادلات أو المتراجحات التي تعبر عن ظروف أو شروط المسألة والتي في ظلها يتم اتخاذ القرار واختيار أفضل الحلول. وفي مثالنا هذا فإن هذه الشروط التي تحدد تشكيلة المنتجات هي القيود التالية:

❶ - قيد ساعات العمل (قيد طاقة ورشة التصنيع):

إذا كانت كل وحدة واحدة من النوع الأول (A) تتطلب 3 ساعات عمل في ورشة التصنيع فإن عدد الوحدات الإجمالية التي يمكن إنتاجها من هذا النوع سوف يستغرق في ورشة التصنيع (3X) ساعة عمل. وكذلك الأمر بالنسبة للنوع الثاني (B) الذي يستغرق في هذه الورشة زمن قدره (6Y) ساعات عمل. وبالتالي فإنه لإنتاج النوعين معاً يجب أن لا تتجاوز ساعات العمل الإجمالية 2400 ساعة عمل وهي طاقة ورشة التصنيع أو أقصى ساعات العمل المخصصة في هذه الورشة لتصنيع كلا النوعين من لعب الأطفال.

لذلك يمكن صياغة هذا القيد كما يلي:

$$3X + 6Y \leq 2400$$

❷ - قيد المادة الأولية (مادة البلاستيك):

إذا كانت الوحدة الواحدة من النوع الأول (A) تتطلب 2 وحدة قياس من هذه المادة فإن عدد الوحدات من هذا النوع سوف تستهلك (2X) وحدة قياس أما بالنسبة للنوع الثاني(B) الذي يُستعمل عن كل وحدة يمكن إنتاجها وحدة قياس واحدة، فإنه سوف يستهلك (1Y) وحدة قياس من هذه المادة عند إنتاج (Y) وحدة. وعليه فانه لإنتاج أي كمية من النوعين يجب أن لا يتجاوز الكميات المتاحة من هذه المادة وهي 1000 وحدة قياس.

لذلك يمكن صياغة هذا القيد كما يلي:

$$2X + Y \leq 1000$$

❸ - قيد عدم السلبية:

يعني هذا القيد أن عدد الوحدات المنتجة من النوعين (A وB) يجب أن لا تكون سالبة لأن ذلك ليس له أي معنى اقتصادي. لذلك يمكن صياغة هذا القيد كما يلي:

$$Y \geq 0 \quad \text{و} \quad X \geq 0$$

للوصول إلى صياغة النموذج الرياضي للمسألة يمكن جمع النقاط السابقة على النحو التالي:

$$\begin{cases} [MAX]\ Z = 20X + 30Y \\ 3X + 6Y \leq 2400 \\ 2X + Y \leq 1000 \\ X \geq 0 \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظة: أن العلاقات التي تربط بين المتغيرات في المسألة هي علاقات خطية بحيث لا يمكن أن تظهر في مثل هذه المسائل (مسائل البرمجة الخطية) على سبيل المثال العلاقات التالية: $LnY,\ LogX,\ Y^2,\ XY$ **...الخ.**

والآن وبعد بناء النموذج الرياضي نشرع في حل هذه المسألة بالطرق المذكورة سابقا.

01 – 03 – **طريقة الرسم البياني في حل مسائل البرمجة الخطية**

تمثل هذه الطريقة في رسم مختلف القيود في مستوى منسوب لمعلم متعامد ومتجانس انطلاقاً من الشكل المعياري للمسألة، ثم إسقاط ورسم معادلات القيود على محوري الفواصل والتراتيب. حيث نجعل في كل مرة أحد المتغيرين يساوي الصفر لنحدد قيمة المتغير الآخر.

ففي مثالنا السابق وانطلاقا من القيدين التاليين:

$$3X + 6Y = 2400 \text{ -----------------------}(01)$$
$$2X + Y = 1000 \text{ -----------------------}(02)$$

- **بالنسبة للقيد الأول** Δ_1**:**

نفرض أن ($X = 0$) نعوض هذه القيمة في المتراجحة الأولى على النحو التالي:

$$3(0) + 6Y = 2400 \Rightarrow Y = (2400/6) \Rightarrow Y = 400$$

نسمي هذه النقطة $A_1(0\ ,\ 400)$

ولما نضع المتغير الآخر معدوم ($Y = 0$) فإننا سنتحصل على:

$$3X + 6(0) = 2400 \Rightarrow X = (2400/3) \Rightarrow X = 800$$

نسمي هذه النقطة $A_2(800,0)$

مما سبق يمكننا القول أن حلول هذه المتراجحة هي جميع الثنائيات $(X,Y) \leq (800,400)$ بيانيا هي كل النقاط التي تقع على المستقيم $\Delta 1$ وما دون أو أسفل المستقيم.

- **أما بالنسبة للقيد الثاني** Δ_2**:**

نفرض أن ($X = 0$) نعوض هذه القيمة في المتراجحة الأولى على النحو التالي:

$$2(0) + Y = 1000 \Rightarrow Y \leq 1000$$

نسمي هذه النقطة $B_1(0\ ,\ 1000)$

بينما عندما نضع المتغير الثاني يساوي الصفر $(Y = 0)$ فإننا سنتحصل على:

$$2X + 0 \leq 1000 \Rightarrow X = (1000/2) \Rightarrow X \leq 500$$

نسمي هذه النقطة $B_2(500 , 0)$

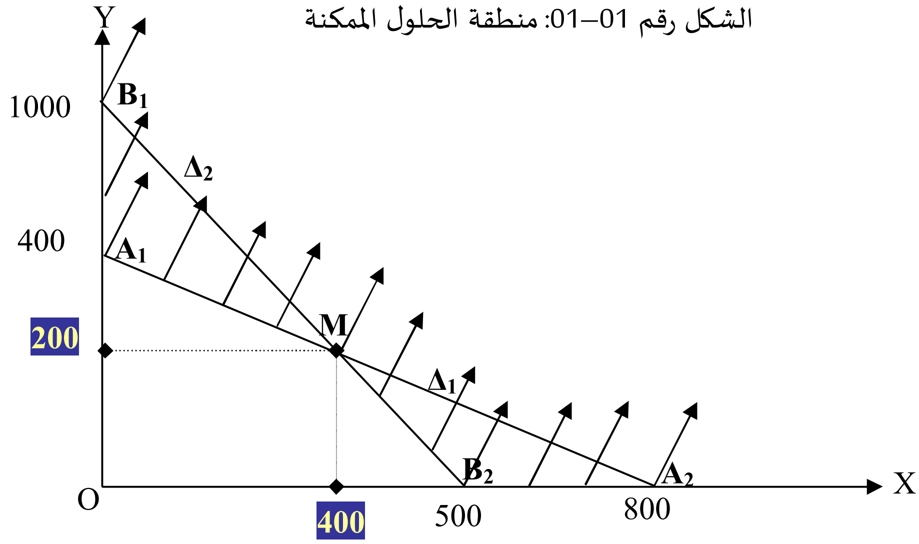
مما سبق نقول أن حلول هذه المتراجحة هي جميع الثنائيات $(X,Y)\leq(500,1000)$ وبيانيا هي جميع النقاط التي تقع على المستقيم Δ_2 وما اسفله.

وعليه؛ يمكن تلخيص حلول جملة المتراجحتين (1) و(2) في الجدول التالي:

القيود	$X = 0$	$Y = 0$
$3X + 6Y \leq 2400$	$Y \leq 400$	$X \leq 800$
	$A_1(0 , 400)$	$A_2(800 , 0)$
$2X + Y \leq 1000$	$Y \leq 1000$	$X \leq 500$
	$B_1(0 , 1000)$	$B_2(500 , 0)$
الحلول المشتركة	$Y^* \leq 400$	$X^* \leq 500$

ويمكن تمثيل هذه الحلول بيانيا في الشكل الموالي:

الشكل رقم 01–01: منطقة الحلول الممكنة



نسمي المساحة المتبقية وغير مظللة المحصورة بين النقاط (O,A_1,M,B_2) بمنطقة أو مساحة الحلول الممكنة أو المشتركة، حيث أن أي نقطة ضمن هذه المنطقة تعطي حلاً للمسألة لكنها ليست كلها حلولا مثلى، ولتحديد أي من هذه الحلول يعتبر حل أمثل نقوم بمقارنة قيمة دالة الهدف عند مختلف نقاط الحدود أو أطراف مساحة الحلول الممكنة.

ملاحظة: يمكن تظليل المساحة المقبولة التي تحدد الحل أو المساحة المرفوضة التي تقع خارج حدود الحل

1 – عند النقطة (O) حيث أن: $X = 0$ و $Y = 0$

فإن قيمة دالة الهدف: $Z = 20(0) + 30(0) = 0$

وتكون قيمة القيود:

قيد ساعات العمل: $3(0) + 6(0) = 0$

قيد المادة الأولية: $2(0) + 1(0) = 0$

يسمى الحل عند هذه النقطة بالحل المبدئي أو القاعدي، مع أنه من الناحية الاقتصادية ليس له أي معنى إلا أننا نلجأ إليه للانطلاق في عملية تحسين الحل في طريقة السمبلاكس.

2 – عند النقطة (A_1) حيث أن: $X = 0$ و $Y = 400$

وتكون قيمة دالة الهدف: $Z = 20(0) + 30(400) = 12000$

أما القيود:

قيد ساعات العمل: $3(0) + 6(400) = 2400$

قيد المادة الأولية: $2(0) + 1(400) = 400$

الملاحظ أنه عند هذه النقطة، تنتج المؤسسة 400 وحدة من النوع الثاني فقط. مما يؤدي لاستغلال كامل لساعات العمل. أما بالنسبة للمادة الأولية فإنها غير مستغلة تماما استغلت منها 400 وحدة فقط ويبقى 600 وحدة حيث يمكن استغلالها لإنتاج كميات إضافية.

3 – عند النقطة (B2) حيث أن: $X = 500$ و $Y = 0$

فإن قيمة دالة الهدف هي: $Z = 20(500) + 30(0) = 10000$

وتكون الموارد المستهلكة هي:

بالنسبة لساعات العمل $3(500) + 6(0) = 1500$ (وتبقى منها 900 ساعة غير مستغلة)

أما المادة الأولية $2(500) + 1(0) = 1000$ (مستغلة تماما).

4 – عند النقطة (M) وهي النقطة التي يتقاطع فيها القيدين معاً، لذلك ولتحديد احداثياتها يتم إسقاط هذه النقطة على محوري الفواصل والتراتيب، ومع ذلك فقد لا يكون الاسقاط دقيق لهذا يتم البحث عن احداثيات هذه النقطة باستخدام الطرق المعروفة في حل جملة معادلتين بمجهولين انظر على سبيل المثال الطريقة الجبرية (ص 20) حيث يمكن حل جملة المعادلتين:

$$3X + 6Y = 2400 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$2X + Y = 1000 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من أجل التخلص من المتغير الثاني نضرب المعادلة (2) في القيمة (-6) كما يلي

$$3X + \cancel{6Y} = 2400$$

$$-12X - \cancel{6Y} = -6000$$

$$-9X = -3600 \Rightarrow \mathbf{X = 400}$$

بتعويض قيمة (X) بما يساويها في إحدى المعادلتين، لتكن الثانية مثلا نحصل على ما يلي

$$2(400) + Y = 1000 \Rightarrow Y = 1000 - (800) \Rightarrow \mathbf{Y = 200}$$

لذلك فإنه عند هذه النقطة يكون: X = 400 و Y = 200

وتكون قيمة دالة الهدف: $Z = 20(400) + 30(200) = 14000$

أما القيود:

قيد ساعات العمل: $3(400) + 6(200) = 2400$

قيد المادة الأولية: $2(400) + 1(200) = 1000$

وعليه، فإن كل الموارد مستغلة بالكامل، وأن قيمة دالة الهدف أفضل مقارنة بالحلول السابقة.

يمكن تلخيص نتائج الحل حسب طريقة الرسم البياني في الجدول التالي:

الحلول الممكنة	قيد ساعات العمل	قيد المادة الأولية	قيمة دالة الهدف
النقطة(A_1) Y= 400 X= 0	2400 مستغلة تماما	400 مستغلة 600 غير مستغلة	12000
النقطة(M) **Y= 200 X= 400**	**2400** **مستغلة تماما**	**1000** **مستغلة تماما**	**14000**
النقطة(B_2) Y= 0 X= 500	1500 مستغلة 900 غير مستغلة	1000 مستغلة تماما	10000
النقطة(O) Y= 0 X= 0	2400 غير مستغلة	1000 غير مستغلة	00

بمقارنة الحلول المختلفة عند النقاط A_1,M,B_2,O يتضح وأن الحل الأمثل يكون عند النقطة **B(400,200)** لأن دالة الهدف تكون في اقصى قيمة لها، حيث يمكن إنتاج 400 وحدة من النوع (A) و200 وحدة من النوع (B) وتحقق المؤسسة أقصى ربح وقدره 14000 وحدة نقدية مع الاستغلال الكامل للموارد المتاحة من ساعات العمل والمادة الأولية.

لاحظ أن الحل الأمثل يحقق الكفاءة في استخدام الموارد المتاحة والفعالية في تحقيق الاهداف

01 – 04 – **الحالات الخاصة لطريقة الرسم البياني**

❶- حالة وجود أكثر من حل أمثل واحد

في بعض الحالات نحصل على حلول متعددة للمسألة، حيث تُعطي قيماً متساوية لدالة الهدف، تسمى في هذه الحالة الحلول البديلة، هذه الأخيرة تمنح لمتخذ القرار في المؤسسة مجالا واسعا للاختيار بينها وفقا لما يراه مناسبا.

مثال(01-02)**:** لنفرض أن أحد المستهلكين يبحث عن تحديد أفضل توليفة ممكنة من السلعتين (A,B) في حدود ميزانيته المقدرة بمبلغ 300 وحدة نقدية على أن لا تتجاوز عدد الوحدات المستهلكة من السلعة (A) ثماني 08 وحدات ومن السلعة (B) 03 وحدات، فإذا كانت المنفعة الناتجة عن استهلاك الوحدة الواحدة من السلعة (A) هي 20 وحدة قياس، أما المنفعة الناتجة عن استهلاك السلعة (B) فهي 40 وحدة قياس منفعة.

المطلوب: ما هي التوليفة المثلى من السلعتين علما أن سعر الوحدة الواحدة من السلعة (A) هو 30 وحدة نقدية وسعر الوحدة من السلعة (B) هو 60 وحدة نقدية؟.

الحل:

نفرض أن X هي عدد الوحدات التي يمكن لهذا الشخص استهلاكها من السلعة A وأن Y هي عدد الوحدات التي يمكنه استهلاكها من السلعة B.

بناء على هذه الرموز يمكننا صياغة المسألة في النموذج الرياضي التالي:

- دالة الهدف: (تعظيم المنفعة الكلية)

$$[MAX]\ Z = 20X + 40Y$$

- شرط استهلاك السلعة (A):

$$X \leq 8 \text{.......................................} 01$$

- قيد الميزانية :

$$30X + 60Y \leq 300 \text{....................} 02$$

- شرط استهلاك السلعة (B):

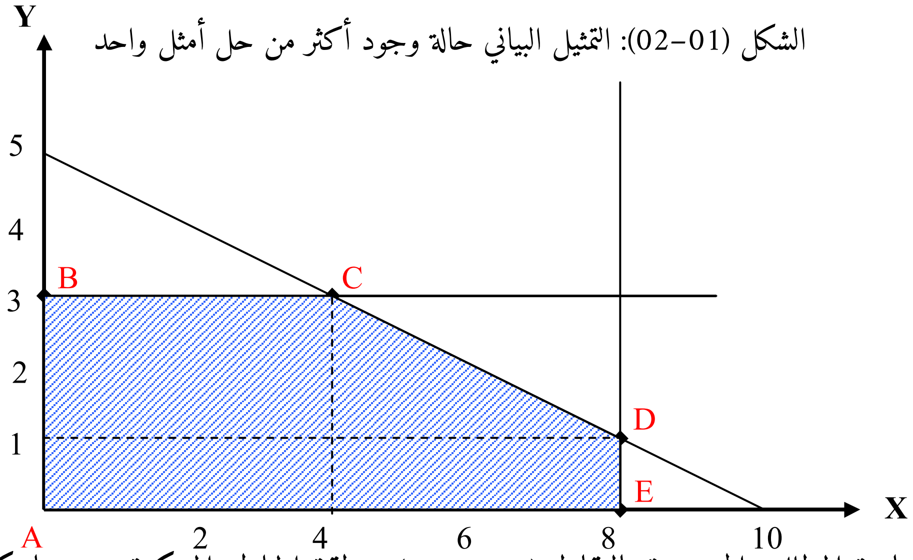
$$Y \leq 3 \text{.......................................} 03$$

- شرط عدم السلبية:

$$X \geq 0,\ Y \geq 0 \text{ ....} 04$$

يمكن تمثيل هذه القيود بيانيا في الشكل التالي:

الشكل (01-02): التمثيل البياني حالة وجود أكثر من حل أمثل واحد



تمثل المساحة المظللة والمحصورة بالنقاط (A,B,C,D,E) منطقة الحلول الممكنة وعندها تكون القيم المختلفة كما هي ملخصة في الجدول التالي:

النقاط	الكمية المستهلكة من A	الكمية المستهلكة من B	قيمة دالة الهدف المنفعة الكليـة	المبلغ المخصص من الميزانية
A	0	0	00	00
B	0	3	120	180
C	**4**	**3**	**200**	**300**
D	**8**	**1**	**200**	**300**
E	8	0	160	240

نلاحظ وجود اختيارين أمام هذا المستهلك وكل اختيار يمثل في حد ذاته حل أمثل لأنه يعطي نفس درجة الإشباع أو المنفعة، باستهلاك كميات مختلفة من السلعتين وهذين الاختيارين هما:

الاختيار الأول: عند النقطة (C) حيث يمكن استهلاك أربع وحدات من السلعة (A) وثلاث وحدات من السلعة (B)، ويحقق بذلك أقصى منفعة كلية قدرها 200 وحدة منفعة في حدود الميزانية المخصصة والمقدرة بـ 300 وحدة نقدية.

أي أن: $X = 4$ $\quad Y = 3$ $\quad Z = 200$

الاختيار الثاني: أما بالنسبة لهذا الاختيار فهو يتضح عند النقطة (D) حيث يمكنه استهلاك ثماني وحدات من السلعة (A) مقابل وحدة واحدة فقط من السلعة (B)، ويحقق كذلك أقصى منفعة كلية قدرها أيضا 200 وحدة منفعة وفي نفس الوقت يستغل كامل المبلغ المخصص أو الميزانية.

أي أن: $X = 8$ $Y = 1$ $Z = 200$

❷- حالة القيد الزائد عن الحاجة

في مثل هذه الحالة فإن أحد القيود الذي يشكل المسألة يعتبر زائد عن الحاجة، لأنه لا يساهم في تحديد نقطة الحل الامثل ولا في رسم حدود مساحة الحلول المشتركة، إذ أن المستقيم الممثل لمعادلة هذا القيد عادة ما يكون بعيدا عن منطقة الحلول الممكنة ولا يؤثر بأي حال من الاحوال على الحلول.

مثال (01- 03)**:** لنأخذ المثال (01-01) مع افتراض أن هذه المؤسسة لا يمكنها أن تُسوق أكثر من 1200 وحدة من النوع الثاني من لعب الأطفال (B).

المطلوب:

- ✓ إعادة صياغة المشكلة في نموذج مسألة برمجة خطية.
- ✓ تحديد التشكيلة الإنتاجية المثلى من النوعين لتحقيق أقصى الأرباح.

(باستخدام طريقة الرسم البياني)

الحل: على أساس هذه التغيرات في المسألة، فإن نموذج البرمجة الخطية سيكون كالتالي:

$$[MAX]\ Z = 20X + 30\ Y$$

$$3X + 6Y \le 2400 \ldots\ldots 01$$

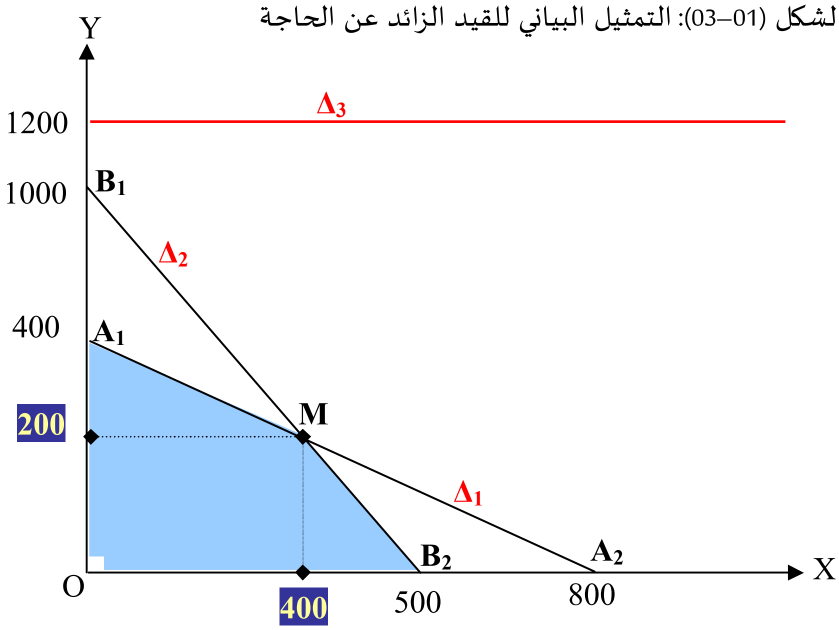
$$2X + Y \le 1000 \ldots\ldots 02$$

$$Y \le 1200 \ldots\ldots 03$$

$$X \text{ et } Y \ge 0 \ldots\ldots 04$$

يمكن تمثيل هذه القيود في الشكل البياني التالي:

الشكل (01–03): التمثيل البياني للقيد الزائد عن الحاجة



يتضح من الرسم البياني وجود ثلاث أنواع من القيود وهي:

1- القيود المُشكلة للمسألة والمتمثلة بيانيا في المستقيمات $\Delta_1 , \Delta_2 , \Delta_3$

2- القيود الأساسية المحددة لنقطة الحل الامثل والمتمثلة في المستقيمين Δ_2 , Δ_1

3- القيود الزائدة عن الحاجة والمتمثلة في المستقيم Δ_3.

على هذا الأساس، وبناء على النتائج المتوصل إليها، يمكن القول أن الحل الأمثل لهذا النموذج هو نفسه الذي تم الوصول إليه سابقا (حل المثال رقم 01-01) بحيث لم يحدث أي تغيير على أمثلية الحل على الرغم من التغيير الذي حدث في المسألة، ويعود ذلك لكون القيد المتعلق بتسويق المنتوج الثاني لا يساهم في رسم، وتحديد منطقة الحلول المشتركة. وبالتالي، حيث لا تسمح الكميات المتاحة من الموارد بانتاج هذه الكمية من المنتوج، ذلك أن أقصى كمية يمكن انتاجها من هذا النوع هي عند النقطة (**B_1**) وهي خارج منطقة الحلول المشتركة لأن القيد الأول لا يسمح بانتاج الكمية عند النقطة (**B_1**)، لهذه الأسباب نعتبر أن القيد الخاص بتسويق المنتوج الثاني هو قيد لا حاجة لنا به في المسألة ولا يؤخذ بعين الاعتبار، لأن القيدين الآخرين يلغيان تأثير هذا القيد.

❸- حالة عدم وجود حلول على الاطلاق

قد يحدث أن لا نتمكن أصلا من تحديد منطقة للحلول المشتركة وهذا يعود لتضارب في القيود

مثال (01-04)**:** يريد أحد المقاولين شراء نوعين من الآلات (A,B) تُعطي الآلة الواحدة من النوع الأول إيراد قدره 120 وحدة نقدية، بينما إيراد الآلة الواحدة من النوع الثاني 100 وحدة نقدية، خصص هذا المقاول ميزانية مقدارها 1200 وحدة نقدية، حيث يمكن شراء على الأقل خمس آلات من النوعين معا، إذا كانت تكلفة شراء الآلة الواحدة من النوع الأول هي 400 وحدة نقدية، بينما تكلفة شراء الآلة الواحدة من النوع الثاني 300 وحدة نقدية.

المطلوب:

تحديد عدد الآلات من كل نوع A,B بحيث يتمكن هذا المقـاول من تعظيم إيراداته؟.

الحل:

لنفرض أن X يعبر عن عدد الآلات التي يمكن شرائها من النوع الأول (A)

وأن Y هي عدد الآلات التي يمكن شرائها من النوع الثاني (B).

وبالتالي، فإن نموذج المسألة يكون كالتالي:

دالة الهدف (تعظيم الإيرادات).. $[MAX]\ Z = 120X + 100Y$

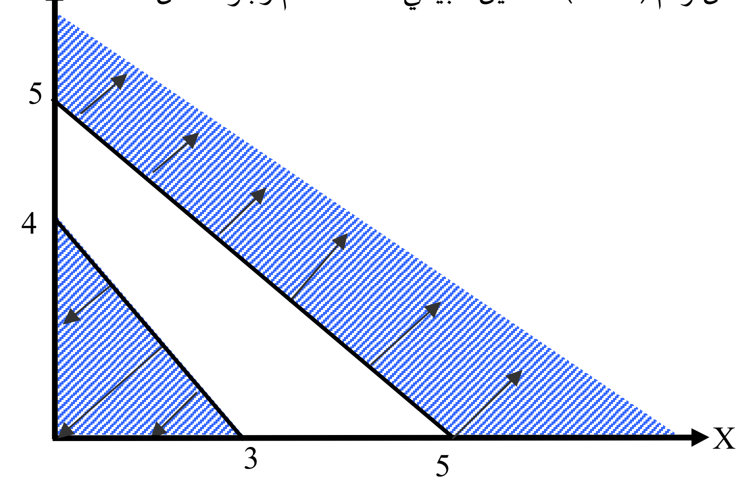
قيد عدد الآلات التي يمكن شراءها .... $X + Y \geq 5$

قيد الميزانية.. $400X + 300Y \leq 1200$

قيد عدم السلبية... $X;\ Y \geq 0$

يمكن تلخيص حل هذه المسألة في الشكل التالي:

الشكل رقم (01–03) التمثيل البياني لحالة عدم وجود الحل



بتظليل منطقة الحلول بالنسبة لكل قيد، يتضح أنه لا توجد منطقة تمثل حلولاً مشتركة للقيدين معاً، لأن القيود متضاربة في هذه الحالة، واذا حدث وأن وقع متخذ القرار في مثل هكذا حالة عليه اعادة صياغة المسألة صيـاغة صحيحة، كاقتراح تخصيص موارد أخرى، أو إعادة النظر في القيود السابقة.

01 – 05 – **الطريقة الجبرية في حل مسائل البرمجة الخطية**

يتحدد الحل وفقا لهذه الكيفية بطرق كثيرة نتطرق لأهم طريقتين:

- طريقة التعويض
- طريقة الجمع
- طريقة كرامر

❶ – **طريقة التعويض:** يمكن استخدام نفس المثال السابق(مثال01-01)

$3X + 6Y = 2400$ .... (1)

$2X + Y = 1000$ .... (2)

من المعادلة (2) نحصل على قيمة (Y) بدلالة (X) كما يلي

$Y = 1000 - 2X$ .... (3)

بتعويض قيمة (Y) من المعادلة (3) في المعادلة (1) نحصل على:

$$3X + 6(1000-2X) = 2400$$

$$3X + 6000 - 12X = 2400$$

$$9X = 3600 \Rightarrow \boldsymbol{X = 400}$$

بتعويض قيمة (X) بما يساويها في المعادلة (3)

$$Y = 1000 - 2(400) \Rightarrow \boldsymbol{Y = 200}$$

وبالتالي تكون قيمة دالة الهدف: $\boldsymbol{Z = 20(400) + 30(200) = 14000}$

وهو نفس الحل المتوصل إليه سابقا بطريقة الرسم البياني عند النقطة (M).

❷ – **طريقة الجمع:** تقوم هذه الطريقة بالبحث عن كيفية الاستغناء على أحد المتغيرين، كأن نقوم مثلا بالاستغناء على المتغير (Y) من المعادلتين وهذا بضرب طرفي المعادلة الثانية في العدد (-6) ثم نقوم بجمع المعادلتين، كما يلي:

$$3X + 6Y = 2400 \quad .... (1)$$

$$-12X - 6Y = -6000 \quad .... (2)$$

وبعد جمع الطرفين نتحصل على ما يلي

$$-9X = -3600 \Rightarrow X = \frac{-3600}{-9} = 400$$

بتعويض قيمة (X) بما يساويها في المعادلة (2)

$$2X + Y = 1000 \Rightarrow Y = 1000 - 2(400) \Rightarrow \mathbf{Y = 200}$$

وبالتالي تكون قيمة دالة الهدف: $\boldsymbol{Z = 20(400) + 30(200) = 14000}$

وهو نفس الحل المتوصل إليه سابقا بطريقة الرسم البياني عند النقطة (M).

❸ - **طريقة كرامر:** يجب تحويل المتراجحات إلى معادلات كما يلي:

$$3X + 6Y = 2400$$

$$2X + Y = 1000$$

أولا يجب كتابة جملة هذه المعادلات في شكل مصفوفات على النحو التالي: [A].[X] =[B]

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2400 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

ثم البحث عن قيمة محدد المصفوفة الأساسية التالية=[A] $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ بالطرق المعروفة وذلك

على النحو التالي: $\boldsymbol{|A| = 3(1) - (6) = -9}$

ولتحديد قيمة المتغيرة (X) لابد من حساب قيمة محدد المصفوفة الجديدة $[A_x]$ التالية :

$$[Ax] = \begin{bmatrix} 2400 & 6 \\ 1000 & 1 \end{bmatrix}$$

وذلك كما يلي $\boldsymbol{|A_x| = 2400(1) - 1000\ (6) = -3600}$

ثم تكون عندها قيمة المتغير(X) يساوي قيمة محدد المصفوفة الجديدة $[A_x]$ على محدد المصفوفة الأساسية، وهذا على النحو التالي:

$$X = \frac{|\,Ax\,|}{X} = \frac{-3600}{-9} = 400$$

ونفس الشيء بالنسبة لتحديد قيمة المتغيرة (Y) يجب حساب قيمة محدد المصفوفة $[A_y]$

$$[A_y] = \begin{bmatrix} 3 & 2400 \\ 2 & 1000 \end{bmatrix}$$

وذلك كما يلي :

$$|A_y| = 3\ (1000\ )\ -2\ (2400\ )\ =\ -1800$$

$$Y = \frac{|\,\mathrm{Ay}\,|}{\mathrm{Y}} = \frac{-1800}{-9} = 200$$

وبالتالي تكون قيمة دالة الهدف: $Z = 20(400) + 30(200) = 14000$

وهو نفس الحل المتوصل إليه سابقا بطريقة الرسم البياني عند النقطة (M).

01 – 06– الطريقة المبسطة (السمبلاكس)

إن طريقة الرسم البياني في حل مسائل البرمجة الخطية على الرغم من بساطتها، إلا أنه لا يمكن استعمالها في المسائل المعقدة، والتي يزيد فيها عدد المتغيرات عن اثنين، نظراً لصعوبة اسقاط معادلات القيود بيانيا. كما أن الطريقة الجبرية رغم أنها تعطي حلولا لمثل هذه المسائل غير أنها لا تأخذ دالة الهدف بعين الاعتبار عند الحل، وبالتالي لا يمكن معرفة فيما إذا كان الحل المتوصل إليه امثلا أم لا.

ولذلك، كان لا بد من ايجاد طريقة أخرى أكثر فعالية في حل المشاكل المعقدة فكانت الطريقة المبسطة أو ما يطلق عليها طريقة السمبلاكس *SIMPLEXE* تتكون هذه الطريقة التي وضعها (*George B.Dantzig*) سنة 1947 في مجموعة من العمليات والمراحل المتكررة بحيث كل مرحلة تمثل حلا ممكنا أفضل من الحل السابق وإحدى النقاط التي تشكل حدود مساحة الحلول المشتركة ... وهكذا نستمر في تحسين الحل حتى الوصول للحل الأمثل، كما يمكننا دراسة تأثير مختلف التغيرات في النموذج على الحل.

ورغبة في مقارنة النتيجة المترتبة عن طرق الحل الثلاث السابقة سوف نوضح طريقة السمبلاكس وفقا لنفس المثال السابق (مثال01-01)، ونعالج هذا المثال من الزاويتين المشار إليهما سابقا، المسالة المطروحة أولاً ثم المسألة المعكوسة ثانيا.

حسب المسألة المطروحة يكون النموذج الرياضي كما يلي:

$$[MAX]\ Z = 20X + 30Y$$
$$3X + 6Y \leq 2400$$
$$2X + Y \leq 1000$$
$$X \geq 0\ ;\ Y \geq 0$$

انطلاقا من هذا النموذج يتم الحل باتباع الخطوات التالية:

1- **تحويل النموذج القانوني (*Canonique*) إلى نموذج معياري (*Standard*)**: لايجاد النموذج المعياري لابد من تحويل جميع المتراجحات الى معادلات، أي أن النموذج المعياري لا يحتوي على متراجحات، حيث أنه مهما كانت دالة الهدف سواء من نوع (Min) أو (Max) فإنه عند تحويل المتراجحات من نوع اقل أو يساوي إلى معادلات، فإننا نضيف في هذه الحالة متغيرات جديدة للطرف الأقل تسمى متغيرات الفوارق ويرمز لها بالرمز (e_i). نفضل استخدام الرمز (e) للدلالة على الفارق écart بينما عند تحويل المتراجحات من نوع اكبر أو يساوي إلى معادلات، نضيف المتغيرات اصطناعية* *Artificiel* (A_i) ونطرح متغيرات الفوارق من الطرف الأكبر للمتراجحات وليس إضافتها كما هو الحال في حاله القيود الأصغر أو تساوي. أما في حالة وجود قيد من نوع يساوي في النموذج (=) فإنه يضاف للطرف الأيسر من المعادلة المتغير الاصطناعي فقط. مع العلم أن معاملات متغيرات الفوارق في دالة الهدف دائما ما تكون معدومة مهما كانت دالة الهدف. أما المتغيرات الاصطناعية فإنه يتم تحميلها بقيمة كبيرة جدا مقارنة ببقية معاملات المتغيرات الأخرى يرمز لها بالرمز (M) تعمل عكس دالة الهدف، حيث انه إذا كانت دالة الهدف من نوع (Max) فإنها تسبق بإشارة سالبة(-)، أما في حالة دالة الهدف من نوع (Min) فإنها تسبق بإشارة موجبة(+).

ملاحظة: كل معادلة يجب ألا تحتوي على أكثر من متغير فوارق واحد ولا على أكثر من متغير اصطناعي واحد. وقد سميت متغيرات الفوارق لأنها تعبر عن الفرق بين طرفي المتراجحة، لذلك تضاف للطرف الأقل في المتراجحة لكي تتحول الى معادلة. وهي أيضا الفرق بين الكميات المتاحة من المواد والكميات المستعملة منها.

بالرجوع لمثالنا السابق يمكن تحويل النموذج المعياري إلى نموذج قانوني على النحو التالي:

$$3X + 6Y + \boldsymbol{e_i} = 2400$$
$$2X + Y + \boldsymbol{e_i} = 1000$$
$$X \geq 0,\ Y \geq 0$$
$$[MAX]\ Z = 20X + 30Y + \boldsymbol{0}e_1 + \boldsymbol{0}e_2$$

حيث تشير (e_1) إلى ساعات العمل غير المستغلة في طاقة الورشة وتشير (e_2) إلى المادة الأولية المتبقية والتي لم يتم استهلاكها في العملية الانتاجية.

*- تدعى المتغيرات الاصطناعية بالمتغيرات الوهمية أو الخيالية، فهي تساعد فقط على الحل وليس لوجودها أي معنى. لذلك، من الأفضل أن لا تظهر في جدول الحل النهائي المتضمن الحل الأمثل ويستحسن التخلص منها عن طريق تحميلها لضريبة كبيرة M تعمل عكس دالة الهدف.

2- **وضع الحل القاعدي:** وفي هذه المرحلة يتم وضع معطيات النموذج القانوني في جدول خاص يسمى بجدول السمبلاكس بغرض الشروع في عملية تحسين الحل، هذا الجدول الأولي يشكل ما يسمى بالحل القاعدي أو الأساسي في عملية التحسين والذي يأخذ الشكل التالي:

الجدول (01-01): النموذج المعياري لطريقة السمبلاكس

			دالة الهدف (المعاملات) C_i
C_i	V	Q_j	متغيرات النموذج X_i , e_i , A_i
المعاملات	المتغيرات	الكميات	مصفوفة المعاملات a_{ij}
$Z = \sum C_i Q_j$			$C_i - \sum C_j a_{ij}$ أو $\sum C_j a_{ij} - C_i$

ملاحظات:

- **توجد العديد من أشكال جداول السمبلاكس، وقد فضلنا هذا الشكل لبساطته.**
- **السطر الأخير في الجدول يسمى سطر التقييم**
- **سوف نعتمد في تحديد قيم سطر التقييم على العلاقة التالية:** $C_i - \sum C_j a_{ij}$

بالنسبة لمثالنا يمكن وضع معطيات المرحلة السابقة في جدول الحل القاعدي كما يلي:

الجدول (01-02): الحل القاعدي للمسألة

			20	30	0	0
Ci	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
0	e_1	2400	3	**6**	1	0
0	e_2	1000	2	1	0	1
$Z = \sum Ci\ Qj = 0$			20	**30**	0	0

نلاحظ من خلال هذا الجدول أنه عبارة عن جداء مصفوفتين الأولى وهي المصفوفة الممثلة للمسألة المراد حلها، والثانية عبارة عن المصفوفة الاحادية، مما يعني أن اضافة متغيرات الفوارق الى المتراجحات لن يضفي أي تغير على النموذج، وإنما فقط لتسهيل الحل.

3- **تحسين الحل:** انطلاقا من الحل القاعدي نشرع في عملية التحسين حتى الوصول للحل الامثل و نستمر في هذه العملية كلما وجدت قيمة موجبة في سطر التقييم في الجدول (سطرZ).

حيث كلما وجدت قيمة **موجبة** في سطر التقييم، فإن الحل المتوصل إليه هو حل غير أمثل في حالة البحث عن تعظيم دالة الهدف. والعكس صحيح في حالة البحث عن تقليل قيمة دالة الهدف، حيث تدل الاشارة الموجبة في هذا السطر على إمكانية **الزيادة** في قيمة دالة الهدف. والعكس في حالة وجود إشارة **سالبة** يعني إمكانية **التخفيض** في دالة الهدف.

تتم عملية التحسين باتباع الخطوات التالية:

أ – تحديد المتغيرة الداخلة: هي المتغيرة التي بإدخالها إلى الحل سوف تعطي أفضل تحسين في قيمة دالة الهدف، وبالتالي فهي تقابل أكبر قيمة موجبة في سطر التقيم في حالة البحث عن تعظيم دالة الهدف لانها تعطي أكبر زيادة في دالة الهدف، حيث تسمى بالمتغيرة الداخلة لأننا ندخلها إلى الحل. وهي في مثالنا هي المتغيرة (Y) لأنها تقابل أكبر قيمة موجبة في سطر التقيم وهي (30). والتي تعني أنه كل وحدة واحدة يتم انتاجها من النوع الثاني سوف نؤدي إلى تحسن في قيمة دالة الهدف بـ 30 وحدة نقدية.

ملاحظة: في حالة تساوي أكبر قيمتين موجبتين في سطر التقييم فإنه يتم اختيار المتغيرة الداخلة عشوائياً.

ب - تحديد المتغيرة الخارجة: إن إدخال متغيرة للحل يتطلب بالضرورة إخراج متغيرة أخرى ويتم تحديد المتغيرة الخارجة في مرحلتين:

- ✓ نقسم مختلف عناصر العمود (Qj) على العناصر المقابلة له في عمود المتغيرة الداخلة.
- ✓ نقارن بين نتائج المرحلة السابقة وتكون المتغيرة الخارجة هي المتغيرة التي نجد في سطرها أقل حاصل قسمة، أي : $\text{Min}\left[\frac{[Qj]}{[a_{ik}]}\right]$ حيث (k) يشير إلى عمود المتغيرة الداخلة وعليه فإن:

$$\text{Min}\begin{bmatrix} \frac{2400}{6}=400 \\ \frac{1000}{1}=1000 \end{bmatrix}=400$$

هذه القيمة تقابل المتغيرة (e_1) لذلك تعتبر المتغيرة الخارجة.

ملاحظة: دائما ما نأخذ أقل حاصل القسمة في تحديد المتغيرة الداخلة بغض النظر عن دالة الهدف.

ج - تحديد نقطة المحور: يعرف المحور بأنه نقطة تقاطع المتغيرة الداخلة والمتغيرة الخارجة أو هو المعامل التقني الذي تتقاطع عنده سطر المتغيرة الخارجة مع عمود المتغيرة الداخلة.

ونقطة المحور في المثال السابق $a_{1j}=a_{12}=6$ (أنظر الجدول 01-02)

د – إتمام الجدول: بعد تحديد نقطة المحور وإدخال وإخراج المتغيرات تتغير المصفوفة والجدول كذلك وتحسب مختلف عناصر الجدول من جديد وفقا للمراحل التالية:

1- نقسم جميع قيم سطر المحور على نقطة المحور، بما فيها المحور نفسه؛
2- نضع كل عناصر عمود المحور تساوي الصفر ماعدا نقطة المحور تساوي دائما الواحد.
3- نحدد باقي قيم الجدول وفقا للعلاقة التالية:

قيمة العنصر الجديد = (قيمة العنصر القديم) - $\frac{\text{(قيمة عنصر سطر المحور).(قيمة عنصر عمود المحور)}}{\text{نقطة المحور}}$

وفقا للعلاقة السابقة، نقوم بتحديد مختلف قيم المتغيرة a_{ij} الجديدة على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{21} = 2 - \frac{(3).(1)}{6} = 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow a_{21} = \frac{3}{2} \\ a_{23} = 0 - \frac{(1).(1)}{6} = 0 - \frac{1}{6} \Rightarrow a_{23} = -\frac{1}{6} \\ Q_2 = 1000 - \frac{(2400).(1)}{6} = 1000 - 400 \Rightarrow Q_2 = 600 \end{bmatrix}$$

يمكن وضع نتائج الخطوات والمراحل السابقة من مثالنا في الجدول التالي:

الجدول (03-01)			20	30	0	0
Ci	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
30	Y	400	½	1	$^1/_6$	0
0	e_2	600	$^3/_2$	0	$^{-1}/_6$	1
Z = 12000			**5**	0	-5	0

إن الحل الذي تضمنه الجدول (03-01) يعني: أنه يمكن إنتاج 400 وحدة من النوع الثاني(B) فقط وعدم إنتاج النوع (A) لأن المتغير (X) لا يظهر في عمود "V" وأن هذا الحل يحقق للمؤسسة ربح مقداره 12000 وحدة نقدية. وفي مقابل هذا الحجم من الإنتاج نلاحظ أن طاقة الورشة قد استنفذت بالكامل؛ أي تم إستعمال 2400 ساعة عمل كاملة من أجل إنتاج 400 وحدة من المنتوج الثاني، مع استهلاك 400 وحدة قياس فقط مادة البلاستيك وتبقى منها 600 وحدة قياس غير مستغلة لأن قيمة متغير الفوارق في المعادلة الثانية (e_2 =600) لاحظ أن هذا الحل هو نفسه المتوصل إليه بطريقة الرسم البياني ويظهر عند النقطة (M) الموضحة في الشكل (01-01).

ملاحظة: تسمى قيم سطر التقييم المقابلة للمتغيرات الأساسية بتكلفة الفرصة البديلة، أو تكلفة التضحية أو السعر الحدي، وهي القيمة التي تتغير بها قيمة دالة الهدف من جراء تغيير في المورد المقابل بوحدة واحدة.

واضح أن هذا الحل أفضل من الحل الموضح في الجدول (02-01) لكنه ليس حلا امثلا نظراً لوجود قيمة موجبة في السطر الاخير (سطر التقييم) وهي القيمة (5+) والتي تعني أنه لا تزال هناك فرصة أخرى بديلة لتحسين قيمة دالة الهدف؛ أي يمكن للمؤسسة تحقيق زيادة في الربح الاجمالي بخمسة وحدات نقدية (5 و.ن) عن كل وحدة تقرر إنتاجها من النوع الأول (A).

لذلك يتم اختيار المتغيرة التي تسمح بتحقيق أكبر تحسين في قيمة دالة الهدف. كما يمكن الأخذ بالمفهوم المعاكس في حالة تقليل دالة الهدف. (لهذا ننصح بأخذ أكبر قيمة بالقيمة المطلقة).

ومادام الحل غير أمثل فاننا نقوم بعملية التحسين مرة أخرى وهذا بإتباع نفس الخطوات السابقة. وعليه، تكون المتغيرة الداخلة هي (X) والمتغيرة الخارجة هي (e_2) ونقطة المحور هي ($^3/_2$) وبعد إجراء مختلف العمليات والمراحل السابقة نحصل على الجدول التالي:

الجدول (04-01)			20	30	0	0
Ci	*V*	*Qj*	*X*	*Y*	e_1	e_2
30	**Y***	**200**	0	1	$^2/_9$	$-^1/_3$
20	**X***	**400**	1	0	$-^1/_9$	$^2/_3$
Z* = 14000			0	0	$\mathbf{-^{40}/_9}$	$\mathbf{-^{10}/_3}$

شرح الجدول:

نلاحظ أن جميع عناصر سطر التقييم أقل أو تساوي الصفر، وهذا يعني أنه لا توجد هناك إمكانية لتحسين قيمة دالة الهدف، لذلك يعتبر هذا الحل حل أمثل، وعنده تحقق المؤسسة أعظم الأرباح (Z^* =14000) وهذا يعني أن المؤسسة تنتج 400 وحدة من النوع الأول "A" و200 وحدة من النوع الثاني من لعب الأطفال"B" مع الاستغلال الكامل للموارد المتاحة (ساعات العمل والمادة الأولية)؛ لأنه لا تظهر في جدول الحل النهائي أية قيمة لمتغيرات الفوارق. وهو نفس الحل الذي توصلنا إليه بالطريقة الجبرية أو بطريقة الرسم البياني والمتمثل في النقطة (M) (انظر الشكل 01-01).

ملاحظة: يمكن التأكد من صحة الحل إذا كان مقلوب محدد مصفوفة المعاملات في جدول الحل القاعدي تساوي محدد مصفوفة المعاملات في جدول الحل الأمثل.

لنراقب ذلك في مثالنا فإن:

- ✓ مصفوفة المعاملات في الجدول الأخير بعد اعادة ترتيب المتغيرات هي: $\begin{pmatrix} -^1/_9 & ^2/_3 \\ ^2/_9 & -^1/_3 \end{pmatrix}$

وقيمة محدد هذه المصفوفة هو:

$$\begin{vmatrix} -^1/_9 & ^2/_3 \\ ^2/_9 & -^1/_3 \end{vmatrix} = (-^1/_9)(-^1/_3) - (^2/_9)(^2/_3) = \ ^1/_{27} - ^4/_{27} = -^3/_{27}$$

- ✓ مقلوب قيمة المحدد يساوي: $-\frac{27}{3} = -9$

أما مصفوفة المعاملات في الجدول الأول هي:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

وقيمة محدد هذه المصفوفة هو:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3(1) - 2(6) = 3 - 12 = -9$$

تمثل مصفوفة المعاملات المقابلة لمتغيرات الفوارق في الجدول(01-04) ما يسمى أسعار الظل، وهي تقيس مدى مساهمة الوحدة الواحدة من الموارد المتاحة في تحقيق الهدف، حيث تعني عناصر عمود متغير الفوارق (e_1) (لقد تمت اضافة هذا المتغير في المعادلة الأولى الخاصة بساعات العمل) مما يعني أن زيادة ساعة عمل واحدة لطاقة ورشة التصنيع سوف تؤدي إلى ربح إضافي بمقدار ($^{40}/_9$ و.ن)، فإذا ما ارتفعت طاقة هذه الورشة بساعة عمل واحدة فقط من 2400 ساعة عمل متاحة إلى 2401 ساعة عمل، فإن ذلك سيؤدي إلى زيادة في عدد الوحدات المنتجة من النوع الثاني (B) بـ ($^{2}/_9$) وحدة وفي مقابل ذلك انخفاض في عدد وحدات النوع الأول (A) بـ ($^{1}/_9$) إنها تعبر عن الإنتاج الحدي لساعة العمل (أي مساهمة الوحدة الأخيرة من ساعة العمل في الإنتاج الكلي لكل نوع من المنتوجات، بينما القيمة ($^{40}/_9$ و.ن) تعبر عن الربح الحدي لساعة العمل الواحدة).

لذلك، بإضافة ساعة عمل واحدة فقط فإنه:

- بدلا ما تكون ($X = 400$) تصبح $X = (400 - {}^{1}/_{9})$
- وبدلا من أن تكون ($Y = 200$) ستكون $Y = (200 + {}^{2}/_{9})$
- وتكون عندها قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = 20(400 - \frac{1}{9}) + 30(200 + \frac{2}{9}) \Rightarrow Z = (8000 - \frac{20}{9}) + (6000 + \frac{60}{9})$$

$$Z = (8000 + 6000) + (\frac{60}{9} - \frac{20}{9}) \Rightarrow Z = 14000 + \frac{40}{9}$$

أي أن قيمة دالة الهدف ارتفعت بزيادة قدرها ($^{40}/_9$) وحدة نقدية، وهذا ما يتضح من الجدول السابق. وبالمقابل ماذا يحدث لو أن طاقة الورشة قد انخفضت بساعة عمل واحدة فقط؟.

إن تخفيض ساعة عمل ورشة التصنيع بساعة عمل واحدة يؤدي إلى تخفيض في الربح بمقدار (40/9 و.ن) فإذا انخفضت طاقة هذه الورشة من 2400 ساعة عمل إلى 2399 ساعة عمل، فإن ذلك يؤدي إلى انخفاض في عدد الوحدات المنتجة من النوع الثاني (B) بوحدتين ($^2/_9$) وزيادة في عدد وحدات النوع (A) بوحدة واحدة ($^1/_9$).

بدلا ما تكون ($X = 400$) تصبح $X = (400 + {}^1/_9)$

وبدلا ما تكون ($Y = 200$) تكون $Y = (200 - {}^2/_9)$

وعندها تكون قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = 20(400 + \frac{1}{9}) + 30(200 - \frac{2}{9})$$
$$Z = (8000 + \frac{20}{9}) + (6000 - \frac{60}{9})$$
$$Z = (8000 + 6000) + (\frac{20}{9} - \frac{60}{9}) \Rightarrow Z = 14000 - \frac{40}{9}$$

أي أن قيمة دالة الهدف انخفضت بـ($^{40}/_9$) وحدة نقدية، وهذا ما يتضح من الجدول السابق.

بشكل عام، وبغض النظر عن زيادة أو انخفاض في طاقة هذه الورشة، سنفترض أن هناك تغيير في طاقة الورشة سواء بالزيادة أو بالانخفاض وسيكون مقدار التغيير هو (Δ_1) ساعة عمل لذلك سيكون:

- $X = 400 - ({}^{\Delta 1}/_9)$
- $Y = 200 + ({}^{2\Delta 1}/_9)$
- وتكون عندها قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = 20(400 - \frac{\Delta_1}{9}) + 30(200 + \frac{2\Delta_1}{9}) \Rightarrow Z = (8000 - \frac{20\Delta_1}{9}) + (6000 + \frac{60\Delta_1}{9})$$
$$Z = (8000 + 6000) + (\frac{60\Delta_1}{9} - \frac{20\Delta_1}{9}) \Rightarrow Z = 14000 + \frac{40\Delta_1}{9}$$

ملاحظة: سيكون لنا شرح مفصل لاحقا عند التطرق لتحليل حساسية الحل.

نفس الشيء بالنسبة لقيم عناصر عمود المتغيرة (e_2) (المورد الثاني المادة الأولية البلاستيك) إذ أن كل وحدة قياس إضافية من هذه المادة تؤدي إلى زيادة في عدد الوحدات الممكن إنتاجها من النوع (A) بـ ($^2/_3$ وحدة) وانخفاض في عدد وحدات النوع الثاني بـ ($^1/_3$ وحدة) ذلك ما يؤدي إلى زيادة في قيمة دالة الهدف بـ ($^{10}/_3$ وحدات نقدية).

فلو أن المادة الأولية المتاحة هي (1001 وحدة قياس) أي بزيادة وحدة قياس واحدة فإنه في هذه الحالة : بدلا ما تكون ($X = 400$) تصبح $X = (400 + {}^{2}/_{3})$ وبدلا من أن ($Y = 200$) فإنها $Y = (200 - {}^{1}/_{3})$ وتكون عندها قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = 20(400 + \frac{2}{3}) + 30(200 - \frac{1}{3})$$

$$Z = (8000 + \frac{40}{3}) + (6000 - \frac{30}{9})$$

$$Z = (8000 + 6000) + (\frac{40}{3} - \frac{30}{3}) \Rightarrow Z = 14000 + \frac{10}{3}$$

وبالتالي يمكن القول أن قيمة دالة الهدف ارتفعت (${}^{10}/_{3}$) وحدات نقدية نتيجة إضافة وحدة قياس واحدة من مادة البلاستيك، وهذا ما يتضح من الجدول السابق.

أما عند تكون الكميات المتاحة من هذه المادة 999 وحدة قياس، أي هناك انخفاض في كمية المادة الأولية المتاحة بوحدة قياس واحدة، فإن ذلك سوف يؤدي انخفاض في عدد الوحدات من النوع (A) بـ (${}^{2}/_{3}$ وحدة) وزيادة في عدد وحدات النوع (B) بـ (${}^{1}/_{3}$ وحدة) ذلك ما يؤدي إلى انخفاض في قيمة دالة الهدف بـ (${}^{10}/_{3}$ وحدات نقدية).

إذن بدلا ما تكون ($X = 400$) سوف تكون $X = (400 - {}^{2}/_{3})$

وبدلا من أن تكون كذلك ($Y = 200$) فإن: $Y = (200 + {}^{1}/_{3})$

وتكون عندها قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = 20(400 - \frac{2}{3}) + 30(200 + \frac{1}{3})$$

$$Z = (8000 - \frac{40}{3}) + (6000 + \frac{30}{9})$$

$$Z = (8000 + 6000) + (\frac{30}{3} - \frac{40}{3}) \Rightarrow Z = 14000 - \frac{10}{3}$$

أي أن قيمة دالة الهدف انخفضت (${}^{10}/_{3}$) وحدات نقدية نتيجة لانخفاض مادة البلاستيك بوحدة قياس واحدة، وهذا ما يتضح من الجدول السابق أيضا. وبنفس المنطق السابق وبغض النظر عن زيادة أو انخفاض في مادة البلاستيك، سنفترض أن التغيير بالزيادة أو بالانخفاض سيكون مقدار التغيير هو (Δ_2) وحدة قياس لذلك سيكون: $X = 400 + ({}^{2\Delta 2}/_{3})$ بينما سيكون $Y = 200 - ({}^{\Delta 2}/_{3})$ **وتكون عندها قيمة دالة الهدف هي:**

$$Z = 20(400 + \frac{2\Delta_2}{3}) + 30(200 - \frac{\Delta_2}{3})$$

$$Z = (8000 + 6000) + (\frac{40}{3} - \frac{30}{3}) \Rightarrow Z = 14000 + \frac{10}{3}$$

I – 07 – الحلول البديلة لمسائل البرمجة الخطية:

نقول أنه لدينا حل بديل إذا كانت أحد المتغيرات الأساسية التي لم تدخل للحل ذات قيمة معدومة في سطر Z وللحصول على الحل البديل يمكن اعتبار هذا المتغير متغير داخل مع إجراء جميع الخطوات التي تطرقنا اليها في عملية التحسين.

مثال (05-01): بالرجوع للمثال الأول (01-01) وعلى افتراض أن المؤسسة قد قررت تصنيع منتوج ثالث من لعب الأطفال (C) حيث تستغرق الوحدة الواحدة من هذا النوع في ورشة التصنيع أربع ساعات ونصف (4.5) وتتطلب استعمال وحدة واحدة ونصف (1.5) من مادة البلاستيك، تعطي ربحا صافيا قدره (25) وحدة نقدية.

المطلوب: إعادة صياغة المشكلة في نموذج رياضي مع الحل.

الحل: النموذج الرياضي

$$\begin{pmatrix} [MAX]\ Z = 20X_1 + 30X_2 + 25X_3 \\ 3X_1 + 6X_2 + {}^{9}/_{2}X_3 \le 2400 \\ 2X_1 + X_2 + {}^{3}/_{2}X_3 \le 1000 \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{pmatrix}$$

أولا: تحويل المتراجحات إلى معادلات على النحو التالي

$$\begin{pmatrix} [MAX]\ Z = 20X_1 + 30X_2 + 25X_3 + 0e_1 + 0e_2 \\ 3X_1 + 6X_2 + {}^{9}/_{2}X_3 + e_1 = 2400 \\ 2X_1 + X_2 + {}^{3}/_{2}X_3 + e_2 = 1000 \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{pmatrix}$$

- الحل القاعدي

الجدول (05-01)			20	30	25	0	0
Ci	V	Qj	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2
0	e_1	2400	3	**6**	$^{9}/_{2}$	1	0
0	e_2	1000	2	1	$^{3}/_{2}$	0	1
$Z = \sum Ci\,Qj = 0$			20	**30**	25	0	0

ثانيا: تحديد

- المتغيرة الداخلة: هي المتغيرة X_2
- المتغيرة الخارجة: هي المتغيرة e_1
- نقطة المحور: تتمثل في العنصر 6

ثالثا: إتمام الجدول

الجدول (01-06)			20	30	25	0	0
Ci	V	Qj	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2
30	X_2	400	½	1	$^3/_4$	$^1/_6$	0
0	e_2	600	$^3/_2$	0	$^3/_4$	$-^1/_6$	1
Z = 12000			**5**	0	5/2	-5	0

يبدو أن هذا الحل غير أمثل لوجود قيمة موجبة في آخر سطر بالجدول وهي القيمة 5 التي تقابل المتغيرة X_1 وعليه فإن:

- المتغيرة الداخلة: هي المتغيرة X_1
- المتغيرة الخارجة: هي المتغيرة e_2
- نقطة المحور: تتمثل في العنصر $^3/_2$

الجدول (01-07)			20	30	25	0	0
Ci	V	Qj	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2
30	X_2	200	0	1	$^1/_2$	$^2/_9$	$^{-1}/_3$
20	X_1	400	1	0	$^1/_2$	$-^1/_9$	$^2/_3$
Z = 14000			0	0	0	$-^{40}/_9$	$-^{10}/_9$

يتضح من الجدول أن هذا الحل هو حل امثل لأنه لا توجد إمكانية لتحسين دالة الهدف وهو نفس الحل المتوصل إليه سابقا، والذي يعني أن المؤسسة تنتج 400 وحدة من النوع الأول و 200 وحدة من النوع الثاني، وتحقق بذلك المؤسسة أقصى ربح، حيث قيمة دالة الهدف هي 14000، وهذا دون أن تنتج المنتوج الثالث لأن قيمة (X_3) لا تظهر في جدول الحل النهائي. ولكن، يتضح وأن قيمة هذا المتغير في سطر التقييم هي قيمة معدومة مما يعني أن هناك حل آخر بديل لهذا الحل، والذي تكون عنده قيمة دالة الهدف هي نفسها، حيث يمكن الوصول إلى هذا الحل "الحل البديل" عن طريق إدخال المتغيرة (X_3) للحل وبذلك تكون:

- المتغيرة الداخلة وهي المتغيرة X_3
- المتغيرة الخارجة وهي المتغيرة X_2
- نقطة المحور وتتمثل في العنصر $^1/_2$

وبعد إجراء مختلف العمليات والمراحل السابقة تحصل على الجدول التالي:

الجدول (08-01)			20	30	25	0	0
Ci	V	Qj	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2
25	X_3	400	0	2	1	$^{4}/_{9}$	$^{-2}/_{3}$
20	X_1	200	1	-1	0	$-^{1}/_{3}$	1
Z = 14000			0	0	0	$^{-40}/_{9}$	$^{-10}/_{3}$

من هذا الجدول يتبين وان قيمة دالة الهدف لم تتغير مما يعني أن الحل هو بديلا للحل السابق، حيث يمكن للمؤسسة أن تنتج 200 وحدة فقط من النوع الأول و400 وحدة من النوع الثالث وتحقق أقصى ربح وقيمته هي 14000.

مما سبق يتضح وأن أمام المؤسسة بديلين وعليها أن تختار ما يناسب ظروفها وهي:

البديل الأول: أن تنتج 400 وحدة من النوع الأول و200 وحدة من النوع الثاني

$$X_1 = 400$$

$$X_2 = 200$$

$$X_3 = 000$$

$$Z= 14000$$

البديل الثاني: نتج 400 وحدة من النوع الأول و200 وحدة من النوع الثاني

$$X_1 = 200$$

$$X_2 = 000$$

$$X_3 = 400$$

$$Z= 14000$$

تمارين

التمرين (I-1)**:** تنتج إحدى المؤسسات ثلاثة أنواع من المنتجات، يتطلب مرورها على ورشتي التقطيع والتركيب، حيث تستغرق الوحدة الواحدة من النوع الأول ربع ساعة عمل في ورشة التقطيع ونصف ساعة في ورشة التركيب. بينما تحتاج الوحدة من النوع الثاني إلى ثلاثين دقائق عمل فقط في ورشة التقطيع، وساعة عمل في ورشة التركيب. في حين تحتاج كل وحدة من النوع الثالث إلى عشرون دقيقة في ورشة التقطيع، وساعتين في ورشة التركيب. سعر بيع هذه المنتجات هو 150، 200، 250 وحدة نقدية على الترتيب. فإذا كان العمل بهذه المؤسسة يتوقف أيام الجمعة والسبت من كل أسبوع، أما باقي الأيام يتم العمل فيها ثماني ساعات عمل يومياً. تشتغل خلالها ورشة التقطيع أيام الأحد والاثنين والثلاثاء بتكلفة تشغيل 300 وحدة نقدية يوميا أما ورشة التركيب فهي تشتغل يومي الأربعاء والخميس فقط بتكلفة تشغيل200 وحدة نقدية يوميا

المطلوب: ضع هذه المسألة في شكل نموذج برمجة خطية دون حلها.

الحل:

1- تحديد الطاقة الأسبوعية لورشة التقطيع:

(3 أيام).(8 ساعات) = 24 ساعة/الأسبوع

أو (60X24) = 1440 دقيقة/الأسبوع

2- تحديد الطاقة الأسبوعية لورشة التركيب:

(2 يومين).(8 ساعات) = 16 ساعة/الأسبوع

أو (60X16) = 960 دقيقة/الأسبوع

3- النموذج الرياضي للمسألة:

نرمز بالرموز التالية (X_1, X_2, X_3) للكمية التي يمكن إنتاجها من الأنواع الثلاثة من المنتجات على الترتيب

- دالة الهدف (تعظيم رقم الأعمال):

$$(Max)\ Z= 150X_1+200\ X_2+ 250X_3$$

- القيود:

- قيد طاقة ورشة التقطيع:

بالساعات: $\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{3}X_3\leq 24$

بالدقائق: $15X_1+30X_2+20X_3\leq 1440$

- قيد طاقة ورشة التركيب:

بالساعات: $\frac{1}{2}X_1+X_2+2X_3\leq 16$

بالدقائق: $30X_1+60X_2+120X_3\leq 960$

- قيد عدم السلبية: $X_1, X_2, X_3\geq 0$

وعليه، فإن النموذج الرياضي لهذه المسألة هو

$$(Max)\ Z= 150X_1+200X_2+250X_3$$

$$\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{3}X_3\leq 24$$

$$\frac{1}{2}X_1+X_2+2X_3\leq 16$$

$$X_1\geq 0 ،\ X_2\geq 0 ،X_3\geq 0$$

أو

$$(Max)\ Z= 150X_1+200X_2+250X_3$$

$$15X_1+30X_2+20X_3\leq 1440$$

$$30X_1+60X_2+120X_3\leq 960$$

$$X_1\geq 0 ،\ X_2\geq 0 ،X_3\geq 0$$

التمرين (I-2)**:** تنتج ورشة خياطة منتوجين الأول خاص بالنساء والثاني للأطفال، بعد عملية التفصيل يتطلب مرورهما على آلة للخياطة، حيث تستغرق القطعة الواحدة من المنتوج الأول ثلاث ساعات عمل في التفصيل وساعة عمل واحدة على آلة الخياطة. بينما تحتاج القطعة الواحدة من المنتوج الثاني إلى ساعتين عمل في التفصيل، وساعتين عمل للخياطة. الربح في القطعة الواحدة من هذه المنتجات هو400، 500 دينار على الترتيب. خصصت صاحبة هذه الورشة 1500 ساعة عمل لعمليات التفصيل، و1000 ساعة عمل للخياطة.

1. ضع هذه المسألة في شكل نموذج رياضي.
2. حل هذا النموذج بالطريقة البيانية.
3. أوجد حل هذه المسألة باستخدام الطريقة المبسطة.

الحل:

(x_1) عدد القطع التي يمكن إنتاجها من النوع الأول الخاص بالنساء

(x_2) عدد القطع التي يمكن إنتاجها من النوع الثاني الخاص بالأطفال

- دالة الهدف (تعظيم الأرباح):

$$(Max)\ Z = 400X_1 + 500\ X_2$$

- القيد الأول: قيد الزمن المخصص لعمليات التفصيل

$$3x_1 + 2x_2 \geq 1500$$

- القيد الثاني: قيد الزمن المخصص لعمليات الخياطة

$$x_1 + 2x_2 \leq 1000$$

❶- النموذج الرياضي للمسألة

النموذج المعياري

$$\left(\begin{array}{c} [MAX]\ Z = 400\ X_1 + 500\ X_2 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 1500 \\ X_1 + 2X_2 \leq 1000 \\ X_1,\ X_2 \geq 0 \end{array}\right)$$

❷- حل النموذج بالطريقة البيانية

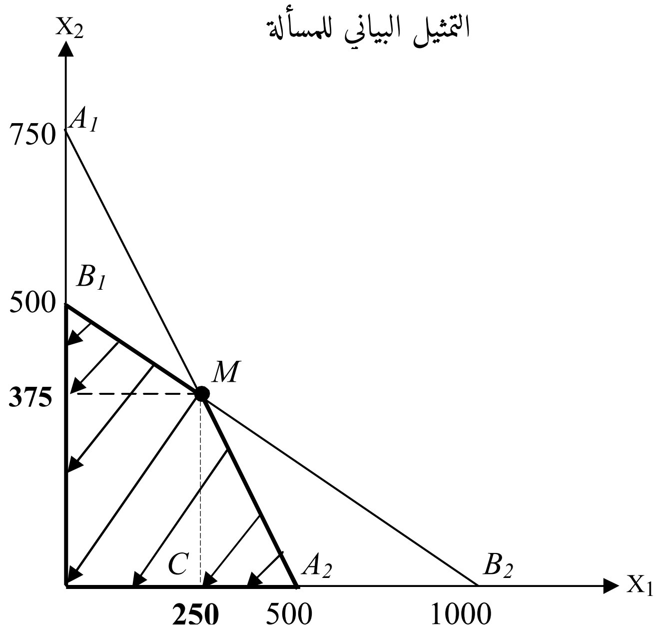
القيد الأول: $3x_1 + 2x_2 \leq 1500$

$$\begin{array}{l} X_1=0 \Rightarrow X_2=750 \\ X_2=0 \Rightarrow X_1=500 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A_1=(0,750) \\ A_2=(500,0) \end{array}$$

القيد الثاني: $x_1 + 2x_2 \leq 1000$

$$\begin{array}{l} X_1=0 \Rightarrow X_2=500 \\ X_2=0 \Rightarrow X_1=1000 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} B_1=(0,500) \\ B_2=(1000,0) \end{array}$$

التمثيل البياني للمسألة



وبالتالي فإن منطقة الحلول الممكنة لهذا النموذج هي المساحة المحددة بالنقاط التالية: (OB_1MA_2)

ولتحديد الحل الأمثل لهذا النموذج نقوم بحساب قيمة دالة الهدف عند حدود هذه المنطقة

الحلول الممكنة	قيد عمليات التفصيل	قيد عمليات الخياطة	قيمة دالة الهدف
النقطة(O): $X_1= 0$ $X_2= 0$	1500 غير مستغلة	1000 غير مستغلة	00
النقطة(B_1): $X_1= 0$ $X_2= 500$	500 غير مستغلة	1000 مستغلة تماما	250000
النقطة(A_2): $X_1=500$ $X_2= 0$	1500 مستغلة تماما	500 غير مستغلة	200000
النقطة(M) $X_1=250$ $X_2= 375$	1500 مستغلة تماما	1000 مستغلة تماما	287500

بمقارنة الحلول الممكنة يتضح وأن الحل الأمثل يكون عند النقطة **$M(250,375)$** حيث يمكن إنتاج 250 وحدة من النوع الأول الخاص بالنساء و200 وحدة من النوع الثاني الخاص بالأطفال وتحقق المؤسسة أقصى ربح وقدره 287500 دينار مع الاستغلال الكامل لساعات العمل.

❸- الحل بالطريقة المبسطة

- النموذج القانوني

$$\begin{cases} [MAX]\ Z = 400\,X_1 + 500\,X_2 + 0e_1 + 0e_2 \\ 3X_1 + 2X_2 + e_1 = 1500 \\ X_1 + 2X_2 + e_2 = 1000 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

- نموذج الحل القاعدي

			400	500	0	0
C_i	V	Q_j	X_1	X_2	e_1	e_2
0	e_1	1500	3	2	1	0
0	e_2	1000	1	**2**	0	1
Z = 0			400	500	0	0

- تحسين الحل

			400	500	0	0
C_i	V	Q_j	X_1	X_2	e_1	e_2
0	e_1	500	2	0	1	-1
500	X_2	500	$^1/_2$	1	0	$^1/_2$
Z = 250000			150	0	0	-25

- الحل النهائي

			400	500	0	0
C_i	V	Q_j	X_1	X_2	e_1	e_2
400	X_1	250	1	0	$^1/_2$	$-^1/_2$
500	X_2	375	0	1	$-^1/_4$	$^3/_4$
Z = 287500			0	0	$-^{15}/_2$	$-^{35}/_2$

مادام الحل نهائي ولا توجد إمكانية لعملية التحسين، فإن هذا الحل أمثل وهو نفسه المتوصل اليه بطريقة الرسم البياني، وعنده يمكن لصاحبة هذا الورشة إنتاج 250 وحدة من النوع الأول الخاص بالنساء و200 وحدة من النوع الثاني الخاص بالأطفال وتحقق المؤسسة أقصى ربح وقدره 287500 دينار مع الاستغلال الكامل للوقت المخصص لعمليات التفصيل والخياطة.

التمرين (I -3): تتمثل مهمة مسؤول مصلحة الإشهار في إيجاد الكيفية المناسبة لتقسيم ميزانية الإشهار المقدرة بمبلغ 70000 وحدة نقدية على وسائل الإعلام المختلفة والمبينة في الجدول أدناه، إذ يجب إعداد على الأقل 10 ومضات إشهارية متلفزة، وفي نفس الوقت لا يمكن صرف أكثر من 42000 وحدة نقدية لهذه العملية. كما أن الوقت المخصص للقناة الثانية يجب أن يفوق على الأقل الوقت المتاح للقناتين الأولى والأرضية بدقيقتين، بينما عدد مرات الإشهار الإذاعي يجب أن لا يتجاوز 20 إشهار أكثر من الإشهار المتلفز.

وسيلة الإعلام	تكلفة الإعلان	درجة التأثير	الوقت المتاح للإعلان
القناة الأرضية	3000	120	45 ثانية
القناة الفضائية الأولى	4500	150	30 ثانية
القناة الفضائية الثانية	2500	90	50 ثانية
الإذاعة	2000	75	40 ثانية

المطلوب : ضع المسألة في شكل نموذج رياضي دون حلها .

الحل:

على إفتراض أن:

X_1 عدد الومضات الإشهارية التي يمكن إعدادها في القناة الأرضية

X_2 عدد الومضات الإشهارية التي يمكن عدادها في القناة الفضائية الأولى

X_3 عداد الومضات الإشهارية التي يمكن إعدادها في القناة الفضائية الثانية

X_4 عداد الإعلانات الاشهارية التي يمكن إعدادها في القناة الإذاعية

- **النموذج الرياضي للمسألة:**

- دالة الهدف: البحث عن الوصول إلأكبر درجة من التأثير الاشهاري

$$(Max)\ Z= 120X_1 + 150X_2 + 900X_3 + 75\ X_4$$

- قيد ميزانية الإشهار:

$$3000X_1 + 4500X_2 + 2500X_3 + 2000X_3 \leq 3600$$

- قيد الومضات الإشهارية المتلفزة في القنوات الأرضية والفضائيتين الأولى والثانية:

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 10$$

- قيد الميزانية المخصصة للومضات الإشهارية المتلفزة

$$3000X_1 + 4500X_2 + 2500X_3 \leq 42000$$

- قيد الومضات الإشهارية في القناة الثانية:

$$50X_3 \geq 45X_1 + 30X_2 + 120$$

- قيد الإعلانات الإشهارية في الإذاعة:

$$X_4 \leq X_1 + X_2 + X_3 + 20$$

- قيد عدم السلبية:

$$X_1 \text{ et } X_2 \text{ et } X_3 \text{ et } X_4 \geq 0$$

التمرين I -4: أبحث عن منطقة الحلول الممكنة في كل حالة من الحالات التالية:

الحالة الأولى

$(Max)\ Z = 4X1 + 3X2$

$2X1 + 3X2 \le 6$

$3X1 + 2X2 \le 3$

$2X2 \le 5$

$2X1 + X2 \le 4$

$X1 ، X2 \ge 0$

الحالة الثانية

$(Min)\ Z = 18X + 10Y$

$4X + 6Y \ge 48$

$12X + 10Y \ge 120$

$10X + 15Y \le 150$

$X، Y \ge 0$

الحالة الثالثة

$(Min)\ Z = 10X1 + 12X2$

$5X1 + 6X2 \le 60$

$8X1 + 4X2 \le 72$

$3X1 + 5X2 \le 45$

$X1 ، X2 \ge 0$

الحالة الرابعة

$(Max)\ Z = 6X + 8Y$

$30X + 20Y \le 300$

$5X + 10Y \le 110$

$4X - Y = 0$

$X = 0$

$X ، Y \ge 0$

الحالة الخامسة

$(Max)\ Z = 5X1 + 8X2$

$6X2 + 4X1 \le 24$

$X2 + 2X1 \le 18$

$3X1 + 9X2 \ge 36$

$X1 ، X2 \ge 0$

الحالة السادسة

$(Min)\ Z = 6X + 4Y$

$X \ge 10$

$Y \ge 12$

$X \ge 0$

$Y \ge 0$

التمرين I -5: باستخدام طريقة الرسم البياني، أبحث عن الحل الأمثل في الحالات التالية:

الحالة الأولى

$(Max)\ Z = 5X1 + 3X2$

$X1 + X2 \le 6$

$X1 \le 3$

$X2 \le 3$

$2X1 + 3X2 \ge 3$

$X1 ، X2 \ge 0$

الحالة الثانية

$(Max)\ Z = 50X1 + 80X2$

$2X1 + 2X2 \le 100$

$4X1 \le 400$

$8X2 \le 320$

$40X1 + 20X2 \le 1600$

$X1 + X2 \ge 30$

$X ، Y \ge 0$

الحالة الثالثة

$(Min)\ Z = 5X1 + 2X2$

$X1 + X2 \le 10$

$X1 = 5$

$X1 \ge 0$

$X2 \ge 0$

الحالة الرابعة

$(Min)\ Z = 6X1 - 2X2$

$X1 + X2 \ge 1$

$X1 = 1$

$X2 = 1$

$X1 ، X2 \ge 0$

التمرين I-6: حل جملة المعادلات في كل حالة من الحالات التالية، بإستعمال

1) طريقة التعويض

2) طريقة كرامر

1- الحالة الأولى

$$\begin{cases} 4X_1 + 5X_2 + 3X_3 = 77 \\ 5X_1 + X_2 + 2X_3 = 63 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_3 = 44 \end{cases}$$

2- الحالة الثانية

$$\begin{cases} 5X_1 + 4X_2 + 3X_3 = 82 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 = 23 \\ 2X_1 + 3X_2 + 5X_3 = 55 \end{cases}$$

3- الحالة الثالثة

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 + X_3 = 130 \\ 3X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 210 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 100 \end{cases}$$

التمرين I-7: أوجد الشكل المعياري (*Standard*) في كل حالة من الحالات التالية:

الحالة الأولى

$$\begin{cases} (Min)\ Z = 4x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + x_2 \le 27 \\ 5x_1 + 5x_2 = 60 \\ 6x_1 + 4x_2 \ge 60 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

الحالة الثانية

$$\begin{cases} (Max)\ Z = 4X + 6Y \\ 4X + Y \le 60 \\ X + 2Y \ge 50 \\ Y = 20 \\ X \ge 0 \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

الحالة الثالثة

$$\begin{cases} (Min)\ Z = 3X_1 + 5X_2 \\ 3X_1 + 2X_2 \ge 6 \\ X_1 \le 5 \\ X_2 \ge 1 \\ X_1 \ge 0 \\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

الحالة الرابعة

$$\begin{cases} (Min)\ Z = X + 10Y \\ 12X + 15Y \le 200 \\ 6X + 4Y \le 25 \\ Y \le 10 \\ X \ge 0 \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

الحالة الخامسة

$$\begin{cases} (Max)\ Z = 120\,Y_1 + 230\,Y_2 \\ 5Y_1 + 4Y_2 + 3Y_3 \le 160 \\ 2Y_1 + Y_2 = 89 \\ 4Y_2 + 5Y_3 \ge 62 \\ Y_1 \ge 0,\ Y_2 \ge 0,\ Y_3 \ge 0 \end{cases}$$

التمرين I -8: أبحث عن الحل الأمثل في كل حالة من الحالات التالية

الحالة الأولى

$$(Min)\ Z_1 = 24X_1 + 18X_2 + 36X_3$$
$$4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \geq 5$$
$$6X_1 + X_2 + 9X_3 \geq 8$$
$$X_1 ، X_2 ، X_3 \geq 0$$

الحالة الثانية

$$(Min)\ Z_2 = 6X_1 + 4X_2 + 24X_3$$
$$2X_1 + 2X_2 + 6X_3 \geq 18$$
$$3X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 10$$
$$X_1 ، X_2 ، X_3 \geq 0$$

الحالة الثالثة

$$(Min)\ Z_1 = 6X_1 + 4X_2 + 24X_3$$
$$2X_1 + 2X_2 + 6X_3 \geq 18$$
$$3X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 18$$
$$X_1 \geq 0 ،\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0$$

الحالة الرابعة

$$(Min)\ Z_2 = 36X_1 + 18X_2 + 24X_3$$
$$2X_1 + 2X_2 + 4X_3 \geq 5$$
$$9X_1 + X_2 + 6X_3 \geq 6$$
$$X_1 \geq 0 ،\ X_2 \geq 0 ،\ X_3 \geq 0$$

الحالة الخامسة

$$(Max)\ Z_3 = 25X_1 + 8X_2 + 35X_3$$
$$12X_1 + 6X_2 + 10X_3 \leq 3200$$
$$5X_1 + 8X_2 + 12X_3 \leq 3450$$
$$X_1 \leq 50,\ X_3 \leq 200$$
$$X_1 \geq 0 ،\ X_2 \geq 0 ، X_3 \geq 0$$

الحالة السادسة

$$(Max)\ Z_3 = 3X_1 + 4X_2 + 3X_3$$
$$3X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 960$$
$$5X_1 + 8X_2 + 4X_3 \leq 5000$$
$$3X_1 + 6X_2 + 3X_3 \leq 2400$$
$$X_1 \geq 0 ،\ X_2 \geq 0 ،\ X_3 \geq 0$$

التمرين I -9: تلقت إحدى المؤسسات طلبية لإنتاج 1000 كغ من خليط خاص من المواد الدهنية التالية M_1, M_2, M_3 تكاليفها هي 07، 06، 05 وحدات نقدية على الترتيب، من بين الشروط التي يخضع لها قسم الإنتاج بهذه المؤسسة أنه لا يمكن استعمال أكثر من 300 كغ من المادة M_1، ويجب استخدام 130 كغ على الأقل من المادة M_2، كما يجب استعمال 200 كغ على الأقل من المادة M_3.

المطلوب: ضع المسألة في شكل نموذج رياضي؟.

التمرين I-10: تنتج إحدى المؤسسات الصناعية ثلاثة منتجات (A, B, C) بحيث يمر كل منتوج بثلاث أقسام إنتاجية هي: القطع، الثني، والتغليف.

الوقت الذي يحتاجه كل منتوج في كل قسم بالساعات والربح الناتج عن كل وحدة منتجة من المنتجات الثلاثة، وطاقة كل قسم معطى كالآتي:

نوع المنتج	قسم القطع	قسم الثني	قسم التغليف	الربح/الوحدة
A	10	5	1	10
B	5	10	1	15
C	2	4	2	20
طاقة القسم	3000	2000	520	-

تريد هذه المؤسسة معرفة ماهي الكمية التي يجب انتاجها من المنتجات الثلاثة لتعظيم الربح.
المطلوب: ضع المسألة في شكل نموذج رياضي.

التمرين I -11: ترغب احدى الوكالات العقارية إنجاز مجمعات سكنية مخصصة للإيجار على قطعة أرض مساحتها الكلية 42000م^2 منها 3000م^2 مخصصة للممرات وبعض الوسائل الترفيهية للأطفال. ولهذا الغرض حددت هذه الوكالة ميزانية قدرها 180 مليون دينار لانجاز هذه المجمعات كاملة في مدة زمنية لا تتجاوز 45000 ساعة عمل حقيقية، ولاستقطاب أكبر عدد ممكن من العائلات قد قررت انجاز نوعين من المجمعات، يتربع المجمع الواحد من النوع الأول على مساحة 800 م^2 ويستوعب 6 عائلات، بينما مساحة المجمع الواحد من النوع الثاني هي600 م^2 ويستوعب 4 عائلات، يتطلب إنجاز المجمع الواحد من النوع الأول 1200 ساعة عمل وبتكلفة 6 مليون دينار، ومدة إنجاز المجمع الواحد من النوع الثاني 600 ساعة عمل وبتكلفة 2 مليون دينار.

المطلوب:

- حدد عدد المجمعات من كل نوع؟
- ثم عدد العائلات التي يستوعبها المشروع ككل؟

التمرين I -12: يريد مهندس معماري أن يضع مخطط لعمارة تحتوي على ثلاث أنواع من المساكن، ولقد تم إختيار الأنواع التالية بحسب عدد الغرف:

عدد الغرف	الأجر الشهري(الكراء)	تكلفة الصيانة الشهرية
F3	27500	7500
F4	35500	10500
F5	45000	15000

تسمح المساحة المخصصة ببناء 600 مسكن على الأكثر، إذا ضاعفنا عدد المساكن من النوع F3 فإننا نستطيع بناء عدد من هذا النوع يفوق النوعين الآخرين بـ 100 مسكن على الأكثر.
إن الطلب على المساكن من نوع F5 أكثر من عدد الأنواع الأخرى بـ 20 مسكن.
المطلوب: يريد منك مالك هذه العمارة ومهندسها مساعدتهما في البحث عن التوزيع الأمثل لهذه المساكن والذي يحقق أكبر ربح ممكن؟.

التمرين I -13: قام صانع أثاث بإدخال مجموعة من المنتجات في السوق، تتكون هذه المجموعة من خزائن وكراسي ومكتبات ومكاتب، يؤدي بيع هذه المنتجات إلى ربح قدره 1000 و.ن بالنسبة للخزانة الواحدة، 2000 و.ن للكرسي، 3000 و.ن للمكتبة، 4000 و.ن للمكتب يحدد انتاج هذه الوحدات بحوالي 400 على الأكثر شهريا، إذا جمعنا انتاج المكتبات وانتاج المكاتب فإن هذا المجموع لا يفوق انتاج الوحدتين الباقيتين بأكثر من 25 وحدة اسبوعيا. إن مجموع إنتاج الكراسي والمكاتب لا يمكن أن يفوق إنتاج الخزائن والمكتبات بأكثر من 150 وحدة في الثلاثي الواحد.

المطلوب: ضع المسألة في شكل نموذج رياضي؟.

التمرين I -14: وقع مدير دائرة البرمجة في مشكلة برمجة أوقات عمل الأقسام الإنتاجية الثلاثة: القطع، الثني، والتغليف، يشتغل قسم القطع أيام السبت، الاثنين، الثلاثاء، الأربعاء أما قسم التغليف يشتغل يومي الاثنين والثلاثاء فقط، بينما قسم الثني فهو يشتغل أيام الأحد الثلاثاء والأربعاء. وقد لاحظ المدير أن أكثر أيام الأسبوع ازدحاماً بالعمل هي الاثنين الثلاثاء والأربعاء. إن من بين شروط العمل في هذه الأقسام ألا يتجاوز عدد العمال يوم الاثنين 08 عمال بما فيهم عمال القطع والتغليف ويوم الثلاثاء 15 عاملاً ويوم الأربعاء 10 عمال. فإذا كانت تكلفة تشغيل العامل الواحد في قسم القطع 500 وحدة نقدية، وتكلفة تشغيل العامل الواحد في قسم تغليف 800 وحدة نقدية، و تكلفة تشغيل العامل الواحد في قسم ثني 400 وحدة نقدية.

المطلوب:

- أكتب النموذج الرياضي لهذه المسألة.
- ضع برنامج العمل الأسبوعي لهذه الأقسام تحل به مشكلة المدير خلال الأيام الثلاثة المذكورة.

التمرين I -15: تنتج ورشة خياطة ثلاث أنواع من الملابس الجاهزة (رجال، نساء، أطفال) لإنتاج الوحدة الواحدة من ملابس الرجال يتطلب خمس ساعات عمل لتصميمها وعشر ساعات تفصيل وساعة واحدة تركيب، بينما لإنتاج الوحدة الواحدة من ملابس النساء يتطلب عشر ساعات تصميم وخمس ساعات تفصيل وساعة عمل واحدة في التركيب، ولإنتاج

وحدة واحدة من ملابس الأطفال تستغرق ساعتين في التركيب وأربع ساعات تصميم وساعتين تفصيل. الوقت المتاح لعمليات التصميم، التفصيل، التركيب هو 500،3000،3600 ساعة عمل على الترتيب.

المطلوب: ضع البرنامج الإنتاجي لهذه الورشة الذي يسمح لها بتحقيق أكبر ربح، إذا علمت أن الربح في الوحدة الواحدة من ملابس الرجال 1200و.ن و1500و.ن للوحدة من ملابس النساء و1500 و.ن للوحدة من ملابس الأطفال.

التمرين I -16: تقوم إحدى الشركات بالتنقيب عن نوعين من المعادن (G_1,G_2) ضمن ثلاث مناجم (A_1,A_2,A_3) في ثلاث مناطق مختلفة (Z_1,Z_2,Z_3) الطاقة الإنتاجية اليومية بالطن لكل منجم بالنسبة لكل نوع من المعادن، وتكلفة التشغيل اليومية، كالتالي:

	المعدن G_1	المعدن G_2	تكلفة التشغيل	المناطق
المنجم A_1	4	4	20	المنطقة Z_1
المنجم A_2	4	6	22	المنطقة Z_2
المنجم A_3	6	1	18	المنطقة Z_3

هدف هذه الشركة هو إستخراج ما لا يقل عن 54 طن من المعدن G_2 و65 طن من المعدن G_1 في نهاية كل أسبوع.

المطلوب: ضع هذه المسألة في شكل نموذج برمجة خطية مع الحل.

الفصل الثاني

02

المسألة المعكوسة في البرمجة الخطية

المسألة المعكوسة في البرمجة الخطية

02-01- نموذج المسألة المعكوسة

المسألة المعكوسة أو كما تسمى أيضا المسألة الثنائية *Problème Dualité* هي مسألة معاكسة للمسألة المطروحة، نلجأ اليها عندما يصعب حل المسألة بالطرق السابقة، كما يمكن اللجوء إليها أيضا للتأكد من أمثلية حل المسالة المطروحة بالطرق السابقة.

وللوصول الى نموذج المسالة المعكوسة نتبع الخطوات التالية:

1- تشكل معاملات دالة الهدف (Cj) للمسالة المطروحة، قيم (Qj) في المسألة المعكوسة.

2- تتحول اعمدة المسالة الاولية إلى اسطر في المسالة الثنائية أو المعكوسة بالنسبة للقيود.

3 – تمثل قيم (Qj) في المسالة الاولية قيم (Cj) لدالة هدف المسالة الثنائية.

مع الاخذ بعين الاعتبار الملاحظات التالية:

01- يتحول اتجاه المتراجحات في المسالة المطروحة من (≤) إلى (≥) والعكس صحيح وتبقى المساواة كما هي عند الانتقال الى المسالة المعكوسة.

02- يتحول الهدف من تعظيم MAX في المسالة المطروحة الى تقليل MIN في المسألة المعكوسة والعكس صحيح.

03 – تكون معاملات متغيرات دالة الهدف في المسألة المعكوسة هي قيم الموارد المتاحة في القيود حسب المسألة المطروحة والعكس صحيح.

04 – إذا كان في المسألة المطروحة M من القيود وN من المتغيرات، فإنه في المسألة الثنائية سيكون N من القيود وM من المتغيرات. لهذا ننصح حل المسألة بالطريقة الثنائية إذا كانت هذه المسألة بقيود كثيرة وبمتغيرات قليلة.

يمكن تلخيص هذه الخطوات والملاحظات بالنسبة للمثال (01-01) في النموذج التالي:

المسألة المطروحة *Problème Primal*	⇆	المسألة المعكوسة *Problème Dual*
(Max) $Z = 20X+30Y$		(Min)$Z = 2400w_1 + 1000w_2$
$3X + 6Y \le 2400$ $2X + Y \le 1000$ $X \ge 0$ $Y \ge 0$		$3w_1 + 2w_2 \ge 20$ $6w_1 + w_2 \ge 30$ $w_1 \ge 0$ $w_2 \ge 0$

تعني قيم (wj) التأثيرات الحدية كما سبق وأن أشرنا سابقا.

وفي مثالنا:

(w_1) تمثل التأثير الحدي لساعات العمل على دالة الهدف.

(w_2) تمثل التأثير الحدي للمادة الاولية على دالة الهدف.

لحل المسألة المعكوسة نستخدم أيضا الطريقة المبسطة المستخدمة في حل المسألة المطروحة، مع الإشارة إلى أن الطريقة المبسطة المستخدمة في المسائل التي تكون فيها القيود من النوع أكبر أو تساوي يمكن استعمالها بعدة طرق أهمها*:

1- الطريقة العادية للسمبلاكس مع إدخال بعض التعديلات.

2- طريقة المرحلتين. (وتعد أفضل طريقة)

02-02- حل المسألة المعكوسة بالطريقة العادية

أثناء تحويل المتراجحات من النوع أكبر أو يساوي (≥) إلى معادلات فإنه يتم طرح متغيرات الفوارق (e_i) من الطرف الأكبر (الطرف الأيسر) للمتراجحات وليس إضافتها كما هو الحال في حاله القيود الأصغر أو تساوي(≤)، وإضافة متغيرات اصطناعية* (A_i) *Artificiel* وهو التغير الطفيف المستعمل في هذه الطريقة ويكون النموذج كما يلي:

$$3w_1 + 2w_2 - \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{A_1} = 20$$
$$6w_1 + w_2 - \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{A_2} = 30$$

أما دالة الهدف في هذه الحالة تصبح على النحو:

$$[MIN]\ Z = 2400w_1 + 1000w_2 + 0e_1 + 0e_2 + MA_1 + MA_2$$

حيث (M) تشير إلى معامل المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف وهي قيم كبيرة جدا مقارنة ببقية المعاملات الأخرى تعبر عن غرامة أو ضريبة تتحملها المؤسسة إذا لم يتم خروج هذه المتغيرات من الحل، بحيث تضاف إلى دالة الهدف إذا كانت هذه الأخيرة في حالة [Min] كما هو الحال في مثالنا هذا وتطرح من دالة الهدف إذا كانت في حالة [Max] وهذا لإخراج المتغيرات الاصطناعية من الحل وتبقى طريقة الحل نفسها مع الأخذ بعين الاعتبار مايلي:

*- نؤكد على ان هذه الطرق تستخدم في حل المسائل التي تكون فيها القيود من النوع أكبر أو تساوي وليس لها علاقة بدالة الهدف ولا بطبيعة المسألة سواء كانت مطروحة أو معكوسة.

*- تدعى المتغيرات الاصطناعية بالمتغيرات الوهمية أو الخيالية، فهي تساعد فقط على الحل وليس لوجودها أي معنى، لذلك من الأفضل أن لا تظهر في جدول الحل النهائي المتضمن الحل الأمثل، ويستحسن التخلص منها عن طريق تحميلها لضريبة كبيرة M تعمل عكس دالة الهدف.

1- يوضع في عمود (V) المتغيرات الاصطناعية لا متغيرات الفوارق.

2- أنه كلما وجدت قيمة سالبة في سطرZ فإن الحل غير أمثل.

3- المتغيرة الداخلة تقابل أقل قيمة سالبة في سطر(Z)* أو أكبر قيمة مطلقة، لأن وجود الاشارة السالبة هنا تعني إمكانية تخفيض في قيمة دالة الهدف، ولطالما هذه الإمكانية قائمة في حالة البحث عن تقليل الهدف فإن الحل غير أمثل.

يكون الحل القاعدي للنموذج كما يلي:

الجدول (02-01)			2400	1000	0	0	M	M
Cj	V	Qj	W_1	W_2	e_1	e_2	A_1	A_2
M	A_1	20	3	2	-1	0	1	0
M	A_2	30	**6**	1	0	-1	0	1
Z = 50 M			2400-9M	1000-3M	M	M	0	0

- المتغيرة الداخلة هي (W_1) لأنها تقابل القيمة (2400-9M) وهي أقل قيمة سالبة أو أكبر قيمة بالقيمة المطلقة في سطر التقييم.

- المتغيرة الخارجة هي (A_2)

- نقطة المحور هي ($a_{21}=6$) هي نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة وسطر المتغيرة الخارجة.

انطلاقا من الحل القاعدي وبعد إدخال وإخراج المتغيرات تحصل على الجدول التالي:

الجدول (02-02)			2400	1000	0	0	M	M
Cj	V	Qj	W_1	W_2	e_1	e_2	A_1	A_2
M	A_1	5	0	$^3/_2$	-1	$^1/_2$	1	$-^1/_2$
2400	W_1	5	1	$^1/_6$	0	$-^1/_6$	0	$^1/_6$
Z = 12000+ 5M			0	$600-(^{3M}/_2)$	M	$400-^M/_2$	0	$(^M/_2)-400$

هذا الحل غير أمثل نظرا لوجود قيم سالبة في سطر Z أي هناك إمكانية لتحسين دالة الهدف.

لذلك ولتحسين الحل فإن المتغيرات الجديدة هي:

- المتغيرة الداخلة هي (w_2)　المتغيرة الخارجة هي (A_1)　-　نقطة المحور هي ($a_{12} = {}^3/_2$)

الجدول (02-03)			2400	1000	0	0	M	M
Cj	V	Qj	W_1	W_2	e_1	e_2	A_1	A_2
1000	W_2	10/3	0	1	$-^2/_3$	$^1/_3$	$^2/_3$	$-^1/_3$
2400	W_1	40/9	1	0	$^1/_9$	$-^2/_9$	$-^1/_9$	$^2/_9$
Z = 14000			0	0	400	200	M-400	M-200

* - كلما وجدت قيمة سالبة في سطر التقييم فإن الحل غير أمثل، لأننا اعتمدنا في تحديد قيم هذا السطر على العلاقة المذكورة سابقا لأن في حالة التقليل وجود الإشارة السالبة تعني إمكانية تخفيض في قيمة دالة الهدف.

بناءا على أن جميع القيم الموجودة في سطر Z موجبة أو معدومة، وبالتالي لا توجد إمكانية لتحسين الحل، لذلك فإن الحل المتوصل إليه هو حل أمثل وهذا عندما يكون:

$$Z = 14000 \qquad W_2 = {}^{10}/_{3} \qquad W_1 = {}^{40}/_{9}$$

11-03- حل المسألة المعكوسة بطريقة المرحلتين

إن طريقة المرحلتين هي طريقة بسيطة جدا وسهلة للغاية تسمح بحل مسائل البرمجة الخطية ذات المتغيرات الإصطناعية، بحيث يتم الحل وفقا لهذه الطريقة في مرحلتين متتاليتين:

المرحلة الاولى: خلال هذه المرحلة يتم البحث عن الحل الأمثل لدالة هدف جديد تتعلق بالمتغيرات الاصطناعية فقط معاملاتها تكون تساوي الواحد، أما باقي المتغيرات الأخرى لا تظهر في دالة الهدف بحيث تكون معاملاتها معدومة، ثم نقوم بالحل بالطريقة العادية، مع العلم أنه يكون الحل امثلا في هذه المرحلة اذا كانت كل قيم سطر Z معدومة .

المرحلة الثانية: هي خطوة تعويضية، انطلاقا من نتائج المرحلة السابقة وبعد الوصول للحل الامثل يتم ادخال معاملات المتغيرات الاساسية للنموذج ويتحدد عندها الحل الامثل.

أ- المرحلة الأولى:

- دالة الهدف المتعلقة بالمتغيرات الاصطناعية فقط هي: $MIN(A_1+A_2)$

وعلى هذا الأساس يكون جدول الحل القاعدي على النحو التالي:

الجدول (02-04)			0	0	0	0	1	1
Cj	V	Qj	W_1	W_2	e_1	e_2	A_1	A_2
1	A_1	20	3	2	-1	0	1	0
1	A_2	30	**6**	1	0	-1	0	1
Z = 50			**-9**	-3	1	1	0	0

ولطالما توجد قيم سالبة في السطر الأخير من الجدول أعلاه، فإن ذلك يعني أن هناك إمكانية لتحسين الحل، ولهذا تكون المؤشرات الجديدة في عملية التحسين هي:

- المتغيرة الداخلة هي (W_1)
- المتغيرة الخارجة هي (A_2) - نقطة المحور هي $(a_{21} = 6)$

ملاحظة: يحذف من الجدول عمود المتغيرة الخارجة ولا يظهر في الجدول الذي يليه.

الجدول (02-05)			0	0	0	0	1
Cj	V	Qj	W_1	W_2	e_1	e_2	A_1
1	A_1	5	0	${}^{3}/_{2}$	-1	${}^{1}/_{2}$	1
0	W_1	5	1	${}^{1}/_{6}$	0	$-{}^{1}/_{6}$	0
Z = 5			0	$-{}^{3}/_{2}$	1	${}^{1}/_{2}$	0

نقوم بعملية التحسين مرة اخرى طالما توجد في سطرZ قيم سالبة وعليه فإن المؤشرات الجديدة هي:

- المتغيرة الداخلة هي (W_2)   - المتغيرة الخارجة هي (A_1)   - نقطة المحور هي (a_{12} =2/3)

نحذف عمود المتغيرة الخارجة (A_1) من الحل نحصل على الجدول التالي:

الجدول (02-06)			0	0	0	0
Cj	V	Qj	W_1	W_2	e_1	e_2
0	W_2	$^{10}/_3$	0	1	$-^2/_3$	$^1/_3$
0	W_1	$^{40}/_9$	1	0	1/9	$-^2/_9$
Z = 0			0	0	0	0

الملاحظ أن كل قيم سطر التقييم معدومة وبالتالي فالحل امثل، ومنه نتطرق للمرحلة الثانية.

ب- المرحلة الثانية: هذه المرحلة هي عملية تعويضية فقط، بحيث ندخل في الجدول السابق معاملات المتغيرات الاساسية على النحو:

- معامل (W_1) = 2400
- معامل (W_2) = 1000

وبتعويض قيم هذه المعاملات نحصل في الاخير على الجدول النهائي التالي:

الجدول (02-07)			2400	1000	0	0
Cj	V	Qj	W_1	W_2	e_1	e_2
1000	W_2	$^{10}/_3$	0	1	$-^2/_3$	$^1/_3$
2400	W_1	$^{40}/_9$	1	0	$^1/_9$	$-^2/_9$
Z=14000			0	0	400	200

وهو نفس الجدول النهائي الذي المتحصل عليه بالطريقة العادية أنظر الجدول (02-03).

ملاحظات:

01 - **إن حل المسالة المطروحة يستخرج مباشرة من حل المسالة المعكوسة والعكس صحيح.**

02 – **إن قيمة دالة الهدف في الحل النهائي هي نفسها في المسالة المطروحة أو المعكوسة.**

- ✓ **دالة الهدف حسب المسالة المطروحة:** $Z=20(400)+30(200)=14000$
- ✓ **دالة الهدف حسب المسالة المعكوسة:** $Z=2400(^{40}/_{9})+1000(^{10}/_{3})=14000$

03 – **إن القيم الموجودة في سطر Z في جدول الحل الأمثل حسب المسألة المعكوسة والمقابلة لمتغيرات الفوارق (e_1,e_2) تشكل المتغيرات الاساسية (X,Y) في المسالة المطروحة.**

- ✓ **المسالة المعكوسة:** $e_1 = 400, \quad e_2 = 200$
- ✓ **المسالة المطروحة:** $X = 400, \quad Y = 200$

أي أن الحلول في المسألة المطروحة هي أسعار الظل في المسألة المعكوسة وحلول هذه الأخيرة تمثل أسعار الظل في المسألة المطروحة.

04 – **قيم المتغيرات (w_1,w_2) في المسالة المعكوسة هي نفس القيم الموجودة في سطر Z في جدول الحل الأمثل والمقابلة لمتغيرات الفوارق.**

- ✓ **المسالة المعكوسة:** $W_1 = {}^{10}/_{3}, \quad W_2 = {}^{40}/_{9}$
- ✓ **المسالة المطروحة:** $e_1 = 400, \quad e_2 = 200$

05 – **إذا لم يكن للمسألة المطروحة حلا، فإن المسألة المعكوسة لن يكون لها حلا أيضاً.**

06 – **إن حل المسالة المطروحة يستخرج مباشرة من حل المسالة المعكوسة والعكس صحيح.**

07 – **إن عناصر العمود في جدول الحل الأمثل في المسألة المعكوسة والمقابلة لمتغيرات الفوارق (e_1,e_2) تشكل عناصر سطر المتغيرات الاساسية (X,Y) مضروبة في (-1) بالنسبة لجدول الحل الأمثل في المسالة المطروحة.**

من خلال الملاحظات السابقة، وانطلاقا من الحل الأمثل للمسألة المعكوسة (الجدول02-07) يمكن استنتاج الحل النهائي للمسألة المطروحة (انظر الجدول01-04)، في الجدول التالي:

الجدول (02-08)			20	30	0	0
Ci	*V*	*Qj*	*X*	*Y*	e_1	e_2
30	$\mathbf{Y^*}$	**200**	0	1	$^2/_9$	$-^1/_3$
20	$\mathbf{X^*}$	**400**	1	0	$^{-1}/_9$	$^2/_3$
$Z^* = 14000$			0	0	$\mathbf{-^{40}/_9}$	$\mathbf{-^{10}/_3}$

04-11- بعض الحالات الأخرى لنماذج البرمجة الخطية

كثيرا ما يعتقد البعض أن مسائل البرمجة الخطية في حالة التعظيم تكون القيود فيها من نوع أصغر أو يساوي، ومسائل البرمجة الخطية في حالة التقليل تكون فيها القيود من نوع أكبر أو يساوي، ولكن هذا الاعتقاد خاطئ، فالقيود في مسائل البرمجة الخطية تعبر عن الشروط أو الظروف التي في ظلها يتحقق الهدف. لهذا فإنها لا ترتبط بطبيعة الهدف. لذلك سوف نستعرض كيفية التحول نحو الشكل المعياري (*Standard*) في الحالات التي تكون فيها القيود مختلطة.

❶- حالة دالة الهدف من نوع (Min) والقيود مختلطة:

مثال (01-02): أوجد الشكل المعياري لنموذج البرمجة الخطية التالي

$$\begin{cases} (Min)\ Z = 3X + 5Y \\ 3X + 2Y \geq 6 \\ 2X + Y = 32 \\ X \leq 5 \\ Y \geq 1 \\ X.Y \geq 0 \end{cases}$$

الحل: لايجاد الشكل المعياري يمكن تغيير هذا النموذج الى احدى الشكلين التاليين:

- **الشكل الأول:** يتم تحويل المتراجحات الى معادلات بالشكل التالي:

$$3X + 2Y - \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{A_1} = 6$$
$$2X + Y + \boldsymbol{A_2} = 32$$
$$X + \boldsymbol{e_2} = 5$$
$$Y - \boldsymbol{e_3} + \boldsymbol{A_3} = 1$$
$$X, Y \geq 0$$
$$(MIN)\ Z = 3X + 5Y + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + MA_1 + MA_2 + MA_3$$

-**الشكل الثاني:** التغيير في هذه الحالة يتعلق بتعديل في النموذج

حيث يمكن تحويل المعادلة $2X + Y = 32$ كما يلي:

$$2X + Y \geq 32 \Leftrightarrow -2X - Y \leq -32$$
$$2X + Y \leq 32 \Leftrightarrow 2X + Y \leq 32$$

ويكون النموذج المعدل على النحو التالي:

$$\begin{cases} (Min)\ Z = 3X + 5Y \\ -3X - 2Y \leq -6 \\ -2X - Y \leq -32 \\ 2X + Y \leq 32 \\ X \leq 5 \\ -Y \leq -1 \end{cases}$$

وبالتالي يكون الشكل المعياري

$$-3X - 2Y + e_1 = -6$$
$$-2X - Y + e_2 = -32$$
$$2X + Y + e_3 = 32$$
$$X + e_4 = 5$$
$$-Y + e_5 = -1$$
$$X, Y \geq 0$$
$$(MIN)\ Z = 3X + 5Y + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 + 0e_5$$

❷- حالة دالة الهدف من نوع (MAX) والقيود مختلطة:

مثال (02-02): أوجد الشكل المعياري لنموذج البرمجة الخطية التالي

$$\begin{cases} (Max)\ Z = 4X + 6Y \\ 4X + \ \ Y \le 60 \\ X + 2Y \le 50 \\ Y = 20 \\ X \ge 6 \\ X\,Y \ \ge 0 \end{cases}$$

الحل:

لايجاد الشكل المعياري يتم تحويل المتراجحات بالكيفية التالية:

$$\begin{cases} (Max)Z = 4X + 6Y + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 - MA_1 - MA_2 \\ 4X + \ \ Y + e_1 = 60 \\ X + 2Y + e_2 = 50 \\ Y + A_1 + = 20 \\ X - e_3 + A_2 = 6 \\ X, Y \ \ge 0 \end{cases}$$

ملاحظات:

01- **في حالة وجود قيد من نوع يساوي في النموذج فإنه مهما كانت دالة الهدف يضاف للطرف الأيسر من المعادلة المتغير الاصطناعى فقط.**

02- **كل معادلة يجب ألا تحتوي على اكثر من متغير فوارق واحد ولا على اكثر من متغير اصطناعي واحد.**

03- **اذا كانت (M) تمثل معامل المتغير الاصطناعي في دالة الهدف من نوع (MAX) فإنها تسبق باشارة سالبة(-)، أما في حالة دالة الهدف من نوع (MIN) فإنها تسبق باشارة موجبة(+).**

تمارين

التمرين (II-1)**:** أوجد الشكل المعياري (*Standard*) في كل حالة من الحالات التالية

الحالة الأولى

$$\begin{cases} (Min)\ Z = 3X_1 + 5X_2 \\ 3X_1 + 2X_2 \geq 6 \\ X_1 \leq 5 \\ X_2 \geq 1 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحالة الثانية

$$\begin{cases} (Max)\ Z = 120\ Y_1 + 230\ Y_2 \\ 5Y_1 + 4Y_2 + 3Y_3 \leq 160 \\ 2Y_1 + Y_2 = 89 \\ 4Y_2 + 5Y_3 \geq 62 \\ Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0,\ Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

الحالة الثالثة

$$\begin{cases} (Min)\ Z = X + 10Y \\ 12X + 15Y \leq 200 \\ 6X + 4Y \leq 25 \\ Y \leq 10 \\ X \geq 0,\ Y \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

الشكل المعياري

الحالة الأولى

$$\begin{cases} (Min)\ Z = 3X_1 + 5X_2 \boldsymbol{+0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + MA_1 + MA_2} \\ 3X_1 + 2X_2 \boldsymbol{- e_1 + A_1} = 6 \\ X_1 \boldsymbol{+ e_2} = 5 \\ X_2 \boldsymbol{- e_3 + A_2} = 1 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحالة الثانية

$$\begin{cases} (Max)\ Z = 120\ Y_1 + 230\ Y_2 \boldsymbol{+0e_1 + 0e_2 - MA_1 - MA_2} \\ 5Y_1 + 4Y_2 + 3Y_3 \boldsymbol{+ e_1} = 160 \\ 2Y_1 + Y_2 \boldsymbol{+ A_1} = 89 \\ 4Y_2 + 5Y_3 \boldsymbol{- e_2 + A_2} = 62 \\ Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0,\ Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

الحالة الثالثة

$$\begin{cases} (Min)\ Z = X + 10Y \boldsymbol{+0e_1 + 0e_2 + 0e_3} \\ 12X + 15Y \boldsymbol{+ e_1} = 200 \\ 6X + 4Y \boldsymbol{+ e_2} = 25 \\ Y \boldsymbol{+ e_3} = 10 \\ X \geq 0,\ Y \geq 0 \end{cases}$$

التمرين (II -2)**:** ليكن نماذج البرمجة الخطية التالية

الحالة الأولى

$$\begin{cases}(Min)\ Z=4x_1+5x_2\\ 3x_1+x_2\le 27\\ 5x_1+5x_2=60\\ 6x_1+4x_2\ge 60\\ x_1\ge 0\\ x_2\ge 0\end{cases}$$

الحالة الثانية

$$\begin{cases}(Max)\ Z=4X+6Y\\ 4X+Y\le 60\\ X+2Y\le 50\\ Y=20\\ X\ge 6\\ X\ge 0\end{cases}$$

الحالة الثالثة

$$\begin{cases}(Min)\ Z=3X+5Y\\ 3X+2Y\ge 6\\ 2X+Y=32\\ X\le 5\\ Y\ge 1\\ X\ge 0\end{cases}$$

المطلوب:

1- تحويل النموذج من الشكل القانوني (*Canonique*) إلى الشكل المعياري (*Standard*).

2- ضع نموذج المسألة المعكوسة (*Problème Dual*).

الحل:

❶- الحالة الأولى

①- تحويل نموذج المسألة من الشكل القانوني إلى الشكل المعياري.

$$\begin{cases}(Min)\ Z=4x_1+5x_2\\ 3x_1+x_2\le 27\\ 5x_1+5x_2=60\\ 6x_1+4x_2\ge 60\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(Min)\ Z=4x_1+5x_2+0e_1+0e_1+MA_1+MA_2\\ 3x_1+x_2+e_1=27\\ 5x_1+5x_2+A_1=60\\ 6x_1+4x_2-e_2+A_2=60\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$$

②- نموذج المسألة المعكوسة.

النموذج المعدل

$$\begin{cases}(Min)\ Z=4x_1+5x_2\\ -3x_1-x_2\ge -27\\ -5x_1-5x_2\ge -60\\ 5x_1+5x_2\ge 60\\ 6x_1+4x_2\ge 60\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$$

المسألة المعكوسة

$$\Rightarrow \begin{cases}(Max)\ Z=-27Y_1-60Y_2+60Y_3+60Y_4\\ -3Y_1-5Y_2+5Y_3+6Y_4\le 4\\ -Y_1-5Y_2+5Y_3+4Y_4\le 5\\ Y_i\ge 0\end{cases}$$

❷- الحالة الثانية

①- تحويل نموذج المسألة من الشكل القانوني إلى الشكل المعياري

$$\begin{cases}(Max)\ Z=4X+6Y\\ 4X+Y\le 60\\ X+2Y\le 50\\ Y=20\\ X\ge 6\\ X\ge 0,\ Y\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(Max)\ Z=4X+6Y+0e_1+0e_2+0e_3-MA_1-MA_2\\ 4X+Y+e_1=60\\ X+2Y+e_2=50\\ Y+A_1=20\\ X-e_3+A_2=6\\ X\ge 0,\ Y\ge 0\end{cases}$$

②- نموذج المسألة المعكوسة.

النموذج المعدل

$$\begin{cases}(Max)\ Z = 4X + 6Y\\ 4X + Y \le 60\\ X + 2Y \le 50\\ Y \le 20\\ -Y \le -20\\ X \le -6\\ X \ge 0,\ Y \ge 0\end{cases} \Rightarrow$$

المسألة المعكوسة

$$\begin{cases}(Max)\ Z = 60w_1 + 50w_2 + 20w_3 - 20w_4 - 6w_5\\ 4w_1 + w_2 + w_5 \le 4\\ w_1 + 2w_2 + w_3 - w_4 \le 6\\ w_i \ge 0\end{cases}$$

❸- الحالة الثالثة

①- تحويل نموذج المسألة من الشكل القانوني (*Canonique*) إلى الشكل المعياري (*Standard*).

$$\begin{cases}(Min)\ Z = 3X + 5Y\\ 3X + 2Y \ge 6\\ \mathbf{2X + Y = 32}\\ X \le 5\\ Y \ge 1\\ X \ge 0,\ Y \ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(Min)\ Z = 3X + 5Y + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + MA_1 + MA_2 + MA_3\\ 3X + 2Y - e_1 + A_1 = 6\\ 2X + Y + A_2 = 32\\ X + e_2 = 5\\ Y - e_3 + A_3 = 1\\ X \ge 0,\ Y \ge 0\end{cases}$$

②- نموذج المسألة المعكوسة

النموذج المعدل

$$\begin{cases}(Min)\ Z = 3X + 5Y\\ 3X + 2Y \ge 6\\ \mathbf{2X + Y \ge 32}\\ \mathbf{-2X - Y \ge -32}\\ -X \ge -5\\ -Y \ge -1\\ X \ge 0,\ Y \ge 0\end{cases} \Rightarrow$$

المسألة المعكوسة

$$\begin{cases}(Max)\ Z = 6w_1 + 32w_2 - 32w_3 - 5w_4 - w_5\\ 3w_1 + 2w_2 - 2w_3 - w_4 \le 3\\ 2w_1 + w_2 - w_3 - w_5 \le 5\\ w_i \ge 0\end{cases}$$

التمرين (II -3):

ليكن النموذج الرياضي التالي:

$$[Max]\ Z = 8X_1 + 6X_2$$
$$4X_1 + 2X_2 \le 60$$
$$2X_1 + 4X_2 \le 48$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

والحل الأمثل لهذه المسألة هو كالتالي:

C_J	V	Q_j	8	6	0	0
			X_1	X_2	e_1	e_2
8	X_1	12	1	0	$^1/_3$	$-^1/_6$
6	X_2	6	0	1	$-^1/_6$	$^1/_3$
Z = 132			0	0	$-^5/_3$	$-^2/_3$

المطلوب :

- ضع نموذج المسألة المعكوسة (الثنائية) ثم بين استنتج جدول حل هذه المسألة انطلاقا من جدول الذي أمامك.

- حل المسألة المعكوسة بالطريقتين البيانية والمبسطة.

الحل

❶- نموذج المسألة المعكوسة

$$[Min]\ Z = 60W_1 + 48W_2$$
$$4w_1 + 2w_2 \le 8$$
$$2w_1 + 4w_2 \le 6$$
$$w_1 .\ w_2 \ge 0$$

❷- جدول الحل الأمثل للمسألة المعكوسة

C_J	V	Q_j	8	6	0	0
			w_1	w_2	e_1	e_2
60	w_1	$-^5/_3$	1	0	$-^1/_3$	$^1/_6$
48	w_2	$-^2/_3$	0	1	$^1/_6$	$-^1/_3$
Z = 132			0	0	12	6

التمرين (II-4): حوِّل النموذج من المسألة المطروحة إلى المسألة المعكوسة في كل حالة من الحالات التالية

الحالة الأولى:

$$\left\{\begin{array}{c}(Max)\ Z = 20X_1 + 30X_2 + 75X_3 \\ 6X_1 + 5X_2 + 4X_3 \le 180 \\ 2X_2 + 3X_3 \le 200 \\ 2X_1 + 3X_3 \le 150 \\ X_1 \ge 0 ،\ X_2 \ge 0 ،\ X_3 \ge 0\end{array}\right.$$

الحالة الثانية:

$$\left\{\begin{array}{c}(Min)Z = 180X_1 + 200X_2 + 150X_3 \\ X_1 + 3X_2 + 2X_3 \ge 30 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_3 \ge 20 \\ 2X_1 + 5X_2 + 3X_3 \ge 75 \\ X_1 \ge 0 ،\ X_2 \ge 0 ،\ X_3 \ge 0\end{array}\right.$$

التمرين II - 5: أوجد نموذج المسألة المعكوسة في كل حالة من الحالات التالية

الحالة الأولى

$$(Min)\ Z = 5X_1 + 2X_2 + X_3$$
$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 20$$
$$6X_1 + 8X_2 + 5X_3 \geq 30$$
$$7X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 40$$
$$X_1 + 2X_2 + 4X_3 \geq 50$$
$$X_1 \geq 0 ،\ X_2 \geq 0 ،\ X_3 \geq 0$$

الحالة الثانية

$$(Max)\ Z = 2X_1 + X_2$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 6$$
$$X_1 + 5X_2 \leq 10$$
$$2X_1 + 2X_2 \leq 8$$
$$X_1 \geq 0 ،\ X_2 \geq 0$$

الحالة الثالثة

$$(Min)\ Z = w_1 + 3w_2 + 2w_3$$
$$4w_1 + 8w_2 + 6w_3 = 25$$
$$5w_1 + 7w_2 + w_3 \geq 10$$
$$7w_1 + 5w_2 + 3w_3 = 30$$
$$w_1 + 3w_2 + 5w_3 \leq 80$$
$$w_1 \geq 0 ،\ w_2 \geq 0 ،\ w_3 \geq 0$$

الحالة الرابعة

$$(Max)\ Z = 200X_1 + 30X_2 + 75X_3$$
$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 200$$
$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 180$$
$$4X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 130$$
$$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 \leq 50$$
$$X_1 \geq 0 ،\ X_2 \geq 0 ،\ X_3 \geq 0$$

التمرين II - 6: ليكن لدينا نماذج البرمجة الخطية التالية

النموذج الأول

$$(Max)\ Z = 2X_1 + 3X_2$$
$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 9$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

النموذج الثاني

$$(Max)\ Z = 24X_1 + 30X_2$$
$$4X_1 + 6X_2 \geq 240$$
$$8X_1 + 4X_2 \leq 240$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

النموذج الثالث

$$(Min)\ Z = 18X_1 + 24X_2$$
$$6X_1 + 3X_2 \geq 18$$
$$8X_1 + 4X_2 \leq 24$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

المطلوب:

أ – حل كل نموذج بالطريقة البيانية.

ب – ضع نموذج المسألة المعكوسة (الثنائية) ثم أوجد حلها بيانيا.

ج – راقب وتأكد بأن قيمة دالة الهدف هي نفسها في الحالتين.

التمرين II - 7: ليكن نماذج البرمجة الخطية التالية

الحالة الأولى

$$(Min)\ Z = 4x_1 + 5x_2$$
$$3x_1 + x_2 \leq 27$$
$$5x_1 + 5x_2 = 60$$
$$6x_1 + 4x_2 \geq 60$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

الحالة الثانية

$$(Max)\ Z = 4X + 6Y$$
$$4X + Y \leq 60$$
$$X + 2Y \leq 50$$
$$Y = 20$$
$$X \geq 6$$
$$X \geq 0,\ Y \geq 0$$

الحالة الثالثة

$$(Min)\ Z = 3X + 5Y$$
$$3X + 2Y \geq 6$$
$$2X + Y = 32$$
$$X \leq 5$$
$$Y \geq 1$$
$$X \geq 0,\ Y \geq 0$$

المطلوب:

1- تحويل نموذج المسألة من الشكل القانوني (*Canonique*) إلى الشكل المعياري (*Standard*).

2- ضع نموذج المسألة المعكوسة (*Problème Dual*).

3- حل المسألة المعكوسة بطريقة المرحلتين.

4- حل المسألة المطروحة (*Problème Primal*) بالطريقة المبسطة (*Simplexe*).

التمرين II-8: تبحث إحدى المؤسسات عن التشكيلة المثلى من منتجاتها لكل نموذج وفقا للظروف التالية:

النموذج الأول

تقليص تكاليف الإنتاج

$$(Min)\ Z_1 = 3X_1 + 5X_2$$
$$3X_1 + 2X_2 \geq 6$$
$$X_1 \leq 5$$
$$X_2 \geq 1$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

النموذج الثاني

تقليص استهلاك المادة الأولية

$$(Min)\ Z_2 = 4X_1 + 3X_2$$
$$2X_1 + X_2 \geq 0$$
$$X_1 + 2X_2 \geq 2$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

المطلوب:

1- تحديد ماهي هذه التشكيلة المثلى في كل حالة.

2- ضع نموذج المسألة المعكوسة، ثم إستنتج حلا لها.

التمرين II-9: حل مسائل البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة المرحلتين

النموذج الأول

$$(Min)\ Z = 5X_1 + 2X_2$$
$$2X_1 + 5X_2 \geq 10$$
$$X_1 + X_2 \geq 4$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

النموذج الثاني

$$(Max)\ Z = 20X_1 + 30X_2 + 40X_3$$
$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 1$$
$$X_1 + X_2 + 2X_3 = 2$$
$$3X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 4$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

النموذج الثالث

$$(Min)\ Z = 6X_1 + 3X_2 + 5X_3$$
$$6X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 2$$
$$3X_1 + 4X_2 + X_3 \leq 5$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0, X_3 \geq 0$$

الفصل الثالث

03

تحليل حساسية أمثلية الحل

03-01- في حالة تغير دالة الهدف

03-02- في حالة تغير الموارد المتاحة

03-03- في حالة تغير المعاملات التقنية

الحالة الأولى: حالة المتغيرات خارج الحل الأمثل

الحالة الثانية: حالة المتغيرات داخل الحل الأمثل

تمارين

تحليل الأمثلية أو تحليل الحساسية

Analyse d'optimalité ou Analyse de sensibilité

يعتبر أسلوب تحليل الأمثلية أحد المزايا التي تقدمها طريقة السمبلاكس أو المبسطة وغير متاحة وغير ممكن القيام بها بالنسبة للطرق الاخرى، حيث يهتم هذا الأسلوب بدراسة مدى صلاحية الحل الأمثل*، بتعبير آخر معرفة إلدرجة يبقى الحل المتوصل إليه صالحًا ومقبولاً ومدى تأثر الحل النهائي بالمتغيرات التي يتوقع حدوثها في النموذج سواء ما يرتبط منها بالتغيرات في المدى القصير أو في المدى الطويل، وذلك انطلاقا من الجدول الأخير المتضمن الحل الأمثل، ودون الرجوع لحل المسألة من جديد.

إن الشخص الذي يتخذ القرار في المؤسسة لا يمكنه أن يأخذ الحل الأمثل لأي نموذج من نماذج البرمجة الخطية هكذا وبصفة مطلقة، نظرا لما قد يحدث من ظروف تغير من أمثليته وبالتالي لم يعد صالح، لهذا لابد من معرفة ما هي التغيرات الممكنة، والتي يحتمل حدوثها في النموذج؟ والى أي مدى يكون الحل الأمثل الذي توصل اليه صالحا في ظل هذه التغيرات؟.

في نموذج البرمجة الخطية توجد الكثير من المعطيات التي قد تؤثر على أمثلية الحل فالتغيرات التي قد تحدث، إما أن تكون في دالة الهدف أو في القيود الاساسية، فبالنسبة لهذه الاخيرة هناك متغيرين يحتمل تغيير أحدهما او كلاهما، وهما إما **الشطر الأول** والذي يمثل المعاملات التقنية للمسالة وهي تلك المتعلقة بمعايير استهلاك أو استخدام الموارد المتاحة في المؤسسة وهذا التغيير مرتبط الى حد ما بمستوى التطور التكنولوجي في العملية الإنتاجية وكذلك باليقظة التكنولوجية في المؤسسة، أو **الشطر الثاني** من القيود والمتمثل في الموارد المتاحة للمؤسسة أو تلك الظروف التي يتحقق في ظلها الهدف.

إذن سوف ندرس في هذه النقطة مدى حساسية الحل المتوصل إليه لمثل هذه التغيرات ونحدد مدى صلاحية هذا الحل، لذلك سوف نعالج الحالات التالية:

*- يعتبر الحل الأمثل في ظل الشروط الأولية صالح مادامت قيم المتغيرات الأساسية في الجدول الأخير لم تتغير، بينما قد تحدث بعض التغيرات في نموذج البرمجة الخطية.

03-01- حالة تغير في معاملات دالة الهدف

إن دراسة أمثلية الحل في هذه الحالة ينصب على تحديد المجالات التي قد تتغير فيها معاملات دالة الهدف، بحيث لا يؤثر هذا التغيير على الحل الأمثل ويبقى صالحا.

باستخدام نفس المثال السابق (المثال 01-01) ومن الجدول الأخير والذي يتضمن الحل الأمثل (الجدول01-04)، وبافتراض انه حدث تغيير في الربح في الوحدة الواحدة من النوع الاول (A) بمقدار (α) قد يكون إما بالزيادة أو بالنقصان، نريد أن نعرف أو نحدد المجالات التي يتغير فيها الربح للوحدة الواحدة من النوع (A) ومع ذلك يبقى الحل الامثل صالحا. وفي هكذا حالة، يمكن الإنطلاق من جدول الحل النهائي للمسألة مع الأخذ بعين الاعتبار الظروف الجديدة للمسألة، حيث يصبح الربح في هذه الحالة يساوي ($20 + \alpha$) $\forall\alpha\in\Re$

انطلاقا من الجدول (01-04) ندخل هذا التغير على النحو التالي:

الجدول (01-03)			**$20 + \alpha$**	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
30	Y	200	0	1	$^2/_9$	$-^1/_3$
$20 + \alpha$	X	400	1	0	$-^1/_9$	$^2/_3$
$Z = 14000 + 400\alpha$			0	0	$-^{40}/_9 + {}^{\alpha}/_9$	$-{}^{10}/_3 - {}^{2\alpha}/_3$

حتى يكون الحل امثلا يجب ان تكون كل القيم الواردة في سطر التقييم اقل او تساوي الصفر أي:

$$-^{40}/_9 + {}^{\alpha}/_9 \le 0 \Rightarrow -40 \le -\alpha \Rightarrow \boldsymbol{\alpha \le 40} \text{ ....} (01)$$

$$-^{10}/_3 - {}^{2\alpha}/_3 \le 0 \Rightarrow -10 \le 2\alpha \Rightarrow \boldsymbol{\alpha \ge -5} \text{ ....} (02)$$

أ – في حالة الزيادة: إذا توقعنا زيادة في الربح بمقدار α أي أن($\mathbf{0} < \alpha$) فإن الشروط التالية هي التي تحدد لنا مجالات صلاحية الحل.

$$\begin{pmatrix} \alpha \le \mathbf{40} \text{ ....} (01) \\ \alpha \ge \mathbf{-5} \text{ ....} (02) \\ \alpha > \mathbf{0} \text{ ....} (03) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{0 < \alpha \le 40}$$

من خلال المجالات السابقة يمكننا القول أن: $\alpha\in]\mathbf{0} \quad \mathbf{40}]$

وبما أن $\mathbf{C_1 = 20} + \alpha$ فإن مجال تغير الربح هو:

$$\boldsymbol{0 + 20 < C_1 \le 40 + 20 \Rightarrow 20 < C_1 \le 60}$$

أي أنه إذا كان الربح في الوحدة الواحدة داخل هذا المجال $C_1 \in]20 \quad 60]$ فإن الحل الأمثل يبقى صالحا ومقبولا، بينما خارج هذا المجال فإن الحل يتغير، مما يعني أن قيمة المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل تبقى كما هي دون تغيير، أي أن (X=400,Y=200) التغيير الوحيد سيكون في قيمة دالة الهدف نتيجة للتغيير المحتمل في الربح بمقدار α وعلى هذا الأساس، فإن:

$$Z = 14000 + 400(\alpha) \qquad \forall \alpha \in]0 \quad 40]$$
$$Z = 14000 + 400(40) \qquad \forall \alpha \in]14000 \quad 30000]$$

مثال (03-01): بالنسبة لمثالنا النموذجي السابق (مثال رقم 01-01) سوف نفترض أنه نتيجة للإجراءات التي تبنتها المؤسسة للتحكم في التكاليف، تمكنت من تخفيض سعر تكلفة المنتوج الأول (A) مما أدى الى زيادة الربح في الوحدة الواحدة من هذا النوع بمقدار 20 وحدة نقدية.

المطلوب: تحديد أثر زيادة الربح في أمثلية الحل السابق؟.

الحل: نتيجة لهذه الاجراءات فقد أصبح الربح في الوحدة الواحدة من النوع (A) هو 40 وحدة نقدية بدلا من 20 وحدة نقدية كما في السابق، ولذلك سنعيد حل هذا المثال من جديد للتأكد من صحة المجالات السابقة، ومعرفة فيما إذا كان الحل الجديد مختلف أما لا.

الجدول (03-02)			40	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
0	e_1	2400	3	6	1	0
0	e_2	1000	**2**	1	0	1
Z =0			**40**	30	1	0

بإدخال المتغير X لجدول الحل يكون الجدول الجديد كالتالي:

الجدول (03-03)			40	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
0	e_1	900	0	$^9/_2$	1	$-^3/_2$
40	X	500	1	$^1/_2$	0	$^1/_2$
Z = 20000			0	10	0	-20

نقوم بعملية التحسين مرة اخرى، بإدخال المتغير (Y) ويكون الجدول الجديد كالتالي:

الجدول (03-04)			40	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
30	Y	**200**	0	1	$^2/_9$	$-^1/_3$
40	X	**400**	1	0	$-^1/_9$	$^2/_3$
Z = 22000			0	0	$-^{20}/_9$	$-^{50}/_3$

نلاحظ من الجدول السابق أن الحل أمثل وهو نفس الحل الوارد في الجدول (02-04) حيث لم تتغير قيم المتغيرات الأساسية، ما عدا قيمة دالة الهدف فقد ارتفعت بمقدار 8000 وحدة نقدية وهذه الزيادة في الأرباح تعود لارتفاع الربح في الوحدة الواحدة من المنتوج A وعليه، فإنه في حالة زيادة الربح في الوحدة الواحدة من المنتوج (A) داخل المجال [40 0[أي كلما كان الربح في الوحدة الواحدة من هذا المنتوج ضمن المجال [60 20[فإن الحل السابق يبقى حلا صالحا ومقبولا، كما أن دالة الهدف تتغير قيمتها في المجال:

$$Z = 20(400) + 30(200) = 14000$$

$$Z = 60(400) + 30(200) = 30000$$

إذن مهما حدث من تغيير في ربح الوحدة من A ضمن المجال[60-20[فإن الأرباح ستتغير هي الأخرى ضمن المجال [30000-14000[ولكن تبقى الكميات من النوعين دون تغيير وهي X=400 , Y=200 أما خارج هذا المجال فإن الحل يتغير ولتبيان ذلك نأخذ المثال التالي:

ولأن التغيير في الربح قدره 20 وحدة نقدية وهو ضمن مجال الذي لا تتغير فيه الكميات المنتجة من النوعين فإن :

$$Z = 14000 + 400(\alpha) \Rightarrow Z = 14000 + 400(20) \Rightarrow Z = 22000$$

مثال (03-02): نتيجة للإجراءات التي تبنتها المؤسسة للتحكم في التكاليف، والتي تمكنت من خلالها من تخفيض سعر تكلفة المنتوج A، مما أدى الى زيادة الطلب على هذا المنتوج، لذلك فإنها تتوقع أن يرتفع ربح الوحدة الواحدة من هذا النوع بمقدار 42 وحدة نقدية.

المطلوب: تحديد أثر هذا التغير في الربح في أمثلية الحل السابق؟.

الحل:

الجدول (03-05)			62	30	0	0
Cj	V	Qj	**X**	Y	e_1	e_2
0	$\mathbf{e_1}$	2400	3	6	1	0
0	e_2	1000	2	1	0	1
Z = 0			**62**	30	1	0

بإدخال المتغير X لجدول الحل يكون الجدول الجديد كالتالي:

الجدول (03-06)			62	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
0	e_1	900	0	$^9/_2$	1	$-^3/_2$
62	X	500	1	$^1/_2$	0	$^1/_2$
Z = 31000			0	-1	0	-31

نلاحظ أنه لا توجد إمكانية لتحسين الحل، لكون جميع القيم في السطر التقييم سالبة او معدومة. وبالتالي، نقول أن هذا الجدول يمثل الحل الأمثل، بحيث يعني انه يمكن للمؤسسة إنتاج 500 وحدة فقط من النوع الأول وتبقى 900 ساعة عمل لورشة التصنيع غير مستغلة.

وبالتالي، فإن الحل قد تغير مقارنة بالحل الوارد في الجدول (01-04) مما يعني أنه في حالة زيادة الربح في الوحدة الواحدة من المنتوج (A) خارج المجال [40 0[أي كلما كان الربح في الوحدة الواحدة من هذا النوع خارج المجال [60 20[فإن الحل السابق يتغير ولم يعد صالحا ومقبولا. وهذا ما يؤكد نتائج تحليل حساسية الحل للتغيرات في أرباح المنتوج الأول.

ب – في حالة الانخفاض: إذا توقعنا انخفاض في الربح بمقدار α أي أن($0 > \alpha$) فإن القيود التالية هي التي ستحدد المجالات التي يبقى فيها الحل صالحا.

$$\begin{pmatrix} \alpha \leq 40 \text{ ....} (01) \\ \alpha \geq -5 \text{ ....} (02) \\ \alpha < 0 \text{ ....} (03) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{-5 \leq \alpha < 0}$$

إذن: $\alpha \in [-5 \quad 0[$

وبما أن $C_1 = 20 + \alpha$ فإن مجال تغير الربح هو:

$$\mathbf{20 - 5 \leq C_1 < 20 + 0 \Rightarrow 15 \leq C_1 < 20}$$

أي أنه في المجال $C_1 \in [15 \quad 20[$ فإن الحل الأمثل يبقى صالحا، بينما خارج هذا المجال فإن الحل يتغير. حيث أن **(X=400,Y=200)** بينما تتغير دالة الهدف نتيجة لانخفاض في الربح بمقدار α وعلى هذا الأساس، فإن:

$$\boldsymbol{Z = 14000+400(\alpha) \quad \forall \alpha \in [-5 \quad 0[}$$

$$\boldsymbol{Z = 14000+400(-5) \quad \forall \alpha \in [12000 \quad 0[}$$

مثال (03-03)**:** سوف نفترض أنه نتيجة لشدة المنافسة فإن المؤسسة تتوقع انخفاض في الربح في الوحدة الواحدة من النوع الأول بمقدار 05 وحدات نقدية.

المطلوب: تحديد أثر هذا التغير في الربح في أمثلية الحل السابق؟.

الحل:

الجدول (03-07)			15	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
0	$\mathbf{e_1}$	2400	3	**6**	1	0
0	e_2	1000	2	1	0	1
Z =0			15	**30**	1	0

بإدخال المتغير Y لجدول الحل يكون الجدول الجديد كالتالي:

الجدول (03-08)			15	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
30	Y	400	$^1/_2$	1	$^1/_6$	0
0	e_2	600	$^3/_2$	0	$-^1/_6$	1
Z = 12000			0	0	- 5	0

يتضح من الجدول أعلاه أن جميع القيم في السطر الأخير إما أنها أقل أو أنها تساوي الصفر، مما يعني أن الحل هو حل أمثل، وهذا يعني امكانية إنتاج 400 وحدة من النوع الثاني فقط وتبقى 600 وحدة قياس من مادة البلاستيك غير مستغلة. ولكن، لطالما أن القيمة المقابلة للمتغيرX في السطر الأخير تساوي الصفر، ولأن هذا المتغير غير داخل في الحل، فإن ذلك يعني وجود حل بديل يمكن تحديده عن طريق إدخال هذا المتغير للحل على النحو التالي:

الجدول (03-09)			15	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
30	Y	200	0	1	$^2/_9$	$-^1/_3$
15	X	400	1	0	$-^1/_9$	$^2/_3$
Z = 12000			0	0	$-^{20}/_9$	$-^{50}/_3$

نلاحظ من الجدول أن الحل أمثل وهو نفس الحل الوارد في الجدول (01- 04) حيث لم تتغير قيم المتغيرات الأساسية، ما عدا قيمة دالة الهدف فقد انخفضت بمقدار 2000 وحدة نقدية. وهذا الانخفاض يعود لانخفاض الربح في الوحدة الواحدة من المنتوج A الى 15 و.ن.

وعلى هذا الأساس، فإنه في حالة انخفاض الربح في الوحدة الواحدة من النوع (A) داخل المجال]0 5 -] أي كلما كان الربح في الوحدة الواحدة من هذا النوع ضمن المجال]20 15] فإن الحل السابق يبقى صالحا ومقبولا، كما أن دالة الهدف تتغير قيمتها في المجال:

$$Z = 15(400) + 30(200) = 12000$$
$$Z = 20(400) + 30(200) = 14000$$

إذن مهما حدث من تغيير في ربح الوحدة من منتوج النوع A ضمن المجال **]20 15]** فإن أرباح المؤسسة سوف تتغير هي الأخرى ضمن المجال **]14000 12000]** ولكن تبقى الكميات التي يمكن إنتاجها من النوعين دون تغيير وهي X= 400 , Y= 200 أما خارج هذا المجال فإن الحل سيتغير ولتبيان ذلك نأخذ المثال التالي:

مثال (03-04): نفترض أنه نتيجة لظروف معينة، أصبح معها الربح في الوحدة الواحدة من النوع الأول (A) يساوي 14 و.ن فما أثر هذا الانخفاض على أمثلية الحل؟.

الحل:

الجدول (03-10)			14	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
0	**e_1**	2400	3	**6**	1	0
0	e_2	1000	2	1	0	1
Z = 0			14	**30**	1	0

بإدخال المتغير Y الى الحل يكون الجدول الجديد كما يلي:

الجدول (03-11)			14	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
30	Y	400	$^1/_2$	1	$^1/_6$	0
0	e_2	600	$^3/_2$	0	$-^1/_6$	1
Z =12000			-1	0	-5	0

بما انه لا توجد قيمة موجبة في سطر التقييم فإن الحل أمثل، وبمقارنة هذا الحل بالحل الوارد في الجدول (04-01) يتبين أنه تغير وهذا نتيجة لانخفاض الربح في الوحدة من النوع (A) وكان هذا الانخفاض خارج مجال الأمثلية.

وحتى تتمكن المؤسسة من إدخال النوع (A) الى الحل أو البرنامج الإنتاجي فإنه يجب أن يتجاوز الربح في الوحدة الواحدة من هذا النوع 15 وحدة نقدية.

وبافتراض انه حدث تغيير في الربح في الوحدة الواحدة من النوع (B) بمقدار (β) بالزيادة او النقصان فما هي المجالات التي يتغير فيها الربح للوحدة الواحدة من النوع (B) حتى يبقى الحل الامثل صالحا.

وبنفس الكيفية السابقة وانطلاقا من الجدول (04-01) ندخل هذا التغير على النحو التالي:

الجدول (03-12)			20	30 + β	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
30 + β	Y	200	0	1	$^2/_9$	$-^1/_3$
20	X	400	1	0	$-^1/_9$	$^2/_3$
Z = 14000+200β			0	0	$-^{40}/_9 - {}^{2\beta}/_9$	$-{}^{10}/_3 + {}^{\beta}/_3$

حتى يكون الحل امثلا يجب ان تكون كل القيم الواردة في سطر Z اقل او تساوي الصفر أي:

$$-^{40}/_9 - {}^{2\beta}/_9 \le 0 \Rightarrow -40 \le 2\beta \Rightarrow \beta \ge -20 \;..................(01)$$

$$-^{10}/_3 + {}^{\beta}/_3 \le 0 \Rightarrow \beta \le 10 \;..(02)$$

أ – في حالة الزيادة: إذا توقعنا زيادة في الربح بمقدار β أي أن(0 < β) فإن الشروط التالية تحدد لنا مجالات صلاحية الحل.

$$\begin{cases} \beta \leq 10 \text{ .... } (01) \\ \beta \geq -20 \text{ .... } (02) \\ \beta > 0 \text{ .... } (03) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{0 < \beta \leq 10}$$

إذن: $\beta \in]0 \quad 10]$

وبما أن: $C_2 = 30 + \beta$ فإن مجال تغير الربح هو:

$$0 + 30 < C_2 \leq 10 + 30 \Rightarrow 30 < C_2 \leq 40$$

أي أنه في المجال $C_2 \in]30 \quad 40]$ فإن الحل الأمثل يبقى صالحا، بينما خارج هذا المجال فإن الحل يتغير. حيث تتغير دالة الهدف نتيجة لزيادة في الربح بمقدار β وعلى هذا الأساس، فإن:

$$Z = 14000+200(\beta) \quad \forall \beta \in]0 \quad 10]$$

مثال (03-05): بالنسبة لمثالنا النموذجي السابق (مثال 01-01) سنفترض أنه ارتفع الربح في الوحدة الواحدة من النوع (B) بمقدار 6 وحدات نقدية. فما أثر هذا التغير في الحل السابق؟.

الحل:

الجدول (03-13)			20	36	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
0	e_1	2400	3	**6**	1	0
0	e_2	1000	2	1	0	1
Z = 0			20	**36**	1	0

بإدخال المتغير Y في جدول الحل يكون الجدول الجديد كالتالي:

الجدول (03-14)			20	36	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
36	Y	400	$^1/_2$	1	$^1/_6$	0
0	e_2	600	$\mathbf{^3/_2}$	0	$-^1/_6$	1
Z = 18000			**2**	0	- 6	0

وبالقيام بعملية التحسين طالما هناك إمكانية، لذا لابد من إدخال الى الجدول المتغير (X) في مقابل خروج المتغير e_2 من الحل، وتكون النقطة $^3/_2$ هي نقطة المحور، ثم إجراء التعديلات اللازمة سوف يكون الجدول الجديد كالتالي:

الجدول (03-15)			20	36	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
36	Y	200	0	1	$^2/_9$	$-^1/_3$
20	X	400	1	0	$-^1/_9$	$^2/_3$
Z = 15200			0	0	$-^{20}/_9$	$-^{50}/_3$

نلاحظ من الجدول أعلاه أن الحل أمثل، وهو نفس الحل الوارد في الجدول (01-04) حيث لم تتغير قيم المتغيرات الأساسية، ما عدا قيمة دالة الهدف فقد ارتفعت بمقدار 1200 وحدة نقدية وهذه الزيادة المسجلة في الأرباح تعود لارتفاع الربح في الوحدة الواحدة من المنتوج (B) من 30 وحدة نقدية الى 36 وحدة نقدية.

$$Z = 14000[1+200(\beta)] \Rightarrow Z = 14000[1+200(6)] \Rightarrow Z = 14000+1200=15200$$

وعلى هذا الأساس فإنه في حالة زيادة الربح في الوحدة الواحدة من المنتوج (B) داخل المجال]0 10[أي كلما كان الربح في الوحدة الواحدة من هذا المنتوج ضمن المجال]30 40[فإن الحل السابق يبقى حلا صالحا ومقبولا، كما أن دالة الهدف تتغير قيمتها في المجال:

$$Z = 20(400) + 30(200) = 14000$$
$$Z = 20(400) + 40(200) = 16000$$

إذن مهما حدث من تغيير في ربح الوحدة من النوع (B) ضمن المجال]30 40[فإن أرباح المؤسسة سوف تتغير هي الأخرى ضمن المجال]14000 16000[، ولكن تبقى الكميات التي يمكن إنتاجها من النوعين دون تغيير وهي $X = 400$, $Y= 200$ ، أما خارج هذا المجال فإن الحل يتغير ولتبيان ذلك نأخذ المثال التالي:

مثال (06-03): نتيجة لزيادة الطلب على المنتوج (B) تتوقع المؤسسة أن يرتفع ربح الوحدة الواحدة من هذا النوع بنسبة 50%.

المطلوب: تحديد أثر هذا التغير في الربح في أمثلية الحل السابق؟.

الحل:

أي أن الربح في الوحدة من المنتوج (B) سوف يرتفع حسب توقعات المؤسسة بقيمة 15 وحدة نقدية ليصل الى 45 وحدة نقدية. وبإدخال هذا التغير في المسألة سوف نتحصل على الجدول التالي:

الجدول (16-03)			20	45	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
0	$\mathbf{e_1}$	2400	3	**6**	1	0
0	e_2	1000	2	1	0	1
Z = 0			20	**45**	1	0

بإدخال المتغير Y في جدول الحل وخروج المتغيرe_1 وبعد إدخال التعديلات اللازمة سوف يكون الجدول الجديد كالتالي:

الجدول (03-17)			40	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
45	Y	400	$^1/_2$	1	$^1/_6$	0
0	e_2	600	$^3/_2$	0	$-^1/_6$	1
Z = 18000			$-^5/_2$	0	$-^{35}/_2$	0

نلاحظ من خلال هذا الجدول أنه لا توجد إمكانية لتحسين الحل لأن جميع القيم في السطر الأخير أقل أو تساوي الصفر، وبالتالي نقول أن هذا الجدول يمثل الحل الأمثل، بحيث يمكن للمؤسسة إنتاج 400 وحدة فقط من النوع الثاني وتبقى 600 وحدة قياس من مادة البلاستيك غير مستغلة، وبمقارنة هذا الحل بالحل الوارد في الجدول(01-04) نجد أن الحل قد تغير وبالتالي فإنه في حالة زيادة الربح في الوحدة الواحدة من المنتوج (B) خارج المجال [10 0] أي كلما كان الربح في الوحدة الواحدة من هذا النوع خارج المجال [40 30[فإن الحل السابق يتغير ولم يعد صالحا ومقبولا.

ب- في حالة الانخفاض: إذا توقعنا انخفاض في الربح بمقدار β أي أن(β<0) فإن القيود التالية تحدد المجالات التي يبقى فيها الحل صالحا.

$$\begin{pmatrix} \beta \le 10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(01) \\ \beta \ge -20 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(02) \\ \beta < 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(03) \end{pmatrix} \Rightarrow -20 \le \beta < 0$$

إذن: $\beta \in [-20 \quad 0[$

وبما أن $C_2 = 30 + \beta$ فإن مجال تغير الربح هو:

$$30 - 20 \le C_2 < 30 + 0 \Rightarrow 10 \le C_2 < 30$$

أي أنه في المجال $C_2 \in [10 \quad 30]$ فإن الحل الأمثل يبقى صالحا، بينما خارج هذا المجال فإن الحل يتغير. حيث تتغير دالة الهدف نتيجة لانخفاض في الربح بمقدار β وبالتالي، فإن:

$$Z = 14000 + 200(\beta) \quad \forall \beta \in]-20 \quad 0]$$

مثال (03-07)**:** سوف نفترض أنه نتيجة لشدة المنافسة فإن المؤسسة تتوقع انخفاض في الربح في الوحدة الواحدة من النوع الثاني بمقدار 06 وحدات نقدية.

المطلوب: تحديد أثر هذا التغير في الربح في أمثلية الحل السابق؟.

الحل:

الجدول (18-03)			20	24	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
0	e_1	2400	3	**6**	1	0
0	e_2	1000	2	1	0	1
Z=0			20	**24**	1	0

بإدخال المتغير Y لجدول الحل يكون الجدول الجديد كالتالي:

الجدول (19-03)			20	24	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
24	Y	400	$^1/_2$	1	$^1/_6$	0
0	**e_2**	600	**$^3/_2$**	0	$-^1/_6$	1
Z = 9600			**8**	0	- 4	0

يتضح أنه يمكن تحسين الحل، وهذا عن طريق إدخال المتغير X للحل على النحو التالي:

الجدول (20-03)			20	24	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
24	Y	200	0	1	$^2/_9$	$-^1/_3$
20	X	400	1	0	$-^1/_9$	$^2/_3$
Z = 12800			0	0	$-^{28}/_9$	$-^{16}/_3$

نلاحظ من الجدول أعلاه أن الحل أمثل وهو نفس الحل الوارد في الجدول(01-04) حيث لم تتغير قيم المتغيرات الأساسية، ما عدا قيمة دالة الهدف فقد انخفضت بمقدار 1200 وحدة نقدية، وهذا الانخفاض في الأرباح يعود لانخفاض الربح في الوحدة الواحدة من المنتوج (B) الى 24 1200 وحدة نقدية.

وعليه، فإنه في حالة انخفاض الربح في الوحدة الواحدة من النوع الثاني (B) داخل المجال **]0 20 -]** أي كلما أنه كان الربح في الوحدة الواحدة ضمن المجال **]30 10]** فإن الحل السابق يبقى حلا صالحا ومقبولا، كما أن دالة الهدف تتغير قيمتها في المجال:

$$Z = 20 \times 400 + 10 \times 200 = 10000$$
$$Z = 20 \times 400 + 30 \times 200 = 14000$$

إذن مهما حدث من تغيير في ربح الوحدة من النوع (B) ضمن المجال**]30 10]** فإن الأرباح سوف تتغير هي الأخرى ضمن المجال **]14000 10000]**، ولكن تبقى الكميات التي يمكن إنتاجها من النوعين دون تغيير وهي X = 400, Y= 200، أما خارج هذا المجال فإن الحل يتغير ولتبيان ذلك نأخذ المثال التالي:

مثال (03-08): نظراً لزيادة حدة المنافسة في السوق من جهة، وارتفاع تكلفة إنتاج المنتوج الثاني (B) من جهة ثانية. فإن المؤسسة تتوقع أن يخفض الربح الذي تحققه من هذا النوع خلال الثلاثي الأول الى 08 وحدات نقدية.

المطلوب: دراسة أثر هذا الانخفاض على أمثلية الحل؟.

الحل:

الجدول (03-21)			20	08	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
0	e_1	2400	3	6	1	0
0	e_2	1000	**2**	1	0	1
Z = 0			**20**	08	1	0

بإدخال المتغير X الى الحل يكون الجدول الجديد كما يلي:

الجدول (03-22)			20	08	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
0	e_1	900	0	$9/2$	1	$-3/2$
20	X	500	1	$1/2$	0	$1/2$
Z = 10000			0	2-	0	10-

بما انه لا توجد قيمة موجبة في سطر Z فإن الحل أمثل، وبمقارنة هذا الحل بالحل الوارد في الجدول (01-04) يتبين أنه تغير وهذا نتيجة لانخفاض الربح في الوحدة من النوع (B) وأن هذا الانخفاض والذي قيمته 22 وحدة نقدية هو خارج مجال صلاحية الحل الأمثل.

$$Z = 14000 + 200(\beta) \Rightarrow Z = 14000 + 200(-22)$$
$$Z = 14000 + 200(-22) = 14000 - 4400 = 9600$$

03-02- حالة تغير في شروط المسألة أو في الموارد المتاحة

هي الحالات التي يتغير فيها الطرف الثاني من قيود مسألة البرمجة الخطية، أو بتعبير آخر هي تلك الحالات التي يُحتمل أن تتغير فيها الموارد المتاحة للمؤسسة بالزيادة أو بالنقصان في مثل هذه الحالات، وبالنسبة لمثالنا السابق، فإن أي تغيير في المادة الأولية أو في طاقة الورشة سيؤدي حتماً الى تغيُّر في عدد الوحدات التي يمكن إنتاجها من النوعين لأن هذه الأخيرة مرتبطة بالإمكانيات المتاحة. كما رأينا عند الحديث عن أسعار الظل بحيث زيادة وحدة واحدة سواء من المادة الأولية أو من ساعات العمل سوف تؤدي بالضرورة الى تغير في عدد الوحدات التي يمكن إنتاجها من النوعين؛ أي أن الحل سوف يتغير في حدود مجالات معينة لذا سوف ندرس هذه المجالات التي يمكن أن تتغير فيها هذه الموارد دون إعادة حل المسألة من جديد، بل فقط يمكن استنتاجه مباشرة. وعلى هذا الأساس، توجد طريقتان لإيجاد الحل الأمثل في ظل الظروف الجديدة الأولى ندرسها والثانية نستخلصها.

- **الطريقة الأولى:** في هذه الطريقة نعيد صياغة الجدول من جديد مع إدخال التغيرات المحتملة في الجدول، فإذا افترضنا على سبيل المثال أن (Δ_1) هي عدد الساعات المحتمل أن تتغير بها طاقة ورشة التصنيع بالزيادة أو بالنقصان، كما أن (Δ_2) هي عدد وحدات القياس التي تتوقع المؤسسة أن تتغير بها كمية المادة الأولية البلاستيك زيادة أو نقصانا أيضا. وعليه يكون التغير الذي سنحدثه في النموذج يتعلق بالطرف الأيمن للمتراجحات كما يلي:

$$3X + 6Y \leq 2400 + \Delta_1$$
$$2X + Y \leq 1000 + \Delta_2$$

أما بقية عناصر نموذج المسألة تبقى دون أدنى تغيير.

ولتحديد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية في ظل الظروف الجديدة يجب إدخال بعض التعديلات على جداول الحل النهائي، وهذا بإحلال Δ_1 محل e_1 وΔ_2 محل e_2 كما يلي:

الجدول (03-23)			20	30	0	0
Cj	V	Q_j	X	Y	Δ_1	Δ_2
30	Y	200	0	1	$^2/_9$	$-^1/_3$
20	X	400	1	0	$-^1/_9$	$^2/_3$
Z = 14000			0	0	$^{40}/_9$	$^{10}/_3$

وفقا لمصفوفة أسعار الظل التي تطرقنا اليها سابقا، فإن:

$$Y = 200 + {}^2/_9\,\Delta_1 - {}^1/_3\,\Delta_2$$
$$X = 400 - {}^1/_9\,\Delta_1 + {}^2/_3\,\Delta_2$$

وبحسب شرط عدم السلبية، فإنه يجب أن يكون $X \geq 0$, $Y \geq 0$ لذلك فإن:

$$200 + {}^{2}/_{9}\,\Delta_1 - {}^{1}/_{3}\,\Delta_2 \geq 0 \;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (01)$$
$$400 - {}^{1}/_{9}\,\Delta_1 + {}^{2}/_{3}\,\Delta_2 \geq 0 \;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (02)$$

وعليه، فإننا نعالج مثل هذه التغيرات حالة بحالة

الحالة الأولى: نفترض في هذه الحالة أن التغيير قد يحدث في طاقة ورشة التصنيع فقط، أي أن الكميات المتاحة من المادة الأولية البلاستيك تبقى كما هي دون أدنى تغيير($\Delta_2 = 0$) لذلك فإن:

$$200 + \frac{2\Delta_1}{9} \geq 0 \Rightarrow \Delta_1 \geq -\frac{200(9)}{2} \Rightarrow \Delta_1 \geq -900$$
$$400 - \frac{\Delta_1}{9} \geq 0 \Rightarrow \Delta_1 \leq 400(9) \Rightarrow \Delta_1 \leq 3600$$

إذن وحتى يمكن للمؤسسة إنتاج النوعين في ظل تغير طاقة الورشة يجب ألا يكون هذا التغير خارج المجال التالي: $-900 \leq \Delta_1 \leq 3600$

وبما أن الطاقة المتاحة للورشة هي $(2400 + \Delta_1)$ فإن ساعات عمل الورشة يجب أن تتغير في حدود المجال التالي:

$$2400 - 900 \leq Q_1 \leq 2400 + 3600$$
$$1500^h \leq Q_1 \leq 6000^h$$
$$Q_1 \in [1500^h \qquad 6000^h]$$

إذن داخل هذا المجال يمكن للمؤسسة إنتاج النوعين بكميات مختلفة باختلاف تغير طاقة الورشة، أما خارجه فإن قيمة أحد متغيرات النموذج تكون سالبة وهذا غير ممكن.

مثال (03-09)**:** نفرض أن المؤسسة قامت بإدخال تكنولوجيا جديدة في العملية الانتاجية مما أدى إلى تحسين في طاقة ورشة التصنيع بنسبة 150%.

المطلوب: تحديد أثر هذا التغير على أمثلية الحل.

الحل:

إذن ارتفعت طاقة ورشة التصنيع بـ 3600 ساعة عمل اضافية نتيجة لتكنولوجيا الانتاج التي احدثتها المؤسسة. وبالتالي، اصبحت الطاقة الجديدة لهذه الورشة هي 6000 ساعة عمل. وفي هذه الحالة يمكن استنتاج الحل مباشرة كما يلي:

$$Y = 200 + \frac{2(3600)}{9} \Rightarrow Y = 200 + 800 \Rightarrow Y = 1000$$
$$\Rightarrow Z = 30(1000) = 30000$$
$$X = 400 - \frac{3600}{9} \Rightarrow X = 400 - 400 \Rightarrow X = 0$$

وللتأكد من ذلك سيتم ايجاد الحل في ظل الظروف الجديدة

الجدول (03-24)			20	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
0	e_1	6000	3	**6**	1	0
0	e_2	1000	2	1	0	1
Z = 0			20	**30**	1	0

بإدخال المتغيرY الى الحل وخروج المتغير e_1 من الحل فيكون الجدول الجديد كما يلي:

الجدول (03-25)			20	30	0	0
Cj	V	Qj	**X**	Y	e_1	e_2
30	Y	1000	$^1/_2$	1	$^1/_6$	0
0	e_2	0	$^3/_2$	0	$-^1/_6$	1
Z = 30000			**5**	0	-5	0

كما يمكن إدخال المتغير X للحل طالما أن هناك امكانية لتحسين الحل:

الجدول (03-26)			20	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
30	Y	1000	0	1	$^2/_9$	$-^1/_3$
20	X	0	1	0	$-^1/_9$	$^2/_3$
Z = 30000			0	0	-5	0

بما انه لا توجد قيمة موجبة في سطر التقييم فإن الحل أمثل، بحيث يمكن للمؤسسة في هذه الحالة إنتاج 1000 وحدة من النوع الثاني فقط دون أن تتمكن من إنتاج النوع الأول، وإذا أرادت أن تنتج من هذا الأخير عليها إضافة وحدات قياس من مادة البلاستيك فهي غير كافية ($e_2=0$) لإنتاج هذا النوع، لأنها لو إضافت ساعة عمل واحدة لورشة التصنيع فإن ذلك سيؤدي الى إنتاج كميات سالبة من النوع الأول، وهذا يعتبر حل غير صالح وغير مقبول، وبمقارنة هذا الحل بالحل الوارد في الجدول (04-01) يتبين أنه تغير وهذا طبيعي نتيجة لتغير في طاقة الورشة وأن هذا التغير داخل مجال صلاحية الحل، لأن خارج هذا المجال سيكون الحل غير صالح ولتبيان ذلك يمكن أن نأخذ المثال التالي:

مثال (03-10)**:** نتيجة لِقِدَمْ بعض تجهيزات ورشة التصنيع فإن المؤسسة تتوقع تراجع في طاقتها الإنتاجية بورشة التصنيع بنسبة 75%.

المطلوب: تحديد أثر هذا التغير على أمثلية الحل.

الحل:

على إثر التراجع في الطاقة الإنتاجية لورشة التصنيع بنسبة 75%، ستنخفض طاقة هذه الورشة بـ 1800 ساعة عمل، مما يعني أنها تشتغل بـ 600 ساعة عمل فقط. وفي هذه الحالة يمكن استنتاج الحل مباشرة كما يلي:

$$Y = 200 + \frac{2(-1800)}{9} \Rightarrow Y = 200 - 400 \Rightarrow Y = -200$$

$$\Rightarrow Z = 30(-200) + 20(600) = 6000$$

$$X = 400 - \frac{(-1800)}{9} \Rightarrow X = 400 + 200 \Rightarrow X = 600$$

وللتأكد من الحل نبحث عن الحل في ظل الظروف الجديدة لطاقة الورشة

الجدول (03-27)			20	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
0	$\mathbf{e_1}$	600	3	**6**	1	0
0	e_2	1000	2	1	0	1
Z = 0			20	**30**	1	0

بإدخال المتغيرY الى الحل وخروج المتغيرe_1 من الحل يكون الجدول الجديد كما يلي:

الجدول (03-28)			20	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
30	Y	100	$^1/_2$	1	$^1/_6$	0
0	$\mathbf{e_2}$	900	$^3/_2$	0	$-^1/_6$	1
Z = 3000			**5**	0	-5	0

كما يمكن إدخال المتغير X للحل طالما أن هناك إمكانية لتحسينه كما في الجدول التالي:

الجدول (03-29)			20	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
30	Y	-200	0	1	$^2/_9$	$-^1/_3$
20	X	600	1	0	$-^1/_9$	$^2/_3$
Z = 6000			0	0	-5	0

يتضح أن هذا الحل غير مقبول لأنه لا يمكن إنتاج كميات سالبة من أي نوع $(X,Y\geq0)$

الحالة الثانية: أما في هذه الحالة سوف نفترض أن التغيير سوف يحدث في الكميات المتاحة من المادة الأولية البلاستيك فقط دون أي تغيير في طاقة الورشة، أي أن عدد ساعات العمل المتاحة تبقى كما هي دون أدنى تغيير$(\Delta_1 = 0)$ لذلك فإن:

$$200 - \frac{\Delta_2}{3} \geq 0 \Rightarrow \Delta_2 \leq 200(3) \Rightarrow \Delta_2 \leq 600$$

$$400 + \frac{2\Delta_2}{3} \geq 0 \Rightarrow \Delta_2 \geq -\frac{400(3)}{2} \Rightarrow \Delta_1 \geq -600$$

إذن وحتى يمكن للمؤسسة إنتاج النوعين في ظل تغير الكميات المتاحة من المادة الأولية البلاستيك يجب أن لا يكون هذا التغير خارج المجال التالي: $-600 \leq \Delta_2 \leq 600$

وبما أن الكميات المتاحة من مادة البلاستيك في هذه الحالة هي **($1000 + \Delta_2$)** فإن عدد وحدات القياس من هذه المادة يجب أن تتغير في حدود المجال التالي:

$$1000 - 600 \leq Q_2 \leq 1000 + 600$$
$$400^U \leq Q_2 \leq 1600^U$$
$$Q_2 \in [400^U \quad - \quad 1600^U]$$

إذن داخل هذا المجال يمكن للمؤسسة إنتاج النوعين بكميات مختلفة باختلاف تغير الكميات المتاحة من المادة الأولية البلاستيك، أما خارجه فإن قيمة أحد متغيرات النموذج تكون سالبة وهذا غير ممكن.

مثال (03-11)**:** نفرض أنه تمكنت المؤسسة من الحصول على كميات إضافية من مادة البلاستيك قدرت هذه الكميات بما يقارب 600 وحدة قياس.

المطلوب: تحديد أثر هذا التغير على أمثلية الحل.

الحل: إذن ارتفعت الكمية من مادة البلاستيك بـ 600 وحدة اضافية. وبالتالي، اصبحت لدى المؤسسة هي 1600 وحدة قياس. وفي هذه الحالة يمكن استنتاج الحل مباشرة كما يلي:

$$Y = 200 - \frac{600}{3} \Rightarrow Y = 200 - 200 \Rightarrow Y = 0$$
$$X = 400 + \frac{2(600)}{3} \Rightarrow Y = 400 + 400 \Rightarrow Y = 800$$
$$\Rightarrow Z = 20(800) = 16000$$

الجدول (03-30)			20	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
0	**e_1**	2400	3	**6**	1	0
0	e_2	1600	2	1	0	1
Z = 0			20	**30**	1	0

بإدخال المتغيرY الى الحل يكون الجدول الجديد كما يلي:

الجدول (03-31)			20	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
30	Y	400	$^1/_2$	1	$^1/_6$	0
0	**e_2**	1200	**$^3/_2$**	0	$-^1/_6$	1
Z = 12000			**5**	0	- 5	0

كما يمكن إدخال المتغير X للحل طالما أن هناك إمكانية لذلك كما يلي:

الجدول (03-32)			20	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
30	Y	0	0	1	$^2/_9$	$-^1/_3$
20	X	800	1	0	$-^1/_9$	$^2/_3$
Z = 16000			0	0	-5	0

عند هذا الحل الأمثل تنتج المؤسسة 800 وحدة من النوع الأول فقط دون أن تنتج النوع الثاني، وإذا أرادت أن تنتج من هذا الأخير عليها إضافة ساعات عمل للورشة ($e_1=0$) بإضافة وحدة واحدة من مادة البلاستيك، يؤدي الى إنتاج كميات سالبة من النوع الثاني، وهذا غير مقبول وبمقارنة هذا الحل بالحل الوارد في الجدول (04-01) يتبين أنه تغير وهذا طبيعي نتيجة لتغير في الكميات المتاحة من مادة البلاستيك، وأن هذا التغير داخل مجال صلاحية الحل لأن خارج هذا المجال سيكون الحل غير صالح ، ولتبيان ذلك يمكن أن نأخذ المثال التالي:

مثال (03-12)**:** نفترض أن المؤسسة تحصلت على كميات إضافية أخرى من مادة البلاستيك قدرها 750 وحدة قياس.

المطلوب: تحديد أثر هذه الزيادة على الحل.

الحل: بهذه الكمية الاضافية تصبح الكميات من المادة الأولية هي 1750 وحدة قياس.

$$Y = 200 - \frac{750}{3} \Rightarrow Y = 200 - 250 \Rightarrow Y = -50$$
$$\Rightarrow Z = 20(900) + 30(-50) = 16500$$
$$X = 400 + \frac{2(750)}{3} \Rightarrow Y = 400 + 500 \Rightarrow Y = 900$$

الجدول (03-33)			20	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
0	e_1	2400	3	**6**	1	0
0	e_2	1750	2	1	0	1
Z = 0			20	**30**	1	0

بإدخال المتغيرة (Y) للحل وخروج المتغيرة(e_1) منه يكون الجدول الجديد على النحو التالي:

الجدول (03-34)			20	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
30	Y	400	$^1/_2$	1	$^1/_6$	0
0	e_2	1350	$^3/_2$	0	$-^1/_6$	1
Z = 12000			**5**	0	-5	0

ولطالما توجد إمكانية لتحسين الحل وهذا بإدخال المتغيرة (X) للحل وخروج المتغيرة (e_2) منه يكون الجدول الجديد بعد عملية التحسين على النحو التالي:

الجدول (35-12)			20	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
30	Y	-50	0	1	$^2/_9$	$-^1/_3$
20	X	900	1	0	$-^1/_9$	$^2/_3$
Z = 16500			0	0	$-^{40}/_9$	$-^{10}/_3$

يتضح أن دالة الهدف عرفت تحسنا بإدخال المتغيرة الأولى للحل، ولكنه حل غير مقبول لأنه لا يمكن إنتاج كميات سالبة من أي نوع ($X,Y\geq 0$) لأن الزيادة التي حدثت في المادة الأولية كانت خارج مجال صلاحية الحل. ونفس الشيء فيما لو أن الكميات المتاحة من هذه المادة عرفت انخفاض لا زيادة ولكن هذا الانخفاض أيضا كان خارج مجال صلاحية الحل ولتبيان ذلك نأخذ المثال التالي:

مثال (13-03)**:** نتيجة لِقدم بعض تجهيزات المخزن فقد تعرضت 600 وحدة قياس من المادة الأولية للتّلف ونريد تحديد أثر هذا التغير على صلاحية الحل.

الحل: وبهذا التلف في المادة الأولية أصبحت الكميات المتاحة منها هي 400 وحدة قياس.

$$\left.\begin{array}{l} Y = 200 - \dfrac{(-600)}{3} \Rightarrow Y = 200 + 200 \Rightarrow Y = 400 \\ X = 400 + \dfrac{2(-600)}{3} \Rightarrow Y = 400 - 400 \Rightarrow Y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow Z = 20(0) + 30(400) = 12000$$

الجدول (36-03)			20	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
0	e_1	2400	3	**6**	1	0
0	e_2	400	2	1	0	1
Z = 0			20	**30**	1	0

بإدخال المتغير(Y) الى الحل وخروج المتغير (e_1) من الحل يكون الجدول الجديد كما يلي:

الجدول (37-03)			20	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
30	Y	400	$^1/_2$	1	$^1/_6$	0
0	e_2	0	**$^3/_2$**	0	$-^1/_6$	1
Z =12000			**5**	0	-5	0

كما يمكن إدخال المتغير X للحل طالما أن هناك امكانية لتحسين الحل:

الجدول (03-38)			20	30	0	0
Cj	V	Qj	X	Y	e_1	e_2
30	Y	400	0	1	$^2/_9$	$-^1/_3$
20	X	0	1	0	$-^1/_9$	$^2/_3$
Z = 12000			0	0	$-^{40}/_9$	$-^{10}/_3$

يتضح أن جميع القيم في سطر التقييم التقييم هي قيم معدومة، وهذا يعني أن الحل أمثل حيث يمكن للمؤسسة إنتاج 400 وحدة فقط من النوع الثاني، وبمقارنة هذا الحل بالحل الوارد في الجدول (01-04) يتضح أن الحل قد تغير بتغير كمية المادة الأولية البلاستيك فهي غير كافية للحصول على نفس عدد الوحدات من النوعين وكان التغير خارج مجال صلاحية الحل.

الطريقة الثانية: بهذه الطريقة فإنه يمكن الوصول لنفس النتيجة باستخدام الكيفية التالية:

- انطلاقا من جدول الحل الأمثل (01-04) وباستخدام أسعار الظل للموارد المتاحة كما يلي:

أ - مجال تغير طاقة ورشة التصنيع (Δ_1)

المعاملات المقابلة للمتغيرة e_1 هي ($^2/_9$) و ($-^1/_9$)

وعليه يمكن أن تستخلص المجالات مباشرة من الجدول التالي وبالكيفية التالية:

Q_J	e_1	$(Q_J/e_1)(-1)$
200	$^2/_9$	$200(^9/_2)(-1) = -900$
400	$-^1/_9$	$400(-9)(-1) = 3600$
$-900 \leq \Delta_1 \leq 3600$		

أي أن $\Delta_1 \in [-900 \quad 3600]$

وبما أن $Q_1 = 1000 + \Delta_1$ فإن: $1500^h \leq \Delta_1 \leq 6000^h$

ب - مجال تغير الكميات المتاحة من مادة البلاستيك (Δ_2)

المعاملات المقابلة للمتغيرة e_2 هي ($-^1/_3$) و ($^2/_3$)

وبنفس الكيفية يمكن أن تستخلص المجالات مباشرة كما يلي:

Q_J	e_2	$(Q_J/e_1)(-1)$
200	$-^1/_3$	$200(-3)(-1) = 600$
400	$^2/_3$	$400(^3/_2)(-1) = -600$
$-600 \leq \Delta_2 \leq 600$		

أي أن $\Delta_2 \in [-600 \quad - \quad 600\ ]$

وبما أن $Q_2 = 2400 + \Delta_2$ فإن: $400^U \leq \Delta_2 \leq 1600^U$

وهي نفس النتائج المتوصل إليها بالطريقة الأولى.

03-03- حالة تغير في المعاملات التقنية

إن دراسة أمثلية الحل وتحديد مجالات تغير المعاملات التقنية تحكمه قوانين تختلف حسب ظهور المتغيرات في جدول الحل النهائي، لذلك تظهر أمامنا حالتين:

الحالة الأولى: حالة المتغيرات خارج الحل الأمثل

إذا كانت أحد المتغيرات الأساسية للنموذج غير موجودة في الجدول النهائي المتضمن الحل الأمثل ولا تظهر في عمود المتغيرات (V)، فإن المجال الذي يمكن أن يتغير فيه المعامل التقني(a_{ij}) ومع هذا التغير يبقى الحل الأمثل صالحا هو:

$$-\left|\frac{X_j^*}{e_i^*}\right| \leq \Delta aij \leq +\infty$$

حيث أن :X^*_J هي قيمة X_J في سطر التقييم (Z).

X_J هي المتغيرات التي لم تظهر في جدول الحل النهائي، أما e^*_J قيمة e_J في سطر Z

مثال (03-14)**:** ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي

$$(Max)\ Z = 6X_1 + 16X_2 + 20X_3$$
$$10X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 100$$
$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 150$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

المطلوب: دراسة أثر تغير المعاملات التقنية (a_{IJ}) على أمثلية الحل.

الحل:

$$(Max)\ Z = 6X_1 + 16X_2 + 20X_3$$
$$10X_1 + 2X_2 + X_3 + e_1 = 100$$
$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 + e_2 = 150$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

الجدول (03-39)			06	16	20	0	0
Cj	V	Qj	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2
0	e_1	100	10	2	1	1	0
0	e_2	150	4	2	**2**	0	1
Z= 0			06	16	**20**	1	0

بإدخال المتغيرة X_3 الى الحل وخروج المتغيرة e_2 من الجدول وبعد إجراء التعديلات اللازمة نتحصل على الجدول التالي:

الجدول (03-40)			06	16	20	0	0
Cj	V	Qj	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2
0	e_1	25	8	1	0	1	$-^1/_2$
20	X_3	75	2	1	1	0	½
Z = 1500			- 34	- 4	0	0	- 10

نلاحظ أنه لا توجد قيمة موجبة في سطر التقييم، إذن فالحل أمثل، وبالتالي تكون:

$(e_2 =0)$, $(e_1=25)$, $(X_3=75)$, $(X_2= 0)$, $(X_1= 0)$

وتقابلها في سطر التقييم (Z) القيم التالية على الترتيب:

$(e_2^*=-10)$, $(e_1^*= 0)$, $(X_3^*= 0)$, $(X_2^*=- 4)$,$(X_1^*=-34)$

نلاحظ كذلك أن كل من المتغيرينX_2,X_1 هي متغيرات أساسية في النموذج ولكنها غير واردة في جدول الحل الأمثل. وعليه، فإن مجال تغير المعاملات التقنية التالية:

(a_{11}) ، (e_{12}) ، (e_{21})، (e_{22}) والذي لا يؤثر في أمثلية الحل هو:

$$-\left|\frac{X_j^*}{e_i^*}\right| \le \Delta aij \le +\infty$$

- **بالنسبة للمعامل** (a_{11}):

$$-\left|\frac{X_1^*}{e_1^*}\right| \le \Delta a_{11} \le +\infty \Rightarrow -\left|\frac{-34}{0}\right| \le \Delta a_{11} \le +\infty \Rightarrow -\infty \le \Delta a_{11} \le +\infty$$

إذن فإن : $\Delta a_{11} \in \Re$

وبما أن قيمة المعامل $(a_{11}=10)$ فإنه مهما ارتفعت أو انخفضت فإن الحل الأمثل يبقى صالحا ومقبولا، لو فرضنا أن $(a_{11}=1)$ وسوف نرى فيما إذا كان الحل قد تغير أم لا؟.

الجدول (03-41)			06	16	20	0	0
Cj	V	Qj	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2
0	e_1	100	1	2	1	1	0
0	e_2	150	4	2	**2**	0	1
Z = 0			06	16	**20**	1	0

بإدخال المتغيرة X_3 الى الحل وخروج المتغيرة e_2 من الجدول وبعد إجراء التعديلات اللازمة نحصل على الجدول التالي:

الجدول (03-42)			06	16	20	0	0
Cj	V	Qj	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2
0	e_1	25	-1	1	0	1	- ½
20	X3	75	2	1	1	0	½
Z = 1500			-34	- 04	0	0	-10

نلاحظ من الجدول أعلاه أنه لا توجد إمكانية لتحسين الحل وبالتالي فإن الحل أمثل وهو نفس الحل الوارد في الجدول (03-40)، أي أن الحل لم يتغير لأن تغير قيمة المعامل (a_{11}) كانت داخل مجال صلاحية الحل، لذا نقول أن الحل الوارد في الجدول (03-40) هو حل صالح مهما تغيرت قيمة المعامل(a_{11}).

- **بالنسبة للمعامل** (a_{12}): $-|-^{4}/_{0}| < \Delta a_{12} \leq +\infty$

إذن فإن: $-\infty \leq \Delta a_{12} \leq +\infty$ $(\Delta a_{12} \in \Re)$

وبما أن قيمة المعامل ($a_{12}=2$) فإنه مهما ارتفعت أو انخفضت فإن الحل الأمثل يبقى صالحا ومقبولا، لو افترضنا أن ($a_{12}=10$) سوف نرى فيما إذا كان الحل قد تغير أم لا؟

الجدول (03-43)			06	16	20	0	0
Cj	V	Qj	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2
0	e_1	100	10	10	1	1	0
0	$\mathbf{e_2}$	150	4	2	**2**	0	1
Z = 0			06	16	**20**	1	0

بإدخال المتغيرة X_3 الى الحل وخروج المتغيرة e_2 منه نتحصل على الجدول التالي:

الجدول (03-44)			06	16	20	0	0
Cj	V	Qj	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2
0	e_1	25	8	9	0	1	- ½
20	X3	75	2	1	1	0	½
Z = 1500			-34	-4	0	0	-10

نلاحظ من هذا الجدول أنه لا توجد إمكانية لتحسين الحل، وبالتالي فإن الحل أمثل هو نفسه المتوصل إليه في الجدول (03-40)، أي أن الحل لم يتغير لأن تغير قيمة المعامل (a_{12}) كانت داخل مجال صلاحية الحل، لذا نقول أن الحل الوارد في الجدول (03–40) هو حل صالح مهما تغيرت قيمة المعامل(a_{12}).

- **بالنسبة للمعامل (a_{21}):**

$$-|-^{34}/_{10}| < \Delta a_{21} \leq +\infty$$

إذن فإن: $-^{17}/_{5} < \Delta a_{21} \leq +\infty$ أي أن : $\Delta a_{21} \in]-^{17}/_{5} \quad \infty[$

وبما أن قيمة المعامل($a_{21}=4$) فإن مجال تغيرها هو:

$$4 - {}^{17}/_{5} < a_{21} \leq +\infty$$
$${}^{3}/_{5} < a_{21} \leq +\infty$$

أي أن $a_{21} \in]^3/_5 \; +\infty[$ داخل هذا المجال فإن الحل الأمثل يبقى صالحا ومقبولا، أما خارجه فإنه يتغير، وإذا أرادنا إدخال المتغيرة (X_1) للحل فإنه يجب استعمال $^3/_5$ وحدة على الأكثر كمعامل تقني لهذا المتغير لأن تغير المعامل (a_{11}) في مثالنا لا يؤثر على أمثلية الحل، لأنه عند القيمة $^3/_5$ سيكون لدينا حلا بديلا قيمة دالة الهدف عنده لا تتغير على الرغم من تغير قيمة المتغيرات الأساسية، ولتأكيد ذلك سوف نفرض أن قيمة المعامل a_{21} تغيرت من 4 الى $^3/_5$ لذا يجب البحث عما إذا كان الحل بقى صالحا أم لا.

الجدول (03-45)			06	16	20	0	0
Cj	V	Qj	X_1	X_2	$\mathbf{X_3}$	e_1	e_2
0	e_1	100	10	2	1	1	0
0	$\mathbf{e_2}$	150	$^3/_5$	2	**2**	0	1
Z = 0			06	16	**20**	1	0

بإدخال المتغيرة X_3 الى الحل وخروج المتغيرة e_2 منه نتحصل على الجدول التالي:

الجدول (03-46)			06	16	20	0	0
Cj	V	Qj	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2
0	e_1	25	$^{97}/_{10}$	1	0	1	$-^1/_2$
20	X3	75	$^3/_{10}$	1	1	0	½
Z= 1500			0	-4	0	0	-10

يتضح أن هذا الجدول يمثل حل أمثل وهو نفس الحل المتوصل إليه في الجدول (03-41) وفي نفس الوقت يتضمن حل بديل، يمكن الوصول إليه بإدخال المتغيرة X الى الحل وخروج المتغيرة e_1 وبعد إجراء التعديلات اللازمة نتحصل على الجدول التالي:

الجدول (03-47)			06	16	20	0	0
Cj	V	Qj	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2
6	X1	$^{250}/_{97}$	1	$^{10}/_{97}$	0	$^{10}/_{97}$	-0
20	X3	$^{7200}/_{97}$	0	$^{94}/_{97}$	1	$-^3/_{97}$	½
Z =1500			0	-4	0	0	-10

الملاحظ أن هذا حل أمثل وهو حل بديل لأن قيمة دالة الهدف هي نفسها، ولكن تغيرت قيمة المتغيرات الأساسية، لكون أن التغير في قيمة المعامل a_{21} كانت خارج مجال صلاحية الحل الأمثل المشار إليه سابقا.

- **بالنسبة للمعامل (a_{22}):**

$$-|-^4/_{-10}| < \Delta a_{22} \leq +\infty$$

إذن فإن: $-^2/_5 < \Delta a_{22} \leq +\infty$ أي أن: $\Delta a_{22} \in]-^2/_5 \quad - \quad \infty[$

وبما أن قيمة المعامل$(a_{22}= 2)$ فإن مجال تغيرها هو:

$$\mathbf{2 - {}^2/_5 < a_{22} \leq +\infty}$$
$$\mathbf{{}^8/_5 < a_{22} \leq +\infty}$$

أي أن $a_{21} \in]^8/_5 \quad +\infty[$ داخل هذا المجال فإن الحل الأمثل يبقى صالحا ومقبولا، أما خارجه فإنه يتغير، وإذا أردنا إدخال المتغيرة (X_2) للحل فإنه يجب استعمال $^8/_5$ وحدة على الأكثر كمعامل تقني لهذا المتغير لأن تغير المعامل (a_{12}) في مثالنا لا يؤثر على أمثلية الحل، لأنه عند القيمة $^8/_5$ سيكون لدينا حلا بديلا قيمة دالة الهدف عنده لا تتغير على الرغم من تغير قيمة المتغيرات الأساسية، ولذلك سوف نفرض أن قيمة المعامل a_{22} تغيرت من 2 الى $^8/_5$، وعليه يجب البحث فيما إذا كان الحل يبقى صالحا أم لا.

الجدول (03-48)			06	16	20	0	0
Cj	V	Qj	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2
0	e_1	100	10	2	1	1	0
0	e_2	150	4	$^8/_5$	**2**	0	1
Z = 0			06	16	**20**	1	0

بدخول المتغيرة (X_3) الى الحل وخروج المتغيرة (e_2) منه نتحصل على الجدول التالي:

الجدول (03-49)			06	16	20	0	0
Cj	V	Qj	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2
0	e_1	25	8	$^{12}/_{10}$	0	1	$-^1/_2$
20	X_3	75	2	$^8/_{10}$	1	0	$^1/_2$
Z =1500			-34	0	0	0	-10

يتضح أن هذا الجدول يمثل حل أمثل، وهو نفس الحل أيضا المتوصل إليه في الجدول (03-40)، وفي نفس الوقت يتضمن حل بديل، يمكن الوصول إليه بإدخال المتغيرة (X_2) الى الحل وخروج المتغيرة (e_1) وبعد إجراء التعديلات اللازمة نتحصل على الجدول التالي:

الجدول (03-50)			06	16	20	0	0
Cj	V	Qj	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2
16	X_2	$^{125}/_6$	$^{20}/_3$	1	0	$^5/_6$	$-^3/_7$
20	X_3	$^{175}/_3$	$-^{10}/_3$	0	1	$-^2/_3$	$^5/_6$
Z =	1500		-34	0	0	0	-10

الملاحظ أن هذا حل أمثل وهو حل بديل لأن قيمة دالة الهدف هي نفسها، ولكن تغيرت قيمة المتغيرات الأساسية، لكون أن التغير في قيمة المعامل a_{22} كانت خارج مجال صلاحية الحل الأمثل المشار إليه سابقا.

بينما لو فرضنا أن التغيير كان داخل مجال صلاحية الحل بحيث تغيرت قيمة المعامل a_{22} من 2 الى 10، وعليه يجب البحث فيما إذا كان الحل يبقى صالحا أم لا.

الجدول (03-51)			06	16	20	0	0
Cj	V	Qj	X_1	X_2	**X_3**	e_1	e_2
0	e_1	100	10	2	1	1	0
0	**e_2**	150	4	10	**2**	0	1
Z = 0			06	16	**20**	1	0

بدخول المتغيرة (X_3) الى الحل وخروج المتغيرة (e_2) منه نحصل على الجدول التالي:

الجدول (03-52)			06	16	20	0	0
Cj	V	Qj	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2
0	e_1	25	8	-3	0	1	- ½
20	X3	75	2	5	1	0	½
Z = 1500			-34	-84	0	0	-10

بما أن الحل أمثل ولا توجد إمكانية لتحسينه نقول أن هذا الحل هو نفسه الوارد في الجدول (03-40) على الرغم من تغير قيمة المعامل وأن هذا التغيير كان ضمن مجال صلاحية الحل لهذا لم يتغير الحل.

الحالة الثانية: حالة المتغيرات داخل الحل الأمثل

إذا كانت أحد المتغيرات الأساسية للنموذج موجودة في الجدول النهائي المتضمن الحل الأمثل وتظهر في عمود المتغيرات (V) فإن المجال الذي يمكن أن يتغير فيه المعامل التقني (a_{ij}) ويبقى الحل الأمثل صالحا هو:

$$\left|\frac{e_i^*}{X_j^*}\right| \le \Delta aij \le +\infty$$

حيث أن: X^*_J هي المتغيرات الأساسية (J) الموجودة في جدول الحل النهائي.

e^*_i قيمة متغيرات الفوارق (i) الموجودة في الحل.

يُستخدم هذا القانون في حالة وجود المتغيرة (e_i) في جدول الحل الأمثل أي في حالة وجود متغيرة الفارق في عمود (V) بينما في حالة عدم وجود المتغيرة (e_i) فـي الحل الأمثل فإن مجال التغير معدوم أي ($\Delta a_{IJ}=0$) وفي هذه الحالة يتغير الحل إذا تغيرت قيمة هذه المعاملات.

وفي مثالنا السابق فإن:

- المتغيرات الأساسية الموجودة في جدول الحل الأمثل هي: (X_3)
- متغيرات الفوارق الموجودة في جدول الحل الأمثل هي: (e_1)

إذن فإن مجال التغير هو: $-\infty \le \Delta a_{13} \le {}^{25}/_{75} \Rightarrow -\infty \le \Delta a_{13} \le {}^{1}/_{3}$

أي أن $\Delta a_{13} \in]-\infty \quad {}^{1}/_{3}[$ داخل هذا المجال فإن الحل الأمثل يبقى صالحا ومقبولا، أما خارجه فإنه يتغير وبما أن $a_{13}=1$ فإن: $-\infty \le a_{13} \le {}^{1}/_{3}+1 \Rightarrow -\infty \le a_{13} \le {}^{4}/_{3}$

أي أن $a_{13} \in]-\infty \quad {}^{4}/_{3}[$

أما متغيرات الفوارق غير موجودة في الحل هي (e_2)

إذن فإن $\Delta a_{23} = 0$ وهذا يعني أنه إذا حدث أي تغيير في المعامل التقني($\Delta a_{23}=2$) سواء بالزيادة أو بالنقصان فإن الحل الأمثل سيتغير ولم يعد مقبولا.

يمكن تلخيص حالة تغير المعاملات التقنية في الجدول التالي:

<table>
<tr><td>المتغير X_j لا ينتمي للحل الأمثل</td><td colspan="2">$-\left|\frac{X_j^*}{e_i^*}\right| \le \Delta aij \le +\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">المتغير X_j ينتمي للحل الأمثل</td><td>المتغيرe_j لا ينتمي للحل الأمثل</td><td>$\Delta a_{ij} = 0$</td></tr>
<tr><td>المتغيرe_j ينتمي للحل الأمثل</td><td>$-\infty \le \Delta aij \le \left|\frac{X_j}{e_i}\right|$</td></tr>
</table>

تمارين

التمرين (III-1): ليكن لدينا النموذج الرياضي التالي

$$[MAX]\ Z = 16X_1 + 18X_2$$
$$4X_1 + 2X_2 \leq 60$$
$$2X_1 + 4X_2 \leq 48$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

والحل الأمثل لهذه المسألة هو كالتالي :

C_J	V	Q_j	8	6	0	0
			X_1	X_2	e_1	e_2
8	X_1	12	1	0	$^1/_3$	$-^1/_6$
6	X_2	6	0	1	$-^1/_6$	$^1/_3$
Z = 132			0	0	$-^5/_3$	$-^2/_3$

المطلوب: بين حدود تغير الأرباح والموارد (زيادة ونقصان) دون أن يتغير الحل الأمثل.

إذا كان: $C_1 = 2\ ,\ C_2 = 20\ ,\ a_2 = 6\ ,\ Q_1 = 48$

الحل:

أولاً: البحث عن حدود تغيُّر الأرباح دون أن يتغير الحل الامثل

❶- التغيير في الأرباح بالنسبة (X1) بمقدار (α) زيادة او نقصانا

C_J	V	Q_j	$8 + \alpha$	6	0	0
			X_1	X_2	e_1	e_2
$8 + \alpha$	X_1	12	1	0	$^1/_3$	$-^1/_6$
6	X_2	6	0	1	$-^1/_6$	$^1/_3$
$Z = 132+12\alpha$			0	0	$-^5/_3 - ^\alpha/_3$	$-^2/_3 + ^\alpha/_6$

حتى يبقى الحل امثلا يجب أن تكون كل القيم الواردة في سطر Z اقل او تساوي الصفر أي:

$$\left.\begin{array}{l} -^5/_3 - ^\alpha/_3 \leq 0 \Rightarrow -5 - \alpha \leq 0 \Rightarrow \alpha \geq -5 \\ -^2/_3 + ^\alpha/_6 \leq 0 \Rightarrow -4 + \alpha \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{-5 \leq \alpha \leq 4}$$

وبما أن $C_1 = 8 + \alpha$ فإن مجال تغيُّر الربح دون ان يتغير الحل الأمثل، هو:

$$-5 + 8 \leq C_1 \leq 4 + 8 \Rightarrow 3 < C_1 \leq 12 \Rightarrow C_1 \in [3\quad 8[U]8\quad 12[$$

❷- التغيير في الأرباح بالنسبة (X2) بمقدار (β) زيادة او نقصانا

C_J	V	Q_j	8	$6 + \beta$	0	0
			X_1	X_2	e_1	e_2
8	X_1	12	1	0	$^1/_3$	$-^1/_6$
$6 + \beta$	X_2	6	0	1	$-^1/_6$	$^1/_3$
$Z = 132+6\beta$			0	0	$-^5/_3 + ^\beta/_6$	$-^2/_3 - ^\beta/_3$

حتى يبقى الحل امثلا يجب ان تكون كل القيم الواردة في سطر Z اقل او تساوي الصفر أي:

$$\left.\begin{array}{l} -^5/_3 + ^\beta/_6 \leq 0 \Rightarrow -10 + \beta \leq 0 \Rightarrow \beta \leq 10 \\ -^2/_3 - ^\beta/_3 \leq 0 \Rightarrow -2 - \beta \leq 0 \Rightarrow \beta \geq -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{-2 \leq \beta \leq 10}$$

وبما أن $C_2 = 6 + \beta$ فإن مجال تغير الربح دون تغير في الحل الأمثل، هو:

$$\mathbf{-2 + 6 < C_2 \leq 10 + 6 \Rightarrow 4 < C_2 \leq 16 \Rightarrow C_2 \in [4\quad 6[U]6\quad 16[}$$

ثانياً: البحث عن حدود تغيُّر الأرباح دون أن يتغير الحل الامثل

❶ - مجال تغيُّر ساعات العمل (Δ_1)

المعاملات المقابلة للمتغيرة e_1 هي $(^1/_3)$ و $(-^1/_6)$

وعليه يمكن أن تستخلص المجالات مباشرة من الجدول التالي وبالكيفية التالية :

Q_J	e_1	$(Q_J/e_1)(-1)$
12	$^1/_3$	$12(3)(-1) = -36$
6	$-^1/_6$	$6(-6)(-1) = 36$
$-36 \leq \Delta_1 \leq 36$		

أي أن $\Delta_1 \in [-36 \quad 36]$

وبما أن $Q_1 = 60 + \Delta_1$ فإن

$$60\text{-}36^h \leq Q_1 \leq 60+36^h \Rightarrow 24 \leq Q_1 \leq 96$$
$$Q_1 \in [24 \quad 60[U]60 \quad 96[$$

❷ - مجال تغيُّر الكميات المتاحة من المادة الأولية (Δ_2)

المعاملات المقابلة للمتغيرة e_2 هي $(-^1/_6)$ و $(^1/_3)$

وعليه يمكن أن تستخلص المجالات مباشرة من الجدول التالي وبالكيفية التالية :

Q_J	e_2	$(Q_J/e_1)(-1)$
12	$-^1/_6$	$12(-6)(-1) = 72$
6	$^1/_3$	$6(3)(-1) = -18$
$-18 \leq \Delta_2 \leq 72$		

أي أن $\Delta_1 \in [-18 \quad 72]$

وبما أن $Q_2 = 48 + \Delta_2$ فإن

$$48\text{-}18 \leq Q_2 \leq 48+72 \Rightarrow 30 \leq Q_2 \leq 120$$
$$Q_2 \in [30 \quad 48[U]48 \quad 120[$$

التمرين (III-2): ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي

تعظيم الأرباح	$Max\ Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$
قيد المادة الأولى	$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 340$
قيد المادة الثانية	$3X_1 + 2X_3 \leq 460$
قيد ساعات العمل	$3X_1 + 4X_2 \leq 420$
قيد عدم السلبية	$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

أدرس ماذا يحدث في الحالات التالية:

1. لو يرتفع الربح في الوحدة من المنتوج الأول إلى أكثر من 7 وحدات نقدية؟.
2. اذا تغيرت معايير إستهلاك المواد في إنتاج المنتوج الأول
3. اذا ارتفع الربح في الوحدة من المنتوج الثاني إلى 10 وحدات نقدية؟.
4. عند تخفيض ساعات العمل إلى 300 ساعة فقط؟

الحل:

C_J	V	Q_j	3	2	5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	e_1	e_2	e_3
0	e_1	340	1	2	1	1	0	0
0	e_2	460	1	0	**2**	0	1	0
0	e_3	420	3	4	0	0	0	1
Z = 0			3	2	**5**	0	0	0

C_J	V	Q_j	3	2	5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	e_1	e_2	e_3
0	e_1	110	$^1/_2$	**2**	0	1	$-^1/_2$	0
5	X_3	230	$^1/_2$	0	1	0	$^1/_2$	0
0	e_3	420	3	4	0	0	0	1
Z = 1150			$^1/_2$	**2**	0	0	$-^5/_2$	0

C_J	V	Q_j	3	2	5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	e_1	e_2	e_3
2	X_2	55	$^1/_4$	1	0	$^1/_2$	$-^1/_4$	0
5	X_3	230	$^1/_2$	0	1	0	$^1/_2$	0
0	e_3	200	2	0	0	-2	1	1
Z = 1260			0	0	0	-1	-2	0

يتضح أن الحل امثل والذي يعني أن المؤسسة تنتج 55 وحدة من النوع الثاني و230 وحدة من النوع الثالث وتحقق بذلك المؤسسة أقصى ربح ممكن 1260، وهذا دون أن تنتج المنتوج الثالث لأن قيمة (X_3) لا تظهر في جدول الحل النهائي، ولكن يتضح وأن هناك حل آخر بديل حيث يمكن الوصول إليه بإدخال المتغيرة (X_3) للحل نتحصل على الجدول التالي:

CJ	V	Qj	3	2	5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	e_1	e_2	e_3
2	X_2	30	0	1	0	$^3/_4$	$-^3/_8$	$-^1/_8$
5	X_3	180	0	0	1	$^1/_2$	$^1/_4$	$-^1/_4$
3	X_1	100	1	0	0	-1	$^1/_2$	$^1/_2$
Z = 1260			0	0	0	-1	-2	0

هذا حل بديل للحل السابق لطالما يعطي نفس قيمة دالة الهدف أقصى ربح ممكن 1260 والذي يعني أن المؤسسة بدلا من أن تنتج 55 وحدة من النوع الثاني تنتج فقط 30 وحدة منه وبدلا من انتاج 230 وحدة من النوع الثالث تكتفي بانتاج 180 وحدة منه في مقابل ادخال المنتوج الأول للتشكيلة الانتاجية حيث يمكن للمؤسسة أن تنتج منه 100 وحدة.

1. لو يرتفع الربح في الوحدة من المنتوج الأول إلى أكثر من 7 وحدات نقدية؟.

C_J	V	Q_j	$\mathbf{3+\alpha}$	2	5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	e_1	e_2	e_3
2	X_2	30	0	1	0	$^3/_4$	$-^3/_8$	$-^1/_8$
5	X_3	180	0	0	1	$^1/_2$	$^1/_4$	$-^1/_4$
$\mathbf{3+\alpha}$	X_1	100	1	0	0	-1	$^1/_2$	$^1/_2$
$Z = 1260+300\alpha$			0	0	0	$-1+\alpha$	$-2-^{\alpha}/_2$	$-^{\alpha}/_2$

$$-1+\alpha \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq 1$$
$$-2-{}^{\alpha}/_{2} \leq 0 \Rightarrow \alpha \geq -4$$
$$\alpha/2 \leq 0 \Rightarrow \alpha > 0$$

من خلال المجالات السابقة يمكننا القول أن: $\alpha \in]0 \quad 1]$

وبما أن $C_1 = 3 + \alpha$ فإن:

- مجال تغير الربح للوحدة في المنتوج الأول هو: $0 + 3 < C_1 \leq 1+ 3 \Rightarrow 3< C_1 \leq 4$

- مجال تغير دالة الهدف هو: $1260 + 300(0) < Z\leq 1260 + 300(1) \Rightarrow 1260< Z \leq 1560$

أي أنه في المجال $C_1\in]3 \quad 4]$ فإن الحل الأمثل يبقى صالحا، وخارجه يتغير. لذلك لو يرتفع الربح في الوحدة من المنتوج الأول إلى أكثر من 7 وحدات نقدية فإن الحل السابق يتغير.

2. اذا تغيرت معايير إستهلاك المواد في إنتاج المنتوج الأول

ولأن المتغير X_1 موجود في الجدول النهائي، فإن مجال التغير المعاملات a_{11} و a_{21} معدوم نظراً لعدم وجود المتغيرة (e_1) و(e_2) في الحل الأمثل، أي أن $(\Delta a_{11} = 0)$ و$(\Delta a_{21} = 0)$

3. اذا ارتفع الربح في الوحدة من المنتوج الثاني إلى 10 وحدات نقدية؟.

C_J	V	Q_j	3	**2+ β**	5	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	e_1	e_2	e_3
2+ β	X_2	30	0	1	0	$^3/_4$	$-^3/_8$	$-^1/_8$
5	X_3	180	0	0	1	$^1/_2$	$^1/_4$	$-^1/_4$
3	X_1	100	1	0	0	-1	$^1/_2$	$^1/_2$
Z = 1260			0	0	0	$-1-^{3\beta}/_4$	$-2+^{3\beta}/_8$	$^{\beta}/_8$

$$-1-{}^{3\beta}/_{4}\leq 0 \Rightarrow \beta\geq -{}^{3}/_{4}$$
$$-2+{}^{3\beta}/_{8}\leq 0 \Rightarrow \beta\leq {}^{16}/_{3}$$
$${}^{\beta}/_{8}\leq 0 \Rightarrow \beta\leq 0$$

من خلال المجالات السابقة يمكننا القول أن: $\beta\in[-^3/_4 \quad 0]$

وبما أن $C2 = 2 + \beta$ فإن مجال تغير الربح هو:

$$2 -{}^{3}/_{4}\leq C_2< 2 + 0 \Rightarrow {}^{5}/_{4}< C_2 \leq 2$$

لذلك لو يرتفع الربح في الوحدة من المنتوج الثاني إلى 10 وحدات نقدية فإن الحل السابق سوف يتغير

4. عند تخفيض ساعات العمل إلى 300 ساعة فقط؟

وبما أن هناك تخفيض، أي $(\Delta 3< 0)$ فإن الشروط التالية تحدد لنا مجالات صلاحية الحل:

$$30 - {}^{1}/_{8}\, \Delta_3\geq 0 \text{ ....}(01)$$
$$180 - {}^{1}/_{4}\Delta_3 \geq 0 \text{ ....}(02)$$
$$100 + {}^{1}/_{2}\Delta_3 \geq 0 \text{ ....}(03)$$
$$\Delta_3 < 0 \text{ ....}(04)$$

وبالتالي نستنتج بأن:

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \leq 240 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (01) \\ \Delta_1 \leq 720 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (02) \\ \Delta_1 \geq -200 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (03) \\ \Delta_1 < 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (04) \end{pmatrix} \Rightarrow -200 \leq \Delta_1 < 0$$

من خلال المجالات السابقة يمكننا القول أن : $\Delta_1 \in [-200 \quad 0[$

وبما أن المتاح من ساعات العمل هو $Q_1 = 420 + \Delta_1$ فإن مجالات التغير هي:

$$-200 + 420 < Q_3 \leq 0 + 420 \Rightarrow 220 < Q_3 \leq 420$$

وبما أن ساعات العمل انخفضت إلى 300 ساعة بدلا من 420 ساعة أي أن $\Delta_3 = -120$

وهي تقع ضمن المجال $\Delta_3 \in [-200 \quad 0[$ فإن الحل الأمثل السابق يمكن استنتاجه مباشرة دون إعادة حل المسألة، ليكون كالتالي:

$$\mathbf{X_1} = 30 - {}^1/_8(-120) = 45$$
$$\mathbf{X_2} = 180 - {}^1/_4(-120) = 210$$
$$\mathbf{X_3} = 100 + {}^1/_2(-120) = 40$$
$$Z = 3(15) + 2\,(210) + 5(40) = 665$$

التمرين III-3: بالرجوع للتمرين "01-07"

- المطلوب: الاجابة عن الأسئلة التالية

1- ماذا يحدث إذا انخفضت طاقة قسم الثني بمقدار 160 ساعة بسبب توقف بعض الآلات؟.

2- هل من المربح زيادة طاقة قسم التغليف؟.

3- هل يتغير الحل الأمثل فيما إذا إرتفع الربح في الوحدة من النوع A بـ 10 وحدات نقدية؟.

4- يفكر مدير هذه المؤسسة في تخفيض الوقت الذي تتطلبه الوحدة من A في قسم القطع، وكذلك الزمن الذي تستغرقه الوحدة الواحدة من B في قسم الثني، فما تأثير هذا الإجراء على أمثلية الحل؟.

التمرين III-4: تلقت إحدى المؤسسات طلبية تتضمن إنتاج 3000 زوج من ثلاث أنواع من الأحذية (أحذية رجال P1، أحذية أطفال P2، أحذية نساء P3) تحتوي بنود هذه الطلبية إنتاج 1000 زوج من أحذية الرجال، وما لا يقل عن 1500 زوج من أحذية الأطفال.

والجدول التالي يبين أهم المعطيات.

	أحذية رجال	أحذية أطفال	أحذية نساء	الوقت المتاح
الورشة الأولى	1^h	2^h	3^h	5000^h
الورشة الثانية	2^h	1^h	1^h	3500^h
الربح الصافي	100	250	300	–

1- أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة بإستخدام الطريقة المبسطة (*Simplexe*)؟.

2- أدرس حدود تغيّر الأرباح بالنسبة للمنتجات الثلاثة لكي يبقى الحل دون تغيير؟.

3- هل يمكن تخفيض حجم ساعات عمل الورشات الى النصف.

4- يفكر مدير هذه المؤسسة في شراء آلة لتدعيم عمل الورشة الاولى، وقد يؤدي ذلك لتخفيض الوقت المخصص للإنتاج إلى ساعة عمل واحدة فقط لكل نوع من الأحذية، هل سيؤثر شراء هذه الآلة على البرنامج الإنتاجي لهذه المؤسسة.

الفصل الرابع

4

مسائل النقل

مسائل النقل

تعتبر مسألة النقل حالة خاصة من مسائل البرمجة الخطية، وقد كان التطبيق الأول لها بغرض إيجاد الطريقة التي يتم بها نقل مجموعة من الوحدات المتجانسة من مصادر وأماكن تواجدها، نحو مختلف مراكز التوزيع. وذلك لكي تكون مجموع تكاليف نقلها في حدها الأدنى، ثم تعددت استخداماتها في مجالات أوسع فيما بعد، كتوزيع المخطط الإنتاجي على الورشات، في خطط التمويل، في تخطيط الإشهار...الخ.

وتكمن خصوصيتها وشرط استخدامها في كون أن الوحدات المنقولة أو الموزعة يجب أن تكون **متجانسة**، مما يستوجب إتباع إجراءات خاصة لحلها، تتطلب المرور بالخطوات التالية:

1- دراسة وفهم المسألة؛

2- كتابة أو تشكيل النموذج؛

3- الوصول إلى حل قاعدي أولي؛

4- مراقبة أمثلية الحل؛

5- تحسين الحل.

04-01- مسألة النقل في حالة التقليل (*MINIMISATION*)

تأخذ مسألة النقل إحدى الحالتين وهذا حسب طبيعة دالة الهدف (*MIN*) أو (MAX) ولا يختلف النموذج في الحالتين، وإنما الاختلاف الوحيد في الخطوتين الرابعة والخامسة.

مثال(04-01)**:** نفرض أننا نريد توزيع سلعة ما ولتكن (M) يتم أنتاجها ضمن ثلاث ورشات (At1, At2, At 3) على أربعة مستهلكين (A,B,C,D) بحيث أن الكميات المتوفرة حاليا والمراد توزيعها، وكذلك الكميات المطلوبة من طرف المستهلكين الأربع هي كالتالي:

الجدول (04-01): الكميات المعروضة والمطلوبة من السلعة (بالطن)

المنتج	الكميات المعروضة	المستهلك	الكميات المطلوبة
At_1	200	*A*	280
At_2	250	B	300
At_3	550	*C*	230
		D	190

أما تكاليف نقل الطن الواحد فهي كما يلي:

الجدول(04-02): تكاليف نقل السلعة من المنتجين نحو المستهلكين (و.ن/طن)

D	C	B	A	
4	5	3	2	At_1
6	4	2	3	At_2
8	3	4	5	At_3

المطلوب: بين كيف يمكن نقل هذه السلعة من مختلف ورشات التصنيع نحو مختلف المستهلكين على أن تكون إجمالي تكاليف النقل في حدها الأدنى.

04-02- تشكيل النموذج والبحث عن الحل القاعدي

04-02-01- تشكيل النموذج

من أجل تشكيل النموذج نستخدم الرموز التالية:

n: عدد المنتجين (العرض)

m: عدد المستهلكين (الطلب)

a_i: حاجة المستهلك i (الكمية المطلوبة)

b_j: عرض المنتج j (الكمية المعروضة)

x_{ij}: الكمية المنقولة من المنتج j إلى المستهلك i

c_{ij}: تكلفة نقل الوحدة من المنتج j إلى المستهلك i.

وعلى هذا الأساس نستطيع تحديد مجموع حاجات المستهلكين (**حجم الطلب**) كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{m} ai = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_m$$

وبالنسبة لمثالنا:

$$\sum_{i=1}^{4} ai = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

أما بالنسبة لعرض المنتجين (**الكميات المعروضة**) فهو:

$$\sum_{i=1}^{n} bj = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots. + bn$$

وبالنسبة لمثالنا:

$$\sum_{j=1}^{3} bj = b_1 + b_2 + b_3$$

وعلى افتراض أن الكميات المعروضة تساوي الكميات المطلوبة، فإن:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3$$

$$\sum_{i=1}^{4} ai = \sum_{j=1}^{3} bj$$

ولأنه يجب توزيع كل الكميات المعروضة، وبالتالي فإن:

$$\left.\begin{array}{l} X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}=b_{1} \\ X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}=b_{2} \\ X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}=b_{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} Z_{ij}=b_{j}$$

كما يجب تلبية الكميات المطلوبة أيضا،على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{l} X_{11}+X_{12}+X_{13}=a_{1} \\ X_{21}+X_{22}+X_{23}=a_{2} \\ X_{31}+X_{32}+X_{33}=a_{3} \\ X_{41}+X_{42}+X_{43}=a_{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{j=1}^{3} Z_{ij}=b_{j}$$

يمكن التعبير عن دالة الهدف بالشكل التالي:

$$[Min]\ Z=(X_{11}C_{11}+X_{12}C_{12}+X_{13}C_{13}+\ldots+X_{mn}C_{mn})$$

$$[\text{Min}]\ Z=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}C_{ij}\right)$$

وبالنسبة لمثالنا فإن دالة الهدف هي:

$$[Min]\ Z=(2X_{11}+3X_{12}+5X_{13}+\ldots+4X_{41}+6X_{42}+8X_{43})$$

$$Z=(\sum\sum X_{ij}C_{ij})Min$$

$$i=1,2,3,4 \qquad j=1,2,3$$

أما الكميات التي يجب أن تنقل لا يمكن أن تكون كميات سالبة أي : $Xij \geq 0$

ويسمى هذا بقيد أو شرط عدم السلبية.

من كل ما سبق يكون نموذج مسألة النقل على الشكل التالي:

$$\begin{cases} Z=Min\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}C_{ij}\right) \\ \sum_{j=1}^{m}=ai\sum_{j=1}^{n} bj \\ \sum_{j=1}^{n} Xij=ai \\ \sum_{i=1}^{m} ij=bj \\ \text{X}ij \geq 0 \end{cases}$$

04-02-02- طرق البحث عن الحل القاعدي

يعرف الحل القاعدي بأنه الحل الذي يتضمن على الأكثر عدد من المتغيرات ضمن الخانات الشاغلة يساوي ($m+n-1$) أي أن: ($v\leq m+n-1$) فإذا كان عدد الخانات الشاغلة أقل من (m+n-1) فإن الحل القاعدي هو حل أولى *Solution initiale* .

للبحث عن الحل القاعدي نستخدم طرق كثيرة أهمها:

- ✓ طريقة خانة الشمال الغربي
- ✓ طريقة أدنى تكلفة في السطر
- ✓ طريقة أدنى تكلفة في العمود
- ✓ طريقة أدنى تكلفة في الجدول
- ✓ طريقة الجزاء والعقاب (طريقة الفوارق)

قبل البدء في استخدام أي طريقة من الطرق السابقة يجب وضع المعطيات في جدول حيث يحتوي الجدول على (m) سطر و(n) عمود، بحيث تخصص مثلا الأسطر للمستهلكين والأعمدة للمنتجين أو العكس، ويتضمن الجدول عمودا للمجموع بالنسبة للمستهلكين وسطرا بالنسبة للمنتجين، وتوضع في كل خانة التكلفة المناسبة ويكون الجدول على النحو التالي:

	At_1	At_2	At_3	$\sum$
A	$\boxed{C_{11}}$ X_{11}	$\boxed{C_{12}}$ X_{12}	$\boxed{C_{13}}$ X_{13}	A_1
B	$\boxed{C_{21}}$ X_{21}	$\boxed{C_{22}}$ X_{22}	$\boxed{C_{23}}$ X_{23}	A_2
C	$\boxed{C_{31}}$ X_{31}	$\boxed{C_{32}}$ X_{32}	$\boxed{C_{33}}$ X_{33}	A_3
D	$\boxed{C_{41}}$ X_{41}	$\boxed{C_{42}}$ X_{42}	$\boxed{C_{43}}$ X_{43}	A_4
$\sum$	B_1	B_2	B_3	المجموع

04-03- طرق حل مسائل النقل

04-03-01- طريقة خانة الشمال الغربي

تمثل طريقة خانة الشمال الغربي في البحث عن الخانة الموجودة في الشمال الغربي من الجدول ثم التوزيع من المنتج المناسب إلى المستهلك المناسب في هذه الخانة، ويتم توزيع أقل كمية في العمود أو السطر، حسب العلاقة التالية: $X_{ij} = Min\{a_i;b_j\}$

بالنسبة لمثالنا في الجدول (04-03) فإن خانة الشمال الغربي هي المتمثلة في الزاوية (A,At_1) وهذا يعني أننا سوف نبدأ في عملية التوزيع من الورشة (At_1) والذي بحوزته 200 طن إلى المستهلك أو المستعمل (A) والذي يطلب الكمية 280 طن حيث تحدد الكمية (X_{11}) باختيار أقل كمية في العمود أو السطر الذي يقابل هذه الخانة، أي كما يلي:

$$X_{11}=Min\{a_1;b_1\}=Min\{280;200\}=200$$

وعليه تكون الكميات المتاحة لدى الورشة (At_1) قد وزعت بكاملها وتصبح القيم بعد طرح الكمية التي تم توزيعها كما يلي:

$$\begin{cases} ai = ai - X_{ij} \\ bj = bj - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ai = 280 - 200 = 80 \\ b1 = 200 - 200 = 0 \end{cases}$$

وبعد التوزيع في الخانة السابقة يجب البحث عن خانة الشمال الغربي الشاغرة من جديد وبعد حذف السطر أو العمود المشبع يتغير الجدول ويصبح الجدول الجديد يتضمن عمودين وأربعة أسطر، وفي هذه الحالة تكون زاوية الشمال الغربي هي الخانة (At_2,A) والكمية الموزعة X_{12} تساوي القيمة:

$$Min\ \{a_1, b_2\} = Min\ \{80, 250\} = 80$$

وهكذا بتكرار نفس العملية يصبح الجدول بعد عملية التوزيع كما يلي:

الجدول (04-03) : التوزيع حسب طريقة الشمال الغربي

	At_1	At_2	At_3	$\sum$
A	2 **200**	3 **80**	5	280
B	3	2 **170**	4 **130**	300
C	5	4	3 **230**	230
D	4	6	8 **190**	190
$\sum$	200	250	550	1000

نلاحظ بأن الحل القاعدي المتوصل إليه هو حل أولي لان عدد الخانات الشاغلة وهي (ستة خانات) تساوي (m+n-1)، والملاحظ أن طريقة الشمال الغربي لا تعتمد على التكاليف أثناء عملية التوزيع، وهي تعطي الحل في شكل سُلّمَ تكون فيها دالة الهدف هي:

$$Z = 200.(2)+ 80.(3)+ 170.(2)+ 130.(4)+ 230.(3)+ 190.(8) =3710$$

04-03-02- طريقة أدنى تكلفة في السطر

تعتمد طريقة أدنى تكلفة في السطر على توزيع الكميات ولكم مع الأخذ بعين الاعتبار توزيع الكميات في الأسطر فقط (المستهلكين)، على أن يتم وفقا لأدنى تكلفة بالنسبة لكل سطر ولا يمكن الانتقال إلى السطر أو المستهلك الموالي ما لم يلبى الطلب الكلي له... وهكذا.

بالنسبة لمثالنا فإن أدنى تكلفة في السطر الأول هي (2) في الخانة (At_1,A) لهذا نوزع في هذه الخانة الكمية التالية: $X_{11}= Min\{a_1,b_1\}=Min\{280,200\}=200$

وبما أن الكميات في هذا السطر لم يتم توزيعها كاملة فإننا نبقي في نفس السطر ونختار الخانة الشاغرة الجديدة وهي (At_2,A) التي تحوي أدنى تكلفة في هذا السطر وهي (3) ونوزع الكمية $X_{12}=Min\{a_1,b_2\}=Min\{80,250\}=80$، ثم نقوم بنفس العمل بالنسبة لبقية المستهلكين حيث نتحصل بعد عملية التوزيع على الجدول التالي:

الجدول (04-04): التوزيع حسب طريقة أدنى تكلفة في السطر

	At_1	At_2	At_3	Σ
A	2 ***200***	3 ***80***	5	280
B	3	2 ***170***	4 ***130***	300
C	5	4	3 ***230***	230
D	4	6	8 ***190***	190
Σ	200	250	550	1000

$$Z =200(2)+ 80(3)+ 170(2)+ 130(4)+ 230(3)+ 190(8) =3710$$

04-03-03- طريقة أدنى تكلفة في العمود

تقوم هذه الطريقة على الفكرة المعاكسة للفكرة المستخدمة في طريقة أدنى تكلفة في السطر، إذ يتم توزيع الكميات في العمود الأول بشكل نهائي قبل الانتقال إلى العمود الذي يليه وهكذا... مع الأخذ بعين الاعتبار أدنى تكلفة بالنسبة لكل عمود (ورشة)، حيث يكون العمل بالأعمدة، ويتم التوزيع حسب العلاقة التالية: $Xij = Min\{ai ,bj\}$

بالنسبة لمثالنا، فان أقل تكلفة في العمود الأول هي (2) والموجودة في الخانة (At_1,A) ومنه يتم توزيع الكمية المتاحة لدى الورشة الأولى مع الأخذ بعين الاعتبار الكمية المطلوبة من طرف المستهلك (A). وبما أن الكمية المتاحة مساوية للكمية المطلوبة، فهذا يعني أن التوزيع

بالنسبة للعمود الأول اصبح نهائيا. يجب أن ننتقل مباشرة للعمود الثاني ونوزع الكمية المتاحة فيه وهي (250) انطلاقا من الخانة (At_2 ,b) والتي تتضمن اقل تكلفة، في هذا العمود والتوزيع هذا أيضا نهائيا، ومنه ننتقل إلى الورشة الثالثة، نلاحظ أن اقل تكلفة هي (3) في الخانة (At_3,C) يتم توزيع الكمية (230) والموافقة للكمية المطلوبة من طرف المستهلك (C).

نبقى في نفس العمود ولكن في الخانة (At3,B) حيث اقل تكلفة (4) عندها نوزع الكمية (50) الموافقة للكمية المطلوبة من طرف المستهلك (B) ثم الكمية (80) بالخانة التي بها أقل تكلفة وهي (At3,A) وهي أيضا كمية موافقة للكمية المطلوبة من طرف المستهلك (A).

وأخيرا الكمية (190) بالخانة (At_3,D) ويمكن تلخيص ذلك بالجدول التالي:

جدول (04-05): التوزيع حسب طريقة آدني تكلفة في العمود

	At_1	At_2	At_3	Σ
A	2 ***200***	3	5 ***80***	280
B	3	2 ***250***	4 ***50***	300
C	5	4	3 ***230***	230
D	4	6	8 ***190***	190
Σ	200	250	550	1000

وبهذا التوزيع تكون التكلفة الإجمالية:

$$Z = 200(2)+250(2)+80(5)+50(4)+230(3)+190(8) =3710$$

ملاحظة:

بالنسبة لطريقة أدنى تكلفة في السطر يكون التوزيع نهائيا عندما تكون الكمية المطلوبة أقل أو تساوي الكمية المتاحة أما بالنسبة لطريقة أدنى تكلفة في العمود يكون التوزيع نهائيا عندما تكون الكمية المتاحة أقل أو تساوي الكمية المطلوبة.

04-03-04- طريقة أدنى تكلفة في الجدول

حسب هذه الطريقة فإنه عند التوزيع لا تأخذ بعين الاعتبار لا الورشات (الأعمدة) ولا المستهلكين(الأسطر) بل يكون التركيز فقط على أدنى تكلفة في الجدول ككل.

ومن خلال مثالنا فإن آدني تكلفة في الجدول هي (2) في كل من الخانات (At_1,A) و(At_1,B) و(At_2,B) حيث يتم توزيع الكمية المتاحة وفقا لما يقابلها من الكمية المطلوبة وهي 250 في الخانة (At_2,B) ثم في إحدى الخانتين (At_1,A) أو(At_1,B) عشوائيا طالما أن الكمية التي ستوزع متساوية ولتكن مثلا في الخانة (At_1,A). وبعدها تظهر كل الخانتين (At_2,A) و(At_3,C) بتكلفة قدرها (3) وهي أقل تكلفة بعد التوزيع الأول. توزع الكميات في الخانة (At_3,C) فقط نظرا لأنه تم إلغاء كل من العمودين (At_1) و(At_2) لكون أن الكميات المتاحة في هذين الأخيرين قد وزعت كاملة. ويتم بعد ذلك توزيع الكمية (50) في الخانة (At_3,B) بتكلفة (4) ثم الكمية (80) في الخانة (At_3,A) بتكلفة (5)، وأخيرا الكمية (190) في الخانة (At_3,D) بتكلفة (8). ويمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي:

الجدول (04-06): التوزيع حسب طريقة آدني تكلفة في الجدول

	At_1	At_2	At_3	Σ
A	2 ***200***	3	5 ***80***	280
B	3	2 ***250***	4 ***50***	300
C	5	4	3 ***230***	230
D	4	6	8 ***190***	190
Σ	200	250	550	1000

$$Z = 200(2)+250(2)+80(5)+50(4)+230(3)+190(8) =3710$$

ملاحظة هامة:

إن قيمة دالة الهدف المتوصل إليها بالطرق الأربعة السابقة هي نفسها. وهذا غير صحيح دائما، وليست قاعدة عامة. لكل طريقة من الطرق السابقة توزيع مختلف وقيمة دالة الهدف مختلفة أيضا، وانما حدث هذا صدفة فقط.

04-03-05- طريقة الجزاء والعقاب أو طريقة الفوارق

تسمى هذه الطريقة بطريقة الفوارق أو طريقة الجزاء والعقاب أو طريقة الغرامات، لأنها تأخذ بعين الإعتبار الغرامات والجزاءات التي قد تحملها المؤسسة في حالة عدم التوزيع في الخانة المناسبة، فهي بمثابة عقوبة. ويتم التوزيع وفقا لهذه الطريقة تبعا للمراحل التالية:

01 – البحث عن الفرق بين أصغر تكلفتين غير متساويتين في كل سطر وفي كل عمود.

02 – يتم توزيع الكميات في سطر أو عمود أكبر فارق، وذلك في الخانة التي تحتوي أدنى تكلفة السطر أو العمود المقابل لأكبر فارق.

03 – في حالة تساوى الفوارق نلجأ إلى أصغرهم تكلفة، وفي حالة تساوي التكاليف أيضا، يتم التوزيع في الخانة التي تأخذ أكبر كمية، وعند تساوي الكميات أيضا فيتم التوزيع عشوائيا.

ولتطبيق ذلك على مثالنا السابق يجب أولا حساب الفوارق بالنسبة للسطور ثم الأعمدة.

- **بالنسبة للسطور:**

السطر الأول: أدنى تكلفتين هما (3،2) ويكون الفارق1.

السطر الثاني: أدنى تكلفتين هما (2 ،3) ويكون الفارق1.

السطر الثالث: أدنى تكلفتين هما (4،3) ويكون الفارق 1.

السطر الرابع: أدنى تكلفتين هما (6،4) ويكون الفارق 2.

- **بالنسبة للأعمدة:**

العمود الأول: أدنى تكلفتين هما (3،2) ويكون الفارق 1.

العمود الثاني: أدنى تكلفتين هما (3،2) ويكون الفارق 1.

العمود الثالث: أدنى تكلفتين هما (4،3) ويكون الفارق 1.

وفقا لهذه الطريقة فإنه يتم التوزيع في السطر الرابع لأنه يحتوي على أكبر فارق(2) وفي الخانة (At_1,D) لأنها تحتوي على أقل تكلفة، ويتم توزيع الكمية (190)، وعندها يحذف السطر الرابع ويعاد حساب الفوارق من جديد... حتى نتحصل في الأخير على الجدول التالي:

الجدول (04-07) : التوزيع حسب طريقة الفوارق

	At_1	At_2	At_3	Σ
A	[2] **10**	[3]	[5] **270**	280
B	[3]	[2] **250**	[4] **50**	300
C	[5]	[4]	[3] **230**	230
D	[4] **190**	[6]	[8]	190
Σ	200	250	550	1000

وبهذا التوزيع تكون التكاليف الإجمالية:

$$Z = 10(2)+190(4)+250(2)+270(5)+50(4)+230(3)= 3520$$

وهي أقل تكلفة إجمالية من بين ما توصلنا إليه بالطرق الأربعة السابقة، الشيء الذي يعني أن طريقة الجزاء أو العقاب طريقة مختصرة وغالبا ما تعطي حلا قريبا من الحل الأمثل.

نلاحظ أن مختلف الجداول السابقة تحتوي على ستة (6) خانات شاغلة وهي تعادل العلاقة m+n-1 كما سبق الإشاره اليها، وهذا يعني أن الحل قاعدي أو أولي، ولكن نجهل فيما إذا كانت هذه الحلول أو إحداها حلولا مثلى أم لا، وهذا ما سنتعرض إليه في النقطة الموالية.

04-04- مراقبة وتحسين الحل

04-04-01- مراقبة الحل

من أجل مراقبة الحل القاعدي المتوصل إليه، يجب القيام ببعض التعديلات على الجدول المتضمن الحل الأخير (جدول 04-07) وتتمثل هذه التعديلات فيما يلي:

أولا: وضع الإشارة السالبة أمام كل تكلفة (-)   ثانيا: إضافة سطر يسمى (I) وعمود يسمى (J).

إذا انطلقنا من الجدول (04-07) وبإدخال التعديلات السابقة يكون الجدول الجديد كما يلي:

جدول (04-08) : عملية تحسين الحل

		At_1	At_2	At_3	Σ
		J_1	J_2	J_3	
A	I_1	[2 -] **10**	[3 -]	[5 -] **270**	280
B	I_2	[3 -]	[2 -] **250**	[4 -] **50**	300
C	I_3	[5 -]	[4 -]	[3 -] **230**	230
D	I_4	[4 -] **190**	[6 -]	[8 -]	190
Σ		200	250	550	1000

نبحث الآن عن القيم المختلفة لكل من (I_i) و(J_j) بعد أن تعطي القيمة صفر (I_i) أو (J_j) المقابلة للسطر أو للعمود الذي يحوي أكبر عدد من الخانات الشاغلة. ولأن العمود الثالث به أكبر عدد من الخانات الشاغلة لهذا سوف نضع ($J_3=0$) وذلك لتحديد بقية القيم بالنسبة للخانات الشاغلة ويتم ذلك وفقا للعلاقة التالية: $I_i+J_j=C_{ij}$

ولأن كل من الخانات (At_3,A),(At_3,B),(At_3,C) هي خانات شاغلة فإننا نستطيع تحديد كل من (I_1), (I_2), (I_3) في السطر الأول والثاني والثالث وفقا للعلاقة $I_i+J_j=C_{ij}$.

$$I_1 + J_3 = C_{13} \Rightarrow I_1 + 0 = -5 \Rightarrow \boldsymbol{I_1 = -5}$$
$$I_2 + J_3 = C_{23} \Rightarrow I_2 + 0 = -4 \Rightarrow \boldsymbol{I_2 = -4}$$
$$I_3 + J_3 = C_{33} \Rightarrow I_3 + 0 = -3 \Rightarrow \boldsymbol{I_1 = -3}$$

والآن (I_2) معلومة والخانة (At_2,B) شاغلة فإنه نستطيع تحديد (J_2) على النحو التالي:

$$I_2 + J_2 = C_{22} \Rightarrow J_2 - 4 = -2 \Rightarrow \boldsymbol{J_2 = +2}$$

وبناء على قيمة (I_1) المعلومة والخانة الشاغلة (At_1,A) يمكن تحديد قيمة (J_1) كما يلي:

$$I_1 + J_1 = C_{11} \Rightarrow J_1 - 5 = -2 \Rightarrow \boldsymbol{J_1 = +3}$$

ولأن قيمة (I_3) معلومة والخانة الشاغلة (At_1,D) يمكننا تحديد قيمة (I_4) المتبقية كما يلي:

$$I_4 + J_1 = C_{41} \Rightarrow I_4 + 3 = -4 \Rightarrow \boldsymbol{I_4 = -7}$$

بعد تحديد كل قيم (I_i) و(J_j) يجب أن نحدد الاقتصاد الممكن في التكاليف والخاص بكل خلية أو خانة (ij) ويرمز له بالرمز (E_{ij}) والذي يحسب وفقا للعلاقة التالية:

$$E_{ij} = I_i + J_j - C_{ij}$$

ملاحظة: إن الاقتصاد في التكاليف (E_{ij}) يحسب لجميع خانات الجدول سواء شاغلة أم شاغرة. ثم توضع قيمة(E_{ij}) داخل مربع بأحد جوانب الخلية (ij).

- ✓ بالنسبة للخانة(At_1,A) أي الخانة المقابلة للثنائية(I_1,J_1) فإن:

$$E_{11} = I_1 + J_1 - C_{11} \Rightarrow E_{11} = -5 + 3 - (-2) \Rightarrow \boldsymbol{E_{11} = 0}$$

- ✓ بالنسبة للخانة(At_1,B) أي الخانة المقابلة للثنائية(I_2,J_1) فإن:

$$E_{21} = I_2 + J_1 - C_{21} \Rightarrow E_{21} = -4 + 3 - (-3) \Rightarrow \boldsymbol{E_{21} = +2}$$

- ✓ بالنسبة للخانة(At_1,C) أي الخانة المقابلة للثنائية(I_3,J_1) فإن:

$$E_{31} = I_3 + J_1 - C_{31} \Rightarrow E_{31} = -3 + 3 - (-5) \Rightarrow \boldsymbol{E_{31} = +5}$$

- ✓ بالنسبة للخانة(At_1,D) أي الخانة المقابلة للثنائية(I_4,J_1) فإن:

$$E_{41} = I_4 + J_1 - C_{41} \Rightarrow E_{41} = -7 + 3 - (-4) \Rightarrow \boldsymbol{E_{41} = 0}$$

- ✓ بالنسبة للخانة(At_2 ,A) أي الخانة المقابلة للثنائية(I_1,J_2) فإن:

$$E_{12} = I_1 + J_2 - C_{12} \Rightarrow E_{12} = -5 + 2 - (-3) \Rightarrow \boldsymbol{E_{12} = 0}$$

- ✓ بالنسبة للخانة(At_2 ,B) أي الخانة المقابلة للثنائية(I_2,J_2) فإن:

$$E_{22} = I_2 + J_2 - C_{22} \Rightarrow E_{22} = -4 + 2 - (-2) \Rightarrow \mathbf{E_{22} = 0}$$

✓ بالنسبة للخانة(At_2 ,C) أي الخانة المقابلة للثنائية(I_3,J_2) فإن:

$$E_{32} = I_3 + J_2 - C_{32} \Rightarrow E_{32} = -3 + 2 - (-4) \Rightarrow \mathbf{E_{32} = +3}$$

✓ بالنسبة للخانة(At_2 ,D) أي الخانة المقابلة للثنائية(I_4,J_2) فإن:

$$E_{42} = I_4 + J_2 - C_{42} \Rightarrow E_{42} = -7 + 2 - (-6) \Rightarrow \mathbf{E_{42} = +1}$$

✓ بالنسبة للخانة(At_3 ,A) أي الخانة المقابلة للثنائية(I_1,J_3) فإن:

$$E_{13} = I_1 + J_3 - C_{13} \Rightarrow E_{13} = -5 + 0 - (-5) \Rightarrow \mathbf{E_{13} = 0}$$

✓ بالنسبة للخانة(At_3 ,B) أي الخانة المقابلة للثنائية(I_2,J_3) فإن:

$$E_{23} = I_2 + J_3 - C_{23} \Rightarrow E_{23} = -4 + 0 - (-4) \Rightarrow \mathbf{E_{23} = 0}$$

✓ بالنسبة للخانة(At_3 ,C) أي الخانة المقابلة للثنائية(I_3,J_3) فإن:

$$E_{33} = I_3 + J_3 - C_{33} \Rightarrow E_{33} = -3 + 0 - (-3) \Rightarrow \mathbf{E_{33} = 0}$$

✓ بالنسبة للخانة(At_3 ,D) أي الخانة المقابلة للثنائية(I_4,J_3) فإن:

$$E_{43} = I_4 + J_3 - C_{43} \Rightarrow E_{43} = -7 + 0 - (-8) \Rightarrow \mathbf{E_{43} = +1}$$

ويمكن تلخيص هذه النتائج في الجدول التالي:

الجدول (04-09): مراقبة أمثلية الحل

		At_1			At_2			At_3			Σ
		+ 3			+ 2			0			
A	- 5	0	- 2	10	0	- 3		0	- 5	270	280
B	- 4	+ 2	- 3		0	- 2	250	0	- 4	50	300
C	- 3	+5	- 5		+3	- 4		0	- 3	230	230
D	- 7	0	-4	190	+1	-6		+1	-8		190
Σ		200			250			550			1000

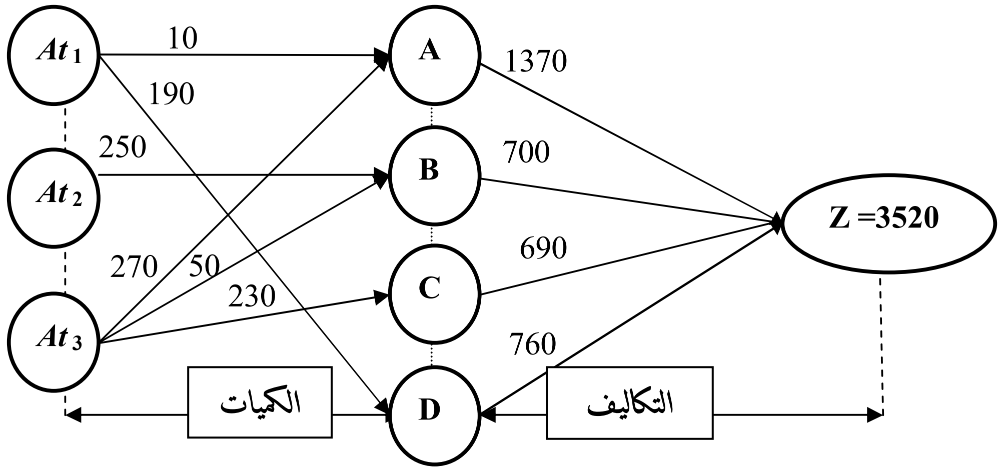
ما يمكن ملاحظته في هذا الجدول أن $E_{IJ} = 0$ في جميع الخانات الشاغلة، كما أن قيم (E_{ij}) قد تكون سالبة أو موجبة أو معدومة في الخانات الشاغرة.

قاعدة: إذا وجد في جدول التوزيع قيمة واحدة على الأقل من قيم الاقتصاد (E_{ij}) سالبة أي أن $E_{IJ} < 0$ فهذا يعني أنه توجد إمكانية لتخفيض التكاليف. وبالتالي، نقول أن الحل المتوصل إليه غير أمثل. لذلك، يجب المرورإلى الخطوة التي تليها وهي عملية تحسين الحل. والعكس صحيح في حالة الاقتصاد موجب أي $E_{IJ} > 0$ فالحل في هذه الحالة أمثل، وأن أي تغيير يحدث يؤدي إلى الزيادة في التكاليف، إلا في حالة واحدة وهي عندما نجد قيمة واحدة على الأقل(E_{ij}) معدومة $E_{IJ} = 0$ في خانة شاغرة، الأمر الذي يعني أن الجدول يتضمن حلولا بديلة لا نهائية والتي لا تغير شيء من قيمة دالة الهدف.

بناء على هذه القاعدة فإن الجدول (04-09) يمثل حل أمثل نظراً لعدم وجود قيمة سالبة للاقتصاد (E_{ij}). لذلك لا يمكن المرور إلى الخطوة التي تليها ألا وهي التحسين.

يمكن تلخيص الحل الأمثل في الشكل التالي

الشكل (04-01) : التمثيل البياني للحل الأمثل



بناء على نفس القاعدة السابقة فإن الجدول (04-09) وفي الخانة (At_2,A) حيث $E_{IJ}=0$ دون وجود أي كمية موزعة في هذه الخانة (شاغرة)، هذا ما يعني وجود حلول بديلة يمكن الوصول إليها بسهولة، وسوف نعود لها بعد التعرف إلى الخطوة الموالية.

04-04-02- تحسين الحل

بعد أن انطلقنا من الجدول (04-07) المتضمن الحل القاعدي الأولي حسب طريقة الفوارق توصلنا إلى الحل الأمثل مباشرة دون المرور للخطوة الأخيرة، وهي تحسين الحل. ولأجل التعرف على كيفية تحسين الحل القاعدي نعود لنفس المسألة وننطلق من الجدول (04-05) أو (04-06) وبعد مراقبة هذا الجدول نحصل على الجدول التالي:

الجدول (04-10): تحسين الحل القاعدي الأولي

		At_1	At_2	At_3	Σ
		+ 3	+ 2	0	
A	- 5	0 -2 **200**	0 - 3	0 - 5 **80**	280
B	- 4	+ 2 - 3	0 - 2 **250**	0 - 4 **50**	300
C	- 3	+5 - 5	+3 - 4	0 - 3 **230**	230
D	- 8	-1 -4	0 -6	0 -8 **190**	190
Σ		200	250	550	1000

ما يمكن ملاحظته أنه في الخانة (At_1,D) يوجد اقتصاد سالب أي أن $E_{IJ}< 0$ وهذا ما يعني أن الحل القاعدي غير أمثل، لذلك يجب القيام بتحسين الحل وتتم هذه العملية كما يلي:

1 – نبحث في الجدول عن الخانة التي تحتوي على أصغر اقتصاد سالب أو **أكبر** قيمة مطلقة للاقتصاد السالب، والذي يعني أننا نبحث عن الخانة التي تسمح بتحقيق أكبر تخفيض أو الاقتصاد في التكاليف والذي يعني **أكبر** تحسين في دالة الهدف.

2 – نضيف كمية نسميها (Δ) في الخانة التي تحتوي أكبر قيمة مطلقة للاقتصاد السالب.

3 – يجب أن نحافظ على مجموع كل سطر وكل عمود باستعمال المسلك المغلق، ولا يتضمن هذا المسلك سوى خانة واحدة شاغرة بحيث نضع (+Δ) في خانة (E_{ij}) المختارة ثم في السطر أو العمود المقابل نضع القيمة (-Δ)، ثم في العمود أو السطر القيمة (+Δ) وفي الخانات الشاغلة فقط، وهكذا بالتدرج حتى نشكل مسار مغلق تبدأ خاناته من خانة (E_{ij}) المختارة وتنتهي عندها بحيث لا تظهر في كل سطر أو عمود أكثر من (+Δ) أو(-Δ)

4- انطلاقا من قيم الخانات الشاغلة والتي تحتوي على(-Δ) نحدد قيمة (Δ) باختيار أصغرها أي

$$\Delta = Min\ X_{ij} / \{X_{ij}-\Delta\}$$

وبتطبيق هذه المراحل على المثال السابق نقوم بتحسين الحل.

في الخانة (At_1,D) التي تحتوي $E_{IJ}< 0$ نضيف الكمية (Δ) وللحفاظ على مجموع قيم العمود الأول نطرح الكمية (Δ) من القيمة ($X_{11}=200$) بالخانة (At_1,A)، ونفس الشيء بالنسبة للسطر الأول فإننا نضيف (Δ) للقيمة ($X_{13}=80$) في الخانة (At_3,D)، ومن أجل الحفاظ على مجموع قيم العمود الثالث والسطر الرابع، فإننا نطرح (Δ) من القيمة ($X_{43}=190$)، وبهذه الكيفية سوف يتشكل مسلك مغلق كما هو مبين في الجدول (04-11). بالمقارنة بين الخانتين (At_1,A) و(At_3,D) لأنهما يحتويان على(-Δ) فإن قيمة (Δ) تساوي (Δ=190) :

$$\Delta = \text{Min } X_{IJ} / \{200-\Delta\ ,\ 190 - \Delta\} = 190$$

الجدول (04-11): المسار المغلق

		At_1	At_2	At_3	Σ
		+ 3	+ 2	0	
A	- 5	0 / -2 **200** - Δ	0 / - 3	0 / - 5 **80** + Δ	280
B	- 4	+ 2 / - 3	0 / - 2 **250**	0 / - 4 **50**	300
C	- 3	+5 / - 5	+3 / - 4	0 / - 3 **230**	230
D	- 8	-1 / -4 +Δ	0 / -6	0 / -8 **190** - Δ	190
Σ		200	250	550	1000

وبالتالي يكون الجدول بعد التعديل كما يلي:

الجدول (04-12): مراقبة أمثلية الحل

		At_1	At_2	At_3	Σ
		+ 3	*+ 2*	*0*	
A	- 5	0 / -2 **10**	0 / - 3	0 / - 5 **270**	280
B	*- 4*	+ 2 / - 3	0 / - 2 **250**	0 / - 4 **50**	300
C	*- 3*	+5 / - 5	+3 / - 4	0 / - 3 **230**	230
D	*-7*	0 / -4 **190**	+1 / -6	+1 / -8	190
Σ		200	250	550	1000

نلاحظ أن هذا الجدول هو نفس الجدول (04-09) المتضمن الحل الأمثل.

ملاحظة: أثناء عملية التحسين يمكن الوصول إلى قيمة التحسين في دالة الهدف انطلاقا من تحديد قيمة الاقتصاد الإجمالي والذي يساوي $\Delta Z = \Delta.(E_{IJ})$.

في مثالنا فان قيمة دالة الهدف قبل عملية التحسين هي 3710، ومن المنتظر وبعد عملية التحسين أن تكون قيمة دالة الهدف الجديدة حسب العلاقة المذكورة سابقا هي:

$$\Delta Z = \Delta E_{IJ} \Rightarrow \Delta Z = 190(-1) = -190$$
$$Z = \Delta Z + \Delta E_{IJ} \Rightarrow Z = -190 + 3710 = 3520$$

وللتأكد من صحة هذه العلاقة يمكن حساب قيمة Z مباشرة من خلال الجدول (04-12):

$$Z = 10(2)+190(4)+250(2)+270(5)+50(4)+230(3)$$
$$Z = 20 + 760 + 500 + 1350 + 200 + 690 = 3520$$

04-04-03-الحلول البديلة:

المقصود بالحلول البديلة وجود توزيع آخر بكيفية مختلفة يسمح بالحصول على نفس قيمة دالة الهدف، مما يعطي مرونة اكثر لمتخذ القرار في اختيار ما يراه مناسبا.

ملاحظة: إذا وجد اقتصاد معدوم ($E_{IJ} = 0$) في خانة شاغرة واحدة على الأقل، فإننا سوف نتحصل على عدد لا نهائي وغير محدود من الحلول البديلة وليس حلا بديلا واحداً.

وللتأكد من وجود حلول بديلة ننطلق من الجدول الأخير الذي يتضمن الحل الأمثل ونبحث عن أية خانة شاغرة تكون فيها قيمة الاقتصاد معدومة أي $E_{IJ}=0$ ويمكن الوصول إلى الحلول البديلة بنفس طريقة عملية التحسين على أن يتم إضافة الكمية (Δ) في الخانة الشاغرة التي تحتوي على اقتصاد معدوم ($E_{IJ}=0$) وتشكيل المسار المغلق.

وفي مثالنا فان الخانة (At_2,A) يوجد بها اقتصاد يساوي الصفر الشيء الذي يعني وجود حلول بديلة لا نهائية كما أشرنا في الملاحظة السابقة، يمكن الوصول إلى هذه الحلول البديلة انطلاقا من الجدول التالي، الذي يحتوي الحل البديل الأول المتوصل إليه بطريقة المسار المغلق أما بقية الحلول البديلة الأخرى يمكن الوصول إليها عن طريق استعمال الطريقة المتوسطة.

الجدول (04-13): البحث عن الحلول البديلة

		At_1	At_2	At_3	Σ
		+ 3	+ 2	0	
A	- 5	0 -2 **10**	0 - 3 +Δ	0 - 5 **270** - Δ	280
B	- 4	+ 2 - 3	0 - 2 **250** - Δ	0 - 4 **50** + Δ	300
C	- 3	+5 - 5	+3 - 4	0 - 3 **230**	230
D	- 8	0 -4 **190**	1 -6	1 -8	190
Σ		200	250	550	1000

بعد تشكيل المسار المغلق كما هو مبين في الجدول السابق فإن قيمة (Δ) هي 250 ثم إجراء التعديلات اللازمة ومنه يكون الحل البديل الجديد كما هو في الجدول التالي:

الجدول (04-14): الحل البديل الأول

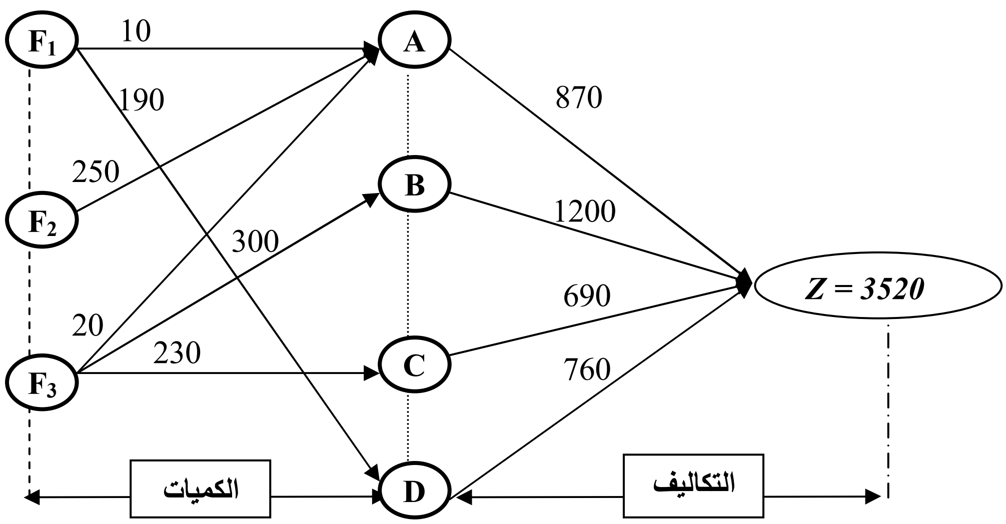
		At_1	At_2	At_3	Σ
		+ 3	+ 2	0	
A	- 5	0 -2 **10**	0 - 3 **250**	0 - 5 **20**	280
B	- 4	+ 2 - 3	0 - 2	0 - 4 **300**	300
C	- 3	+5 - 5	+3 - 4	0 - 3 **230**	230
D	- 8	0 -4 **190**	1 -6	1 -8	190
Σ		200	250	550	1000

وتكون التكاليف الإجمالية:

$$Z = 10(2)+190(4)+250(3)+20(5)+300(4)+230(3) \Rightarrow Z = 3520$$

الملاحظ أن دالة الهدف بقيت ثابتة القيمة والتوزيع الجديد يكون كما يلي:

الشكل (04-02): التمثيل البياني للحل البديل



أما بقية الحلول البديلة نحصل عليها باستخدام الطريقة المتوسطة، وهذا عن طريق جمع جميع القيم (X_{ij}) الموجودة في الجدول المتضمن الحل الأمثل الجدول (04-12) مع جميع القيم (X_{ij}) المقابلة لها في جدول الحل البديل الأول الجدول (04-14) وتقسيم المجموع على القيمة (2).

ولإيضاح هذه الطريقة سوف نستخدم الجدولين المذكورين الجدول (04-12) يتضمن الحل الأمثل، أما الجدول (04-14) يتضمن الحل البديل الأول، وباستخدام الطريقة المتوسطة نجد:

$X_{11} = (10+10)/2 = 10$ $X_{12} = (0+250)/2 = 125$
$X_{13} = (270 + 20)/2 = 145$ $X_{21} = (0 +0)/2 = 0$
$X_{22} = (250 +0)/2 = 125$ $X_{23} = (50+300)/2 = 175$
$X_{31} = (0+0)/2 = 0$ $X_{33} = (230+230)/2 = 230$
$X_{32} = (0+0)/2 = 0$ $X_{41} = (190+190)/2 = 190$
$X_{42} = (0+0)/2 = 0$ $X_{43} = (0+0)/2 = 0$

وعليه يمكن تلخيص هذه النتائج ضمن الجدول التالي:

الجدول (04-15): الحل البديل الثاني

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">At1</td><td colspan="2">At2</td><td colspan="2">At3</td><td rowspan="2">Σ</td></tr>
<tr><td colspan="2">+ 3</td><td colspan="2">+ 2</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A</td><td rowspan="2">- 5</td><td>0</td><td>-2</td><td>0</td><td>- 3</td><td>0</td><td>- 5</td><td rowspan="2">280</td></tr>
<tr><td colspan="2">10</td><td colspan="2">125</td><td colspan="2">145</td></tr>
<tr><td rowspan="2">B</td><td rowspan="2">- 4</td><td>+ 2</td><td>- 3</td><td>0</td><td>- 2</td><td>0</td><td>- 4</td><td rowspan="2">300</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">125</td><td colspan="2">175</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C</td><td rowspan="2">- 3</td><td>+5</td><td>- 5</td><td>+3</td><td>- 4</td><td>0</td><td>- 3</td><td rowspan="2">230</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2">230</td></tr>
<tr><td rowspan="2">D</td><td rowspan="2">- 8</td><td>0</td><td>-4</td><td>1</td><td>-6</td><td>1</td><td>-8</td><td rowspan="2">190</td></tr>
<tr><td colspan="2">190</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Σ</td><td colspan="2">200</td><td colspan="2">250</td><td colspan="2">550</td><td>1000</td></tr>
</table>

$Z = 10(2)+190(4)+125(3)+125(2)+145(5) +175(4) +230(3) \Rightarrow Z = 3520$

الملاحظ أن دالة الهدف بقيت ثابتة والتوزيع الجديد يكون كما يلي:

نقوم بجمع قيم (X_{ij}) في الجدول (04-15) مع القيم المقابلة لها في الجدول (04-14)، ثم نقسم المجموع على (2) للحصول على القيم الموافقة للحل البديل الثالث كما في الجدول (04-16).

الجدول (04-16): الحل البديل الثالث

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">At1</td><td colspan="2">At2</td><td colspan="2">At3</td><td rowspan="2">Σ</td></tr>
<tr><td colspan="2">+ 3</td><td colspan="2">+ 2</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A</td><td rowspan="2">- 5</td><td>0</td><td>-2</td><td>0</td><td>- 3</td><td>0</td><td>- 5</td><td rowspan="2">280</td></tr>
<tr><td colspan="2">10</td><td colspan="2">187.50</td><td colspan="2">82.50</td></tr>
<tr><td rowspan="2">B</td><td rowspan="2">- 4</td><td>+ 2</td><td>- 3</td><td>0</td><td>- 2</td><td>0</td><td>- 4</td><td rowspan="2">300</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">62.50</td><td colspan="2">237.50</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C</td><td rowspan="2">- 3</td><td>+5</td><td>- 5</td><td>+3</td><td>- 4</td><td>0</td><td>- 3</td><td rowspan="2">230</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2">230</td></tr>
<tr><td rowspan="2">D</td><td rowspan="2">- 8</td><td>0</td><td>-4</td><td>1</td><td>-6</td><td>1</td><td>-8</td><td rowspan="2">190</td></tr>
<tr><td colspan="2">190</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Σ</td><td colspan="2">200</td><td colspan="2">250</td><td colspan="2">550</td><td>1000</td></tr>
</table>

$Z=10(2) +190(4)+187.50 (3)+62.50 (2)+ 82.50(5) +237.50 (4) + 230(3)$
$Z = 20 + 760 + 562.50 + 125 + 412.50 +950 + 690 = 3520$

بنفس الطريقة يمكننا الحصول على الحل البديل (n) بجمع قيم (X_{ij}) للحل البديل (n-1) مع قيم (X_{ij}) الحل البديل (n-2)، ثم نقسم المجموع على (2) وهكذا... بحيث يمكننا أن نتوقف عند الحل البديل الذي لا يسمح لنا بتجزئة أكثر للمادة الموزعة مثل ما هو في الجدول السابق.

ملاحظة: حسب هذه الطريقة فإنه عادة ما يكون عدد الخانات الشاغلة في جدول الحلول البديلة يتجاوزمجموع الأسطر والأعمدة ناقص واحد.

04-05- مسألة النقل في حالة تعظيم دالة الهدف (*Maximisation*)

على خلاف الحالة السابقة حيث كانت دالة الهدف من النوع تخفيض (Min) ففي هذه الحالة سوف نكون أمام حالة أخرى تكون فيها دالة الهدف من النوع تعظيم (Max) كالبحث عن أقصى ربح ممكن أو الزيادة في رقم الأعمال...الخ، وفي مثل هذه الحالة، فان الاختلاف يكون في المرحلتين الرابعة والخامسة عند البحث عن الحل وذلك على النحو التالي:

✓ المرحلة الرابعة مراقبة أمثلية الحل وتتم بالكيفية الموالية:

أ - يتم تحديد المؤشرات I وJ حسب القاعدة التالية: $I_I + J_J = - C_{IJ}$

ب – تحديد الاقتصاد E_{IJ} كما يلي: $E_{IJ} = I_I + J_J + C_{IJ}$

- فإذا كان الاقتصاد **موجبا** $(E_{IJ} > 0)$ أي انه توجد إمكانية **لزيادة** دالة الهدف، وبالتالي فان الحل غير أمثل يجب تحسينه.

- أما إذا كان الاقتصاد **سالبا** $(E_{IJ} < 0)$ فان الحل امثل.

- بينما إذا كان الاقتصاد **معدوما** $(E_{IJ} = 0)$ ففي مثل هذه الحالة

✓ إما أن يكون الحل امثلا وبالتالي وجود حلولا بديلة.

✓ أو أن يكون غير امثل وبالتالي يجب التحسين.

ج- لاختيار الخانة التي نضع بها القيمة (Δ) فإننا نختار الخانة الشاغرة التي تحوي اكبر قيمة موجبة للاقتصاد (E_{IJ}) .

ولتوضيح هذه الحالة سوف نأخذ المثال التالي:

مثال (04-02): لنفرض أن مؤسسة ما تتكون من ثلاث وحدات إنتاجية (C,B,A) يمكنها إنتاج أي من المنتجات الثلاثة التالية (P_1,P_2,P_3) ضمن أي من هذه الوحدات وفقا للكميات المطلوبة التالية: (170 من P_1)، (220 من P_2) ، و(110 من P_3). نريد وضع مخطط الإنتاجي علما أن طاقة الوحدات هي (150من A)، (230 منB) و(120 منC).

الربح في كل منتج حسب مكان إنتاجه يظهر في الجدول التالي:

	P_3	P_2	P_1
A	2	5	6
B	3	4	8
C	11	9	7

في هذه الحالة فإن المؤسسة تبحث عن تحقيق أقصى ربح ممكن وذلك بتوزيع المنتجات الثلاثة على مختلف وحداتها. للقيام بعملية التوزيع يمكن أن نستعمل أي من طرق التوزيع السابقة ولتكن طريقة الشمال الغربي من أجل البحث عن الحل القاعدي الأولي.

الجدول (04-17): التوزيع حسب طريقة الشمال الغربي

	P_1	P_2	P_3	Σ
A	-2 **150**	- 5 -	- 6 -	150
B	- 3 **20**	- 4 **210**	- 8 -	230
C	- 11 -	- 9 **10**	- 7 **110**	120
Σ	170	220	110	500

نلاحظ أن عدد الخانات الشاغرة يساوي $m+n-1$ ومنه فإننا نقول أن هذا التوزيع يشكل حل أولي قاعدي، لهذا يجب أن نبحث عن أمثلية الحل، وذلك بتحديد المؤشرات (J_J) و(I_I) ثم الاقتصاد (E_{ij}) ونلخص ذلك في الجدول التالي:

الجدول (04-18): مراقبة أمثلية الحل

		P_1	P_2	P_3	المجموع
		- 3	- 4	- 2	
A	+1	0 2 **150**	+2 5 -	+5 6 -	150
B	0	0 3 **20**	0 4 **210**	+6 8 -	230
C	-5	+3 11 -	0 9 **10**	0 7 **110**	120
المجموع		170	220	110	500

$$Z = 150(2) + 20(3) + 210(4) + 10(9) + 110(7) = 2060$$

من خلال هذا الجدول نلاحظ أنه يوجد على الأقل اقتصاد واحد موجب (EIJ >0) في خانة شاغرة وهذا يعني إمكانية تحسين الحل والزيادة في دالة الهدف، ومنه ننتقل مباشرة إلى الخطوة التالية وهي عملية التحسين.

- عملية التحسين

أثناء عملية التحسين من البديهي أن نختار الخانة التي يمكنها أن تعطي أكبر تحسين أو أكبر زيادة في دالة الهدف، لهذا نأخذ أكبر قيمة موجبة للاقتصاد (E_{IJ}) وهي الموجودة في الخانة (P_3 ,B) حيث أن $MaxE_{IJ}=(E_{23}=6)$. نضيف الكمية (Δ) في هذه الخانة، ثم نشكل المسار المغلق، ثم نحدد قيمة (Δ) التي تأخذ اقل كمية تفادي لتواجد كمية سالبة في الجدول.

يمكن تلخيص هذه الخطوات في الجدول التالي:

الجدول (04-19): تحسين الحل

		P_1		P_2		P_3		Σ
		- 3		- 4		- 2		
A	+1	0	2	+2	5	+5	6	150
		150		-		-		
B	0	0	3	0	4	+6	8	230
		20		**210** - Δ		+ Δ		
C	-5	+3	11	0	9	0	7	120
		-		**10** + Δ		**110** - Δ		
Σ		170		220		110		500

بناء على ما أشرنا إليه سابقا فإن الزيادة في دالة الهدف بعد عملية التحسين ستكون وفقا للعلاقة التالية: $\Delta Z=\Delta \times E_{IJ}$ وبالتالي فإن قيمة (Δ) هي أقل كمية يمكن توزيعها وهي ($110=\Delta$) وعليه سوف تكون الزيادة في دالة الهدف هي: $\Delta Z=110.(+6)=+660$ وعندها تكون قيمة دالة الهدف الجديدة بعد عملية التحسين هي: $Z=2060+660 \Rightarrow Z=2720$

نقوم مرة أخرى برقابة أمثلية الحل كما هو في الجدول التالي:

الجدول (04-20): مراقبة أمثلية الحل

		P_1		P_2		P_3		المجموع
		- 3		- 4		- 8		
A	+ 1	0	2	+2	5	- 1	6	150
		150		-		-		
B	0	0	3	0	4	0	8	230
		20 - Δ		**100** + Δ		**110**		
C	- 5	+3	11	0	9	- 6	7	120
		+ Δ		**120** - Δ				
المجموع		170		220		110		500

$Z=150(2)+20(3)+100(4)+120(9)+110(8)=2720$

بما أنه توجد على الأقل قيمة موجبة للاقتصاد (E_{IJ}) فإن الحل يستوجب القيام بالتحسين

نلاحظ أن أكبر قيمة موجبة للاقتصاد (E_{IJ}) الموجودة في الخانة (P_1, C) حيث أن:

$MaxE_{IJ} = (E_{31}=3)$ ومنه نضيف الكمية ($\Delta=20$)، وعليه سوف تكون الزيادة في دالة الهدف

$$\Delta Z = 20(+3) = +60$$

وعندها تكون قيمة دالة الهدف الجديدة بعد عملية التحسين هي: $Z = 2720 + 60 = 2780$

الجدول التالي يلخص هذه الخطوات

الجدول (04-21): التأكد من أمثلية الحل

		P_1	P_2	P_3	المجموع
		- 6	- 4	- 8	
A	+ 4	0 ; 2 **150** - Δ	+5 ; 5 + Δ	2 ; 6 -	150
B	0	- 3 ; 3	0 ; 4 **120**	0 ; 8 **110**	230
C	- 5	0 ; 11 **20** + Δ	0 ; 9 **100** - Δ	- 6 ; 7	120
المجموع		170	220	110	500

$$Z=150(2)+20(11)+120(4)+100(9)+110(8)=2780$$

بما أنه توجد على قيمة موجبة للاقتصاد (E_{IJ}) في الخانة (P_1, C) فإن الحل يتطلب القيام بالتحسين مرة أخرى، ومنه نضيف الكمية ($\Delta=100$) وعليه سوف تكون الزيادة في دالة الهدف هي :

$$\Delta Z = 100(+5) = +500$$

وعندها تكون قيمة دالة الهدف الجديدة بعد عملية التحسين هي: $Z = 2780 + 500 = 3280$

الجدول التالي يلخص هذه الخطوات:

الجدول (04-22) : التأكد من أمثلية الحل

		P_1	P_2	P_3	المجموع
		- 1	- 4	- 8	
A	- 1	0 ; 2 50 - Δ	0 ; 5 100 + Δ	- 3 ; 6 -	150
B	0	2 ; 3 + Δ	0 ; 4 120 - Δ	0 ; 8 110	230
C	-10	0 ; 11 120	- 5 ; 9	- 11 ; 7	120
المجموع		170	220	110	500

$$Z=150(2)+20(11)+120(4)+100(9)+110(8)=2780$$

بما أنه توجد على قيمة موجبة للاقتصاد (E_{IJ}) في الخانة (P_1 ,B) فإن الحل يتطلب القيام بالتحسين ومنه نضيف الكمية $(\Delta=50)$ وعليه سوف تكون الزيادة في دالة الهدف هي:

$$\Delta Z =50x(+2)= +100$$

وعندها تكون قيمة دالة الهدف الجديدة بعد عملية التحسين هي:

$$Z = 3280 \ + 100 \Rightarrow Z = 3380$$

والجدول التالي يوضح عملية إعادة التوزيع:

الجدول (04-23) : الحل الأمثل

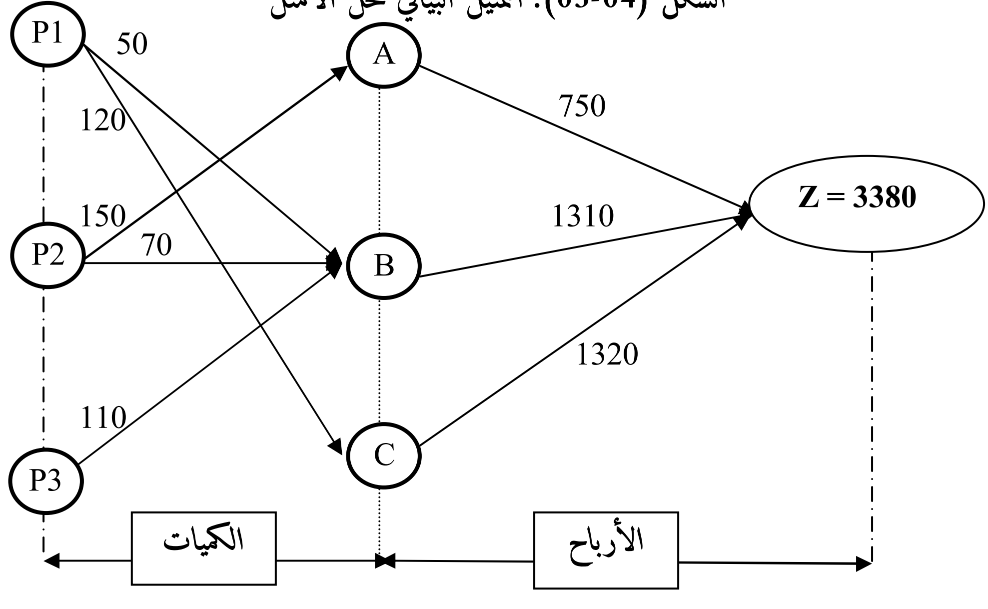
		P_1	P_2	P_3	المجموع
		- 3	- 4	- 8	
A	- 1	$\boxed{-2}$ 2	$\boxed{0}$ 5 **150**	$\boxed{-3}$ 6 -	150
B	0	$\boxed{0}$ 3 **50**	$\boxed{0}$ 4 **70**	$\boxed{0}$ 8 **110**	230
C	- 8	$\boxed{0}$ 11 **120**	$\boxed{-3}$ 9	$\boxed{-9}$ 7	120
المجموع		170	220	110	500

نلاحظ أن جميع قيم الاقتصاد أصغر أو تساوي الصفر وعليه فإن الحل أمثل، ومنه قيمة دالة الهدف هي: $Z=50(3)+120(11)+150(5)+70(4)+110(8)=3380$

كما نلاحظ أن هذا الحل هو حل وحيد نظرا لعدم وجود اقتصاد معدوم في الخانات الشاغرة

يمكن تمثيل الحل الأمثل كما في الشكل التالي:

الشكل (04-03): التمثيل البياني للحل الأمثل



13-06- الحالات الخاصة لمسألة النقل

13-06-01- حالة الاختلال بين العرض والطلب

في كثير من الحالات فإننا نكون أمام حالات من عدم التوازن بين الكميات المطلوبة والكميات المعروضة في مسألة النقل، في هذه الحالة ولأنه يجب أن يتحقق التوازن بين الكميات المطلوبة والمعروضة، لذلك لابد أن نضيف سطر أو عمود وهمي بحيث تكون الكمية المطلوبة أو المعروضة مساوية للفرق بين العرض والطلب وهذا من اجل إعادة التوازن للنموذج، على أن نعطي لهذا السطر أو العمود تكلفة كبيرة مقارنة ببقية التكاليف أو ربحا مساويا للصفر تفاديا لعدم التوزيع في خاناته (أي عكس دالة الهدف).

مثال (03-04):

الجدول التالي يبين الكميات المطلوبة والمعروضة من سلعة ما ونريد نقل أو توزيع هذه الكميات من الموردين (C_1 , C_2 , C_3) نحو المستهلكين (F_1 , F_2 , F_3) وفقا لتكاليف النقل الموضحة في الجدول:

	F_1	F_2	F_3	المجموع
C_1	5	2	4	300
C_2	4	3	5	200
C_3	6	5	2	450
المجموع	350	400	250	950 / 1000

نلاحظ وجود فائض من الكميات المعروضة (1000) مقابل الكميات المطلوبة (950) ولامتصاص هذا الفائض يتوجب إضافة ما يسمى بالمستهلك الوهمي (طلب وهمي) بتكلفة كبيرة مقارنة بغيرها ولتكن (15)، حيث أن الكمية المضافة تعبر عن كمية غير موزعة، إذ أنها سوف تبقى لدى أحد الموردين، وهذا ما يبينه الجدول التالي: (سوف نستعمل طريقة العقاب في التوزيع)

الجدول (24-04): الحل الأمثل

		F_1	F_2	F_3	المجموع
		- 4	- 3	0	
C_1	+1	2 -5 -	0 -2 **300**	5 -4 -	300
C_2	0	0 -4 **100**	0 -3 **100**	5 -5 -	200
C_3	-2	0 - 6 **200**	0 - 5 -	0 -2 **250**	450
C_4	-11	0 -15 **50**	1 -15 -	4 -15 -	50
المجموع		350	400	250	1000

نلاحظ أن جميع قيم الاقتصاد أكبر أو يساوي الصفر وعليه فإن الحل أمثل، ومنه قيمة دالة الهدف هي:

$$Z=100(4)+200(6)+300(2)+100(3)+250(2)=3000$$

إذن حسب هذا الحل فإن:

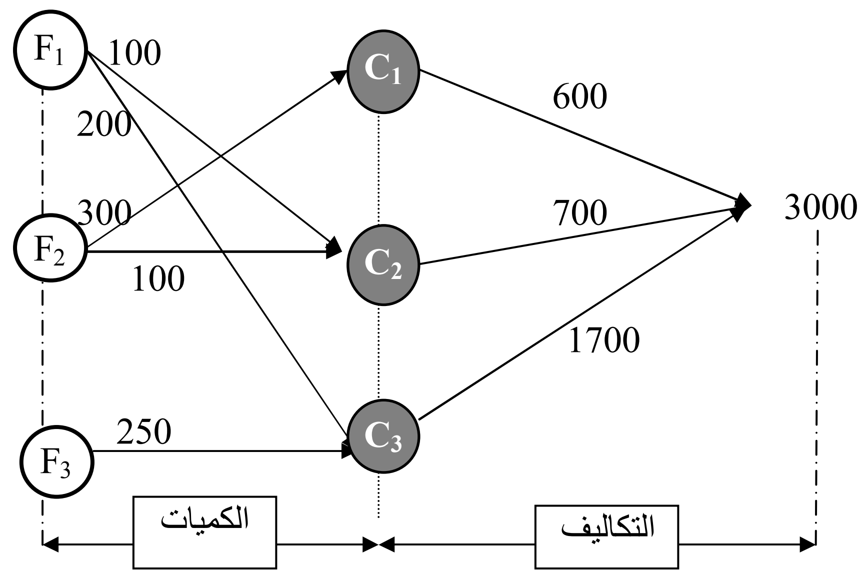
- ✓ المورد (F_1) لديه (350) وحدة من هذه السلعة يزود كل من المستهلك (C_2) بالكمية (100) وحدة وكذلك المستهلك (C_3) بالكمية (200) وحدة ويحتفظ بالكمية (50) وحدة لديه ككمية غير موزعة، لأن المستهلك (C_4) هو مستهلك وهمي فقط أي غير حقيقي.
- ✓ *المورد* (F_2) لديه (400) وحدة يزود منها المستهلك (C_1) بالكمية (300) وحدة والمستهلك (C_2) بالكمية (100) وحدة ويكون بذلك قد وزع كل ما لديه من وحدات.
- ✓ *المورد* (F_3) لديه (250) وحدة يوزعها بالكامل على المستهلك(C_3) ويكون قد وزع كل ما لديه من وحدات.

وعلى هذا الأساس فقد تم تلبية احتياجات كل المستهلكين وتوزيع كل ما لدى الموردين ما عدا المورد الأول تبقى لديه (50) وحدة غير موزعة.

كما نلاحظ أن لهذا الحل العديد من الحلول البديلة نظرا لوجود اقتصاد معدوم في الخانة الشاغرة (F_2 , C_3) يمكنك البحث هذه الحلول بالرجوع للطريقة المتوسطة المعروضة سابقا.

ولإيضاح عملية التوزيع يمكن تمثيل الحل الأمثل في الشكل التالي:

الشكل (04-04) : التمثيل البياني للحل الأمثل



13-06-02- حالة التوزيع بالطرق الممنوعة

حالة الطرق الممنوعة هي إحدى الحالات الاستثنائية والمتمثلة في وجود شرط أو قيد يؤدي إلى تقييد التعامل بين المورد والمستهلك، فإذا كان صاحب الشرط هو المستهلك مثلا كأن يمن لسبب ما تزويده من طرف الموردين غير القادرين على تلبية هذا الشرط أو يفرض استلام حاجته كاملة من مورد آخر.

أما إذا كان صاحب الشرط هو المورد كأن يمتنع من توزيع السلعة على المستهلكين الذين لا يلبوا شرط الدفع الفوري لثمن السلعة المباعة على سبيل المثال.

وفي كلتي الحالتين يتم هذا المنع بوضع تكلفة كبيرة جدا في الخانات التي لا تتوفر فيها هذه الشرط ، أو لا تؤخذ هذه الخانة في الاعتبار عند عملية التوزيع.

مثال (04-04): انطلاقا من المثال (04-01) ما هو التوزيع الأمثل في حالة ما إذا علمت أن المورد (At_2) لا يمكنه تزويد المستهلك (B) نظرا لأن نوعية المادة المتوفرة عند هذا المورد لا تخضع للمواصفات التي يشترطها هذا المستهلك.

سوف يتم التوزيع باستعمال طريقة أدنى تكلفة في الجدول كما يلي:

الجدول (04-25): التوزيع في حالة الطرق الممنوعة

		At_1	At_2	At_3	Σ
		0	-1	0	
A	-2	0 -2 **200** - Δ	0 -3 **80** + Δ	3 -5	280
B	-4	-1 -3		0 -4 **300**	300
C	-3	2 - 5	0 - 4 **170** - Δ	0 -3 **60** + Δ	230
D	-8	-4 -4 + Δ	-3 -6	0 -8 **190** - Δ	190
Σ		200	250	550	1000

$$Z=200x(2)+80x(3)+170x(4)+300x(4)+60x(3)+190x(8)=4220$$

من خلال الجدول نجد أن عدد الخانات الشاغلة يحقق الشرط التالي: $m+n-1$ ومنه فإن هذا الحل يعتبر حل قاعدي، وبما أنه توجد على قيمة سالبة للاقتصاد (E_{IJ}) في الخانة (At_1 ,D) فإن الحل يتطلب القيام بعملية التحسين، ومنه نضيف الكمية (Δ=170) وعليه سوف تكون قيمة التخفيض في دالة الهدف هي: $\Delta Z=170x(-4)=-680$

وعندها تكون قيمة دالة الهدف الجديدة بعد عملية التحسين هي:

$$Z=4220-680 \Rightarrow Z=3540$$

والجدول التالي يوضح عملية إعادة التوزيع

الجدول (04-26): التوزيع في حالة الطرق الممنوعة

		At_1	At_2	At_3	Σ
		+ 4	+ 3	0	
A	-6	0 -2 **30 - Δ**	0 -3 **250**	-1 -5 **+ Δ**	280
B	-4	3 -3		0 -4 **300**	300
C	-3	6 - 5	4 - 4	0 -3 **230**	230
D	-8	0 -4 **170 + Δ**	1 -6	0 -8 **20 - Δ**	190
Σ		200	250	550	1000

Z=30(2)+170(4)+250(3)+300(4)+230(3) +20(8)=3540

من خلال الجدول نلاحظ أنه توجد قيمة سالبة للاقتصاد *(E_{IJ})* في الخانة (At_3 ,*A*) لذلك فإنه يتطلب القيام بعملية تحسين الحل ومنه نضيف الكمية (*20=Δ*) وعليه سوف تكون قيمة التخفيض في دالة الهدف هي: *ΔZ =20x(-1)= - 20*

وعندها تكون قيمة دالة الهدف الجديدة بعد عملية التحسين هي: Z=3540-20=3520

والجدول التالي يوضح عملية إعادة التوزيع:

الجدول (04-27): الحل الأمثل

		At_1	At_2	At_3	Σ
		+ 3	+ 2	0	
A	-5	0 -2 **10**	0 -3 **250**	0 -5 **20**	280
B	-4	2 -3		0 -4 **300**	300
C	-3	5 - 5	3 - 4	0 -3 **230**	230
D	-7	0 -4 **190**	1 -6	1 -8	190
Σ		200	250	550	1000

$$Z=10(2)+190(4)+250(3)+20(5)+300(4)+230(3)=3520$$

من خلال الجدول السابق نلاحظ أنه لا توجد قيمة سالبة للاقتصاد (E_{IJ}) لذلك فإن الحل يعتبر حل أمثل، كما أنه لا توجد حلولا بديلة. وبالتالي، نقول أن المستهلك (B) لا يستلم المادة الأولية (*M*) من المورد (At_2) على الرغم من التكلفة المنخفضة في هذه الخانة، وهذا عكس ما ورد في الحل الأمثل المتوصل إليه سابقا، كما جاء في كل من الجدول (04-12) والحلول البديلة المرفقة له في مختلف الجداول.

13-06-03- **حالة الحل القاعدي الناقص**

نقول عن الحل القاعدي أو التوزيع الأولي أنه يتضمن حل ناقص في الحالة التي يكون فيها عدد الخانات الشاغلة اقل من $(m+n-1)$، مع العلم أنه بإمكان الحل القاعدي الناقص أن يظهر في جدول التوزيع الأولي أو خلال مراحل عملية التحسين.

وفي مثل هذه الحالات يستحيل الانطلاق من الحل القاعدي الناقص للوصول إلى الحل الأمثل، وذلك لأننا لا نستطيع تحديد قيم المؤشرات (J_J,I_I)، ولتجنب هذه المشكلة نقوم بإضافة

القيمة (ε) وهي قيمة متناهية في الصغر بحيث أن ($X_{IJ}\pm\varepsilon = \varepsilon$) تضاف في خـانة شاغرة لا تشكل مسارا مغلقا مع بقية الخانات الشاغلة تفاديا لكي لا تكون ($\Delta = \varepsilon$)، ثم نواصل عملية تحسين الحل وفقا للمراحل المعروفة للوصول إلى الحل الأمثل.

مثال 04-05: ليكن لدينا التوزيع التالي وفقا لطريقة الجزاء والعقاب.

الجدول (04-28): الحل القاعدي الناقص

	F_1	F_2	F_3	F_4	Σ
A	-2 **300**	-10 -	-8 -	-9 -	*300*
B	-8 -	-3 **100**	-7 -	-5 **400**	*500*
C	-12 -	-5 **250**	-4 **550**	-10 -	*800*
Σ	*300*	*350*	*550*	*400*	*1600*

نلاحظ من الجدول السابق أن التوزيع المتوصل إليه يشكل حل قاعدي ناقص، حيث توجد خمس خانات شاغلة في الجدول بينما نجد أن ($m + n - 1 = 6$) ، ولمراقبة الحل نضيف القيمة (ε) بحيث لا يشكل مسارا مغلقا مع بقية الخانات الشاغلة.يمكننا أن نضيف القيمة المتناهية الصغر (ε) في الخانة (F_1 ,B). على سبيل المثال كما يفضل أن تضاف هذه القيمة في الخانة الشاغرة التي تحتوي على أقل تكلفة. ثم تتم مراقبة فيما إذا كان هذا الحل أمثل أم لا بعد إعادة صياغة التوزيع ليكون في شكل حل قاعدي على النحو التالي:

الجدول (04-29): الحل القاعدي الناقص

		F_1	F_2	F_3	F_4	Σ
		- 8	*- 3*	*- 2*	*- 5*	
A	*6*	0 -2 **300**	13 -10	12 -8	10 -9	*300*
B	*0*	0 -8 *ε*	0 -3 **100**	5 -7 -	0 -5 400	*500*
C	*-2*	2 -12	0 -5 **250**	0 -4 **550**	3 -10	*800*
Σ		*300*	*350*	*550*	*400*	*1600*

يتضح أن هذا الحل هو حل أمثل طالما لا توجد قيمة سالبة للاقتصاد في أية خانة شاغرة.

13-07- حل مسألة النقل بطريقة الشبكة (شبكة النقل)

13-07-01- حالة تقليل دالة الهدف

مثال 04-06: تريد مؤسسة النقل السريع وهي إحدى المؤسسات المختصة في نقل البضائع أن تنقل إحدى المواد من المدينة (A) إلى المدينة (L)، ولها إمكانية المرور بالمدن التالية:

(B, C, D, E, F, G, H, I, J, K)

تكلفة النقل من مدينة إلى أخرى هي كالتالي:

(AB=400),(AC=300),(AD=500),(BE=200),(DE=600),(BF=900)

(CF=1000),(CG=500),(EH=800),(DF=200),(EI=500),(FH=400)

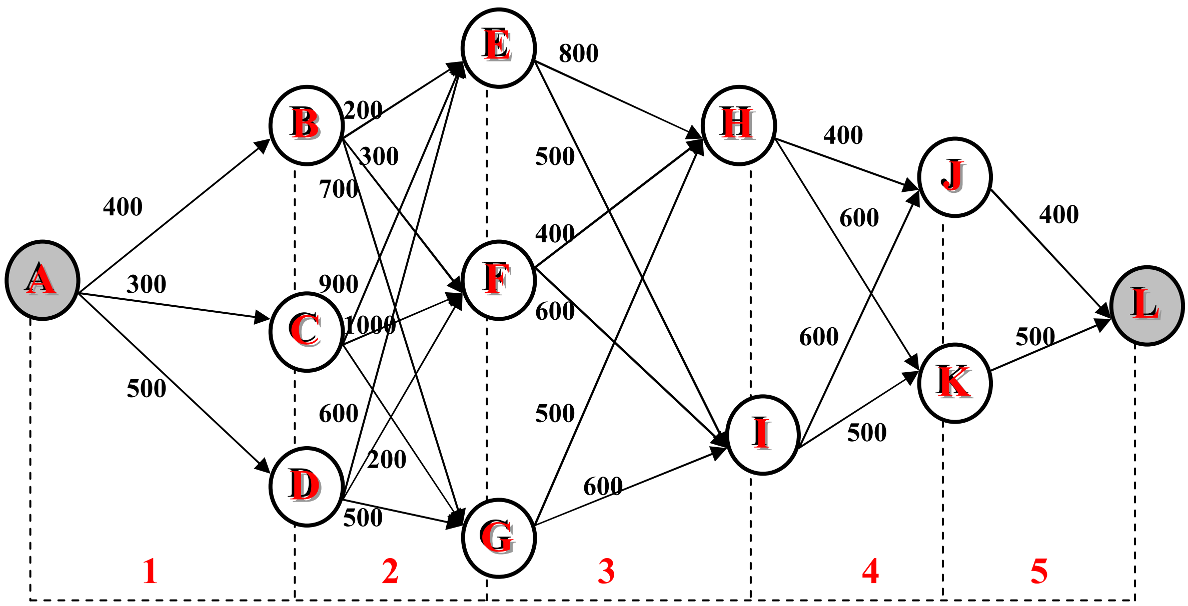
(FI=600),(GH=500),(GI=600)(HK=600),(HJ=400),(IJ=600)

(IK=500),(JL=400),(KL=500),(DG=500).

المطلوب: تحديد الطريق الذي يسمح لهذه المؤسسة بنقل هذه المادة بأقل تكلفة؟.

الحل: رسم الشبكة

الشكل رقم (04-05): التمثيل البياني لشبكة النقل



- تقسيم الشبكة إلى مراحل كما هو مبين في الشكل ويكون الحل ابتداء من المرحلة الأولى (1) أو الأخيرة (5)، لكن يستحسن أن نبدأ الحل دائما من المرحلة الأولى كما يلي:

- **المرحلة الأولى:** لدينا الاتجاهات الممكنة بالمسافات التالية:

$$AB = 400$$

$$AC = 300$$

AD = 500

- **المرحلة الأولى ثم المرحلة الثانية:** في هذه المرحلة نبحث عن أحسن مسلك للمرحلتين معا والمسالك المحتملة هي:

- **مرورا بالمدينة (B):**

$$\left.\begin{array}{l} ABE = 400 + 200 = 600 \\ ABF = 400 + 300 = 700 \\ ABG = 400 + 700 = 1100 \end{array}\right\} \boldsymbol{ABE = 600}$$

حتى نهاية المرحلتين الأولى والثانية معا ومرورا بالمدينة (B) فإن المسلك **(*ABE* = 600)** يعتبر أفضل مسلك لأنه يعطي أقل تكلفة.

- **مرورا بالمدينة (C):**

$$\left.\begin{array}{l} ACE = 300 + 900 = 1200 \\ ACF = 300 + 1000 = 1300 \\ ACG = 300 + 500 = 800 \end{array}\right\} \boldsymbol{ACG = 800}$$

مرورا بالمدينة (C) فإن المسلك الأمثل حتى نهاية المرحلة الأولى والثانية معا هو المسلك **(*ACG* = 800)** ، لأنه يُحمل المؤسسة أقل تكلفة مقارنة بالمسلكين الآخرين.

- **مرورا بالمدينة (D):**

$$\left.\begin{array}{l} ADE = 500 + 600 = 1100 \\ ADF = 500 + 200 = 700 \\ ADG = 500 + 500 = 1000 \end{array}\right\} \boldsymbol{ADF = 700}$$

مرورا بالمدينة (D) يعتبر المسلك **(*ADF* = 700)** هو المسلك الأمثل لأنه يسمح بنقل المادة بأقل تكلفة.

حتى نهاية كل من المرحلة الأولى والمرحلة الثانية معا، فإن الأمر يتطلب ضرورة المرور بالمسالك والطرق التالية: **(*ABE* = 600; *ACG* = 800; *ADF*=700)**.

- **المرحلتين (الأولى والثانية) ثم المرحلة الثالثة:** انطلاقا من نتائج المرحلتين السابقتين فإن المسالك المحتملة هي:

$$\left.\begin{array}{l} ABEH = 600 + 800 = 1400 \\ ABEI = 600 + 500 = 1100 \\ ACGH = 800 + 500 = 1300 \\ ACGI = 800 + 600 = 1400 \\ ADFH = 700 + 400 = 1100 \\ ADFI = 700 + 600 = 1300 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \boldsymbol{ABEI = 1100} \\ \\ \boldsymbol{ADFH = 1100} \end{array}$$

مما سبق وللمرور بالمدينة (H) فإن القرار الأمثل يعني أنه من الضروري المرور بالمسلك الأمثل **($ADFH = 1100$)** لأنه يسمح بنقل المادة بأقل تكلفة وهي 1100و.ن. أما وللمرور بالمدينة (I) فإن المسلك الأمثل في هذه الحالة هو **($ABEI = 1100$)**.

وبالتالي فإنه حتى نهاية المراحل الأولى والثانية والثالثة معا، فإن السياسات المثلى هي التي تعبر عن الطرق والمسالك التالية: **($ABEI = 1100; ADFH = 1100$)**.

- **المراحل (الأولى والثانية والثالثة) ثم المرحلة الرابعة:**

$$\left.\begin{aligned} ABEIJ &= 1100 + 600 = 1700 \\ ABEIK &= 1100 + 500 = 1600 \\ ADFHJ &= 1100 + 400 = 1500 \\ ADFHK &= 1100 + 600 = 1700 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\boldsymbol{ABEIK = 1600} \\ &\boldsymbol{ADFHJ = 1500} \end{aligned}$$

نلاحظ أنه إذا تطلب الأمر المرور بالمدينة J)، فإنه من الضروري المرور بالمسلك الأمثل التالي **($ADFHJ = 1500$)**، لأنه سوف يحمل المؤسسة أقل تكلفة.

أما إذا تطلب الأمر خلاف ذلك، حيث لابد من المرور بالمدينة (K) سيكون عبر المسلك الأمثل التالي **($ABEIK = 1600$)**.

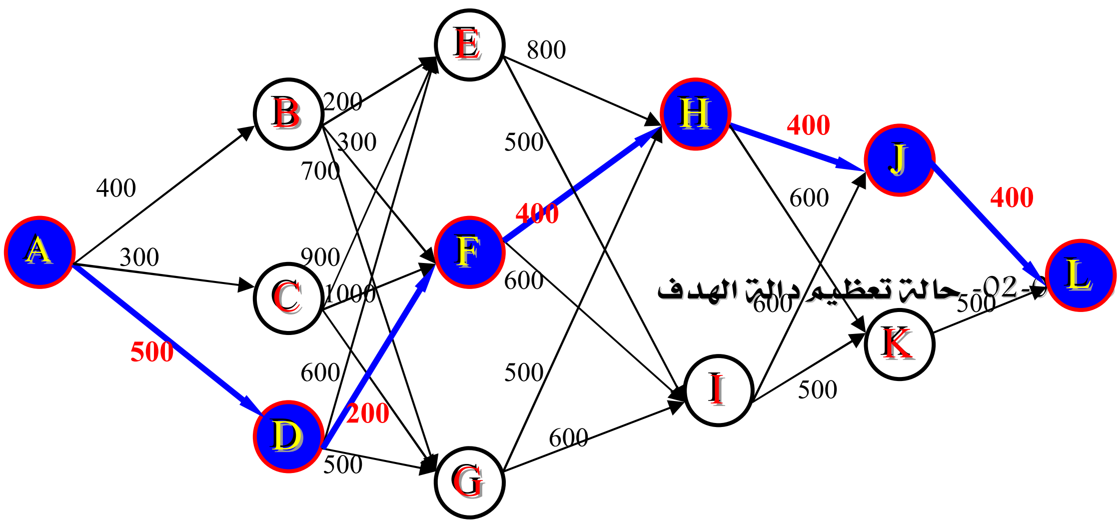
وعليه فإنه وحتى نهاية الأربعة الأولى معا، فإن السياسات المثلى تعبر عن الطرق والمسالك التالية **($ADFHJ = 1500; ABEIK = 1600$)**.

- **المراحل (الأولى والثانية والثالثة والرابعة) ثم المرحلة الخامسة:**

$$\left.\begin{aligned} ADFHJL &= 1500 + 400 = 1900 \\ ABEIKL &= 1600 + 500 = 2100 \end{aligned}\right\} \boldsymbol{ADFHJL = 1900}$$

إلى غاية المدينة(L) فإن المسلك الأمثل هو **($ADFHJL = 1900$)** والذي يسمح بنقل هذه المادة من المدينة (A) نحو المدينة (L) مرورا بالمدن التالية: (D), (F), (H), (J) وذلك بتكلفة إجمالية قدرها 1900و.ن وهي أدنى تكلفة نقل، يتضح هذا المسلك في الشبكة التالية.

الشكل رقم (04-06) : المسار الأمثل لنقل المادة



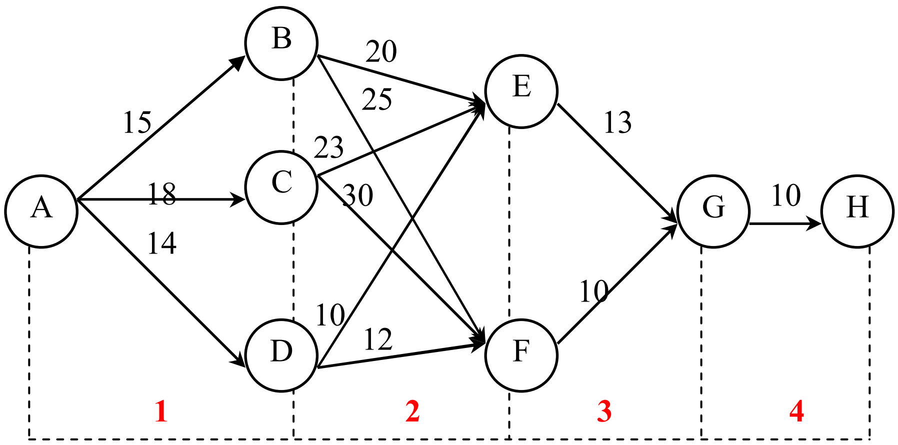
مثال (04-07): تريد مؤسسة البراق لنقل المسافرين إنجاز شبكة للنقل الحضري تسمح بنقل أكبر عدد ممكن من المسافرين من المحطة الرئيسة (A) إلى المحطة النهائية (H). تتوقع أن يكون عدد المسافرين من محطة إلى أخرى كما يلي:

$$(AB=15),(AC=18),(AD=14),(BE=20),(BF=25),(CE=23)$$

$$(CF=30),(DE=10)\quad(DF=12),(EG=13),(FG=10),(GH=10)$$

المطلوب: البحث عن الطريق الذي يسمح لهذه المؤسسة بالحصول على أكبر الإيرادات، إذا علمت أن ثمن التذكرة الواحدة هي 20 و.ن؟

الشكل رقم (04-07): شبكة لنقل المسافرين



الحل: رسم الشبكة

بعد تقسيم الشبكة إلى مراحل ننطلق في دراستها ابتداء من المرحلة الأولى كما يلي:

- **المرحلة الأولى:** المسالك الممكنة هي:

$$AB = 15$$

$$\boldsymbol{AC = 18}$$

$$AD = 14$$

- **المرحلة الأولى ثم المرحلة الثانية:** المسالك المحتملة هي:

$$\left.\begin{aligned} ABE = 15 + 20 = 35 \\ ACE = 18 + 23 = 41 \\ ADE = 14 + 10 = 24 \end{aligned}\right\} \boldsymbol{ACE = 41}$$

- من أجل الوصول إلى المحطة (E):

حتى الوصول إلى المحطة(E) فإن المسلك **($ACE = 41$)** يعتبر أفضل مسلك لأنه يسمح بنقل أكبر عدد ممكن من المسافرين.

$$\left.\begin{aligned} ABF = 15 + 25 = 40 \\ ACF = 18 + 30 = 48 \\ ADF = 14 + 12 = 26 \end{aligned}\right\} \boldsymbol{ACF = 41}$$

- من أجل الوصول إلى المحطة (F):

إلى غاية المحطة(E) فإن المسلك **($ACF = 48$)** يعتبر أفضل مسلك لأنه يسمح بنقل أكبر عدد ممكن من المسافرين.

من خلال المرحلة الأولى والثانية معا، فإنه من الضروري على المؤسسة اتباع المسالك والطرق التالية: **($ACE = 41, ACF = 48$)**.

- **المرحلة (الأولى والثانية) ثم المرحلة الثالثة:** المسالك المحتملة هي:

- من أجل الوصول إلى المحطة (G):

يمكن الوصول إلى المحطة (G) مرورا بإحدى المسلكين التاليين:

$$ACEG = 41 + 13 = 54$$

$$ACFG = 48 + 10 = 58$$

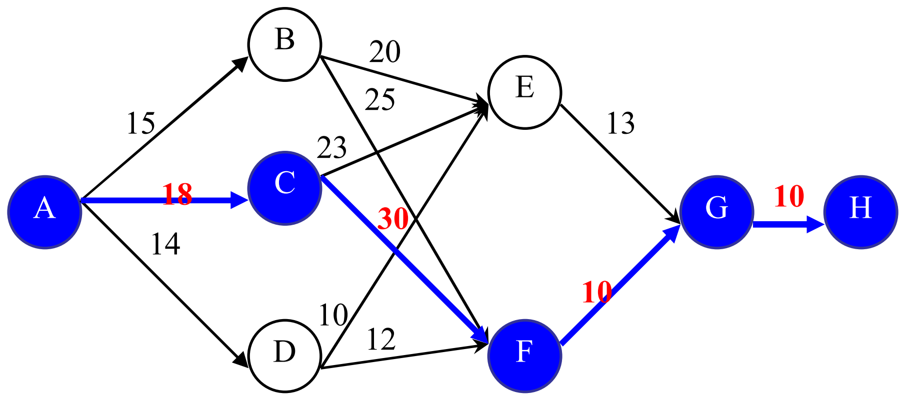
إن المسلك الأمثل والذي يسمح بنقل أكبر عدد هو **($ACFG = 58$)**.

- **المرحلة (الأولى والثانية والثالثة) ثم المرحلة الرابعة:**

$$\left.\begin{array}{l} ACEGH = 54 + 10 = 64 \\ ACFGH = 58 + 10 = 68 \end{array}\right\} \boldsymbol{ACFGH = 68}$$

يبدو أنه يوجد طريق واحد أمثل بإمكانه نقل أكبر عدد من المسافرين من المحطة (A) إلى المحطة (H) وهذا المسلك هو **(*ACFGH* = 68)**، (أنظر الشكل (12-09)) والذي يسمح للمؤسسة بتحقيق أقصى إيرادات (R=68x.20 = 1360).

الشكل رقم (08-04) : المسلك الأمثل لشبكة نقل المسافرين



تمارين

التمرين(IV-01)**:** ليكن جدول يتضمن تكاليف نقل سلعة من مصادرها نحو مختلف الزبائن

	A	B	C	∑
X	2	4	2	*80*
Y	2	3	4	*50*
Z	1	2	3	*60*
∑	*70*	*60*	*110*	

المطلوب: باستخدام طريقة الشمال الغربي، أوجد الحل الأمثل

ثم أبحث فيما اذا هناك حلول بديلة

الحل: التوزيع حسب طريقة الشمال الغربي

	A	B	C	المجموع
X	2	4	2	*80*
Y	2	3	4	*50*
Z	1	2	3	*60*
المجموع	*70*	*60*	*110*	

نلاحظ أننا أمام حالة عدم التوازن بين مجموع الكميات في الأعمدة ومجموع الكميات في الأسطر حيث أن مجموع الأعمدة يساوي 240 ومجموع الأسطر 190 مما يعني وجود اختلال بـ 50 ولأنه يجب أن يتحقق التوازن، كان لابد أن نضيف سطر وهمي تكون فيه الكمية مساوية لهذا الفرق، على أن نعطي لهذا السطر تكلفة كبيرة مقارنة ببقية التكاليف في الجدول ولتكن مثلا القيمة (10)، حيث أن الكمية المضافة تعبر عن كمية غير موزعة، كما في الجدول التالي:

جدول (04-01-01) : التوزيع حسب طريقة الشمال الغربي

	A	*B*	*C*	∑
X	2 ***70***	4 ***10***	2	80
Y	2	3 ***50***	4	50
Z	1	2	3 ***60***	60
W	10	10	10 ***50***	50
∑	70	60	110	240

نلاحظ بأن الحل القاعدي المتوصل إليه بأنه يتضمن حل ناقص لان عدد الخانات الشاغلة وهي (خمس خانات) أقل من ($m+n-1=3+4-1=6$)، والملاحظ أن طريقة الشمال الغربي لا تعتمد على دالة الهدف عند التوزيع، وهي تعطي الحل في شكل سُلّم تكون فيها دالة الهدف هي: $Z = 70.(2)+ 10.(4)+ 50.(3)+ 60.(3) =510$

ولمراقبة الحل في هذا الحالة فإننا نقوم بإضافة قيمة متناهية في الصغر (ε) تضاف في خـانة شاغرة لا تشكل مسارا مغلقا مع بقية الخانات الشاغلة، ثم نواصل عملية تحسين الحل وفقا للمراحل المعروفة للوصول إلى الحل الأمثل يمكننا أن نضيف القيمة المتناهية الصغر (ε) في الخانة (A ,Z). لأنها الخانة الشاغرة التي تحتوي على أقل تكلفة. ليكون بذلك في شكل حل قاعدي على النحو التالي:

		A	B	C	Σ
		2	*0*	*0*	
X	-4	0 - 2 **70** - Δ	0 - 4 **10**	-2 - 2 + Δ	**80**
Y	-3	+1 - 2	0 - 3 **50**	+1 - 4	**50**
Z	-3	0 - 1 $\varepsilon + \Delta$	-1 - 2	0 - 3 **60** - Δ	**60**
W	-10	2 -10	0 -10	0 -10 **50**	**50**
Σ		**70**	**60**	**110**	**240**

ما يمكن ملاحظته أنه يوجد اقتصاد سالب مما يعني أن الحل القاعدي غير أمثل، لذلك يجب القيام بتحسين الحل وتتم هذه العملية في كل مرة نجد فيها اقتصاد سالب

		A	B	C	Σ
		-2	*-4*	*-2*	
X	0	0 - 2 **10**	0 - 4 **10** - Δ	0 - 2 **60** + Δ	**80**
Y	+1	+ 1 - 2	0 - 3 **50**	+3 - 4	**50**
Z	+1	0 - 1 ***60***	-1 - 2	+2 - 3	**60**
W	-8	0 -10	-2 -10 + Δ	0 -10 **50** - Δ	**50**
Σ		**70**	**60**	**110**	**240**

		A *-2*	B *-2*	C *-2*	Σ
X	*0*	0 - 2 **10** - Δ	+2 - 4	0 - 2 **70** + Δ	**80**
Y	*-1*	- 1 - 2 + Δ	0 - 3 **50** - Δ	+1 - 4	**50**
Z	*+1*	0 - 1 ***60***	+1 - 2	+2 - 3	**60**
W	*-8*	0 -10	0 -10 **10** + Δ	0 -10 **40** - Δ	**50**
Σ		**70**	**60**	**110**	**240**

		A *-2*	B *-3*	C *-3*	Σ
X	*1*	1 - 2	2 - 4	0 - 2 **80**	**80**
Y	*0*	0 - 2 **10**+ Δ	0 - 3 **40**- Δ	1 - 4	**50**
Z	*1*	0 - 1 ***60*** - Δ	0 - 2 + Δ	1 - 3	**60**
W	*-7*	1 -10	0 -10 **20**	0 -10 **30**	**50**
Σ		**70**	**60**	**110**	**240**

$$Z = 80(2)+10(2)+40(3)+60(1) \Rightarrow Z = 160 + 20 + 120 + 60 = 360$$

ولأنه يوجد اقتصاد يساوي الصفر في الخانة (Z,B) الشيء الذي يعني وجود حلول بديلة لا نهائية يمكن الوصول إليها انطلاقا من الجدول الذي يحتوي الحل البديل الأول المتوصل إليه بطريقة المسار المغلق أما بقية الحلول البديلة الأخرى عن طريق استعمال الطريقة المتوسطة.

		A *-2*	B *-3*	C *-3*	Σ
X	*1*	1 - 2	2 - 4	0 - 2 **80**	**80**
Y	*0*	0 - 2 **50**	0 - 3	1 - 4	**50**
Z	*1*	0 - 1 ***20***	0 - 2 **40**	1 - 3	**60**
W	*-7*	1 -10	0 -10 **20**	0 -10 **30**	**50**
Σ		**70**	**60**	**110**	**240**

$$Z = 80(2)+50(2)+20(1)+40(2) \Rightarrow Z = 160 + 100 + 20 + 80 = 360$$

التمرين (02-04): أوجد الحل الأمثل لحالات التوزيع التالية

- **الحالة الأولى :** حسب طريقة الشمال الغربي

	A	B	C	المجموع
X	3	4	2	180
Y	4	5	3	150
Z	2	3	3	160
المجموع	120	150	230	

- **الحالة الثانية:** حسب طريقة أدنى تكلفة في الجدول

	A	B	C	المجموع
X	5	1	7	75
Y	6	34	46	20
Z	3	22	05	50
المجموع	10	80	15	

- **الحالة الثالثة:** حسب طريقة الجزاء والعقوبات

	A	B	C	D	المجموع
X	7	6	9	8	90
Y	8	8	16	12	110
Z	6	8	10	9	40
W	8	8	9	10	50
المجموع	30	80	150	30	

- **الحالة الرابعة:** حسب أية طريقة

	A	B	C	المجموع
X	0	2	1	50
Y	2	1	5	100
Z	2	4	3	50
المجموع	50	50	100	

التمرين (03-IV)**:** حل المسألة التالية انطلاقا من طريقة أدنى عنصر في السطر، وعلما أن المورد (F_2) لا يمكنه أن يمون المؤسسة (E_1)، ثم قارن النتيجة النهائية بنتيجة الفوارق.

	E_1	E_2	E_3	$\sum$
F_1	1	3	2	500
F_2	2	1	4	700
F_3	4	6	6	800
F_4	8	7	4	300
$\sum$	700	500	110	

التمرين IV-04: تحتاج إحدى المؤسسات المختصة في الصناعات النسيجية لثلاث أنواع من الخيوط النسيجية وهي على التوالي F_1, F_2, F_3 وقد أبدت ثلاث دول استعدادها لتزويد هذه المؤسسة وهي (مصر، سوريا، الأردن) وذلك بالكميات التالية وبنفس الترتيب: 50، 40، 30 طن. أما كميات الطلب من هذه الأنواع الثلاث من الخيوط بالطن وتكلفة شراء الطن الواحد منها حسب ما هو معروض في تلك الدول معطى في الجدول التالي:

سعر الطن الواحد بالدولار			حجم الطلب	نوع الخيط
سوريا	مصر	الأردن		
7	1	5	*60*	F_1
6	4	3	*40*	F_2
3	2	6	*30*	F_3

المطلوب:

ضع هذه المشكلة في صورة مشكلة نقل، ثم البحث عن الحل الذي يجعل إجمالي تكاليف الشراء اقل ما يمكن؟.

التمرين IV-05: تحتوي إحدى المؤسسات على ثلاث وحدات إنتاجية تختص في صناعة جميع أنواع البلاط ، طاقتها الإنتاجية الإجمالية تقدر بحوالي *3000 طن/شهريا*، 40% منها يتم إنتاجه بالوحدة الأولى بتكلفة قدرها *1000 و.ن/طن*، و45% في الوحدة الإنتاجية الثانية بتكلفة إنتاجية *1000و.ن/طن*، أما تكلفة الإنتاج بالوحدة الإنتاجية الثالثة فهي *1100 و.ن/طن*، يجب على هذه الوحدات تموين خمسة مراكز للتخزين بالكمية *800 طن* في الشهر بالنسبة للمركز الأول و*400 طن* في الشهر بالنسبة لكل مركز من المراكز الأخرى.

يبين الجدول التالي تكاليف النقل من مختلف الوحدات إلى مختلف المراكز.

	المركز 1	المركز2	المركز 3	المركز 4	المركز 5
الوحدة 1	30	60	50	130	100
الوحدة 2	80	50	40	100	80
الوحدة 3	100	70	100	30	20

إذا علمت أن سعر البيع 2000 و.ن للطن الواحد

المطلوب: تحديد أحسن مخطط لتموين المراكز؟.

التمرين IV-06: تستعمل احدى المؤسسات الصناعية وحداتها الإنتاجية الثلاث لتلبية طلبات زبائنها، وذلك بواسطة مخزنين كبيرين، حيث يتم نقل السلع من الوحدات الإنتاجية إلى المخزنين ثم إلى الزبائن، الوحدات الإنتاجية الثلاث P_3,P_2,P_1 تتوفر على *6،7،12 طن*، أما طاقة المخزنين فهي المخزن الأول ($S_1=18$) والمخزن الثاني هي($S_2=15$)، أما الكميات المطلوبة من طرف الزبائن هي.

الزبائن	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
الطلب	6	5	4	3	7

بينما التكاليف المتعلقة بنقل الطن الواحد من الوحدات الإنتاجية نحو المخازن ثم من هذه الأخيرة إلى الزبائن هي كما يلي:

	S_2	S_1
P_1	6	5
P_2	3	3
P_3	5	4

	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1
S_1	3	8	5	7	2
S_2	5	6	3	8	2

المطلوب: أوجد الحل الأمثل الذي يجعل إجمالي تكاليف نقل السلع من الوحدات الإنتاجية إلى الزبائن في حدها الأدنى؟.

التمرين IV-07: المعطيات التالية متعلقة بتلبية إحدى المؤسسات لطلبات زبائنها لمدة ستة أشهر:

الشهر	1	2	3	4	5	6
الطلب	10	20	50	30	60	10
تكلفة الإنتاج	10	8	7	7	8	9
طاقة الإنتاج	30	40	40	50	40	30

إذا كانت تكلفة التخزين هي 5 و.ن للطن الواحد في الشهر.

المطلوب: ضع مخطط إنتاجي تبين فيه الكميات الواجب إنتاجها كل شهر من أجل تخفيض تكاليف الإنتاج والتخزين الإجمالية؟.

التمرين IV-08: تحتوي مؤسسة الشفاء على أربع وحدات إنتاجية *A,B,C,D* تختص في صنع منتجاتها الدوائية من مادة "زيت الزيتون" تمون هذه المؤسسة وحداتها الإنتاجية من ثلاثة موردين F_1,F_2,F_3 إن الكميات المتوفرة لدى مختلف الموردين واحتياجات كل وحدة إنتاجية من هذه المادة ملخصة في الجدول التالي:

الوحدات	الكميات
A	120 طن
B	230 طن
C	200 طن
D	650 طن

المورد	الكميات
F_1	310 طن
F_2	670 طن
F_3	220 طن

أما تكاليف نقل الطن الواحد من الموردين نحو مختلف الوحدات موضحة في الجدول:

	D	*C*	*B*	*A*
F_1	7	8	5	4
F_2	5	4	7	3
F_3	9	6	1	2

المطلوب: وضع خطة لنقل هذه المادة إلى مختلف وحدات المؤسسة بحيث تكون إجمالي تكاليف النقل في حدها الأدنى، علما أن الوحدة (*A*) المختصة في صنع منتجات صيدلانية لا يمكن تزويدها من المورد (F_1) نظرا لعدم توفر زيت هذا المورد على المواصفات الكيميائية التي تتطلبها المنتجات الصيدلانية التي تنتجها هذه الوحدة؟.

التمرين IV-09: تنتج مؤسسة أربعة أنواع من المنتجات (A, B, C, D)، بعد دراسة السوق قررت هذه المؤسسة أن تنتج 450.000 وحدة موزعة كالتالي:

30.000 وحدة من النوع A — 210.000 وحدة من النوع C

140.000 وحدة من النوع B — 70.000 وحدة من النوع D

كيف يجب توزيع إنتاج هذه الكميات على مختلف الورشات التابعة للمؤسسة، بحيث يحقق الربح الأقصى، علما بأن تكلفة الإنتاج لمختلف الأنواع ضمن مختلف الورشات الإنتاجية هي كما يلي:

	المنتج A	المنتج B	المنتج C	المنتج D
الورشة 1	200	210	45	38
الورشة 2	180	280	52	29
الورشة 3	150	310	41	43

من خلال هذه الدراسة، فإنه يتوقع أن تعرف أسعار هذه المنتجات بعض الاستقرار خلال الفترة المقبلة، لهذا فإنها تتخذ قراراتها على أساس الأسعار التالية:

- ✓ سعر بيع الوحدة الواحدة من النوع (A) 350 و.ن
- ✓ سعر بيع الوحدة الواحدة من النوع (B) 380 و.ن
- ✓ سعر بيع الوحدة الواحدة من النوع (C) 120 و.ن
- ✓ سعر بيع الوحدة الواحدة من النوع (D) 60 و.ن

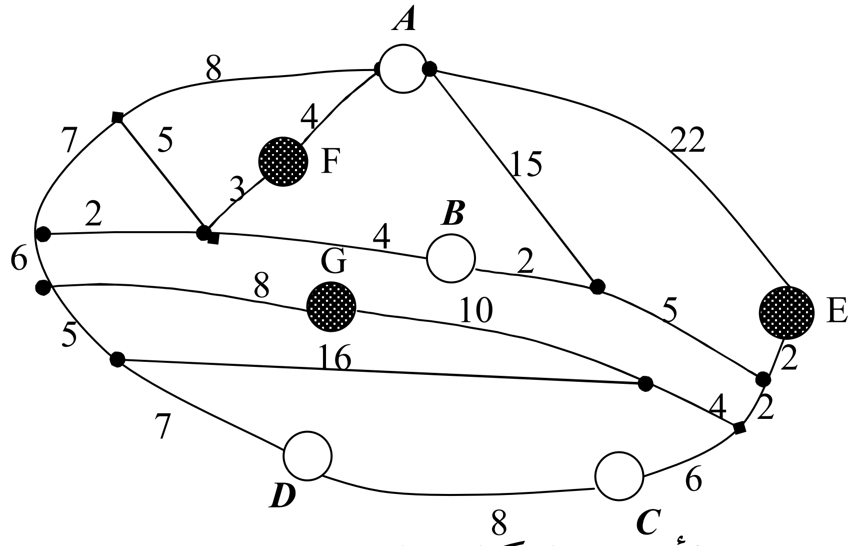
التمرين IV-10: تقوم إحدى الورشات الإنتاجية بإنتاج كميات تقدر بحوالي 600 وحدة في كل شهر من المنتج (A) لغرض تلبية طلبات الشهور الأربعة المقبلة، والمحددة بـ *500* وحدة *800* وحدة، *1200* وحدة *7000* وحدة على الترتيب.

ونظرا لعدم قدرتها على تلبية هذه الطلبات باستعمال الوقت العادي فإن مسؤول هذه الورشة يرى أنه توجد إمكانية لاستعمال الوقت الإضافي، حيث يتم إنتاج *300* وحدة إضافية في كل شهر.

تكاليف إنتاج كل وحدة هي 10 و.ن أثناء استعمال الوقت العادي و15 و.ن إذا تم اللجوء إلى الوقت الإضافي، كما أن تكلفة تخزين الوحدة خلال الشهر هي 02 و.ن.

المطلوب: وضع برنامج إنتاجي لهذه المؤسسة الذي يسمح لها بتخفيض التكاليف الإجمالية ويلبي لها طلبات زبائنها؟.

التمرين IV - 11: الشكل التالي يمثل شبكة للنقل بالسكك الحديدية حيث أن النقاط *(A,B,C,D)* تمثل مناجم لاستخراج مادة الفحم الحجري تنتج هذه المناجم شهريا الكميات التالية *(3000,2000,8000,3000)* طن على الترتيب، بينما تمثل النقاط *(E,F,G)* أفران لصناعة الصلب وأطوال خط السكة الحديدية (بالكيلومتر) من نقطة اتصال إلى نقطة اتصال أخرى موضحة فوق الخطوط في الشبكة التالية.



يمكن أن تستعمل هذه الأفران شهريا الكميات التالية من الفحم:

الكمية المستعملة بالطن	الفرن
2000	*E*
4000	*F*
6000	*G*

المطلوب:

إذا كانت تكلفة النقل هي 20 و.ن للطن الواحد في الكيلومتر الواحد، أوجد التوزيع الأمثل للفحم مما يجعل إجمالي تكاليف النقل أقل ما يمكن.

التمرين 13-12: تملك مؤسسة نقل أربع شاحنات، الشاحنة الأولى لا يمكنها أن تنقل أكثر من *20* طن والثانية *10* طن والثالثة *05* طن والرابعة *02* طن. يقوم مدير هذه المؤسسة بعملية تخطيط نقل العتاد نحو مختلف الزبائن بالنسبة للأسبوع ويتوصل إلى ما يلي:

الزبون (A) يجب أن يستلم أسبوعيا 35 طن

الزبون (B) يجب أن يستلم أسبوعيا 50 طن

الزبون (C) يجب أن يستلم أسبوعيا 12 طن

الزبون (D) يجب أن يستلم أسبوعيا 06 طن

تكلفة النقل للكيلومتر الواحد حسب الحمولة كما في الجدول التالي:

الشاحنة	التكلفة
20 طن	*75 و.ن*
10 طن	*60 و.ن*
05 طن	*45 و.ن*
02 طن	*25 و.ن*

أما أقرب مسافة من المؤسسة نحو مختلف زبائنها فهي كما في الجدول التالي:

الزبون	المسافة (كم)
A	120
B	80
C	160
D	300

مع العلم أنه لا يمكن للشاحنة ذات الحمولة 20طن أن تسلم العتاد للزبون (B) نظرا لعدم تمكنها من دخول منطقة تواجد ساحة الاستلام، وكذلك فإن نوع العتاد الذي يجب أن يسلم للزبون (A) يفرض أن تكون الشاحنة تنقل على الأقل (*10* طن).

المطلوب: ما هو التوزيع الأمثل للشاحنات على مختلف الزبائن؟.

التمرين IV-13: تنتج مؤسسة صناعة النسيج ضمن وحدتيها الرئيستين الوحدة الأولى (U_1) طاقتها الإنتاجية 3000 وحدة موجهة لتلبية احتياجات السوق الأولى (M_1) حيث يتوقع أن يكون الطلب 3500 وحدة، سعر البيع هو 30 وحدة نقدية، أما الوحدة الإنتاجية الثانية (U_2) فإن طاقتها الإنتاجية هي 5000 وحدة موجهة لتلبية احتياجات السوق الثانية (M_2) حيث يتوقع أن يكون الطلب 3000 وحدة سعر البيع هو 33 وحدة نقدية، يمكن لهذه المؤسسة تغطية أي عجز في الطلب من أية وحدة إنتاجية، التكاليف المباشرة وغير المباشرة لإنتاج الوحدة الواحدة ومصاريف التوزيع موضحة في الجدول التالي:

	تكاليف مباشرة	تكاليف غير مباشرة	(M_1)	(M_2)
(U_1)	10	08	07	05
(U_2)	12	10	05	02

المطلوب: ماهو التوزيع الأمثل لإنتاج الوحدتين على مختلف الأسواق، لتحقيق أقصى ربح؟.

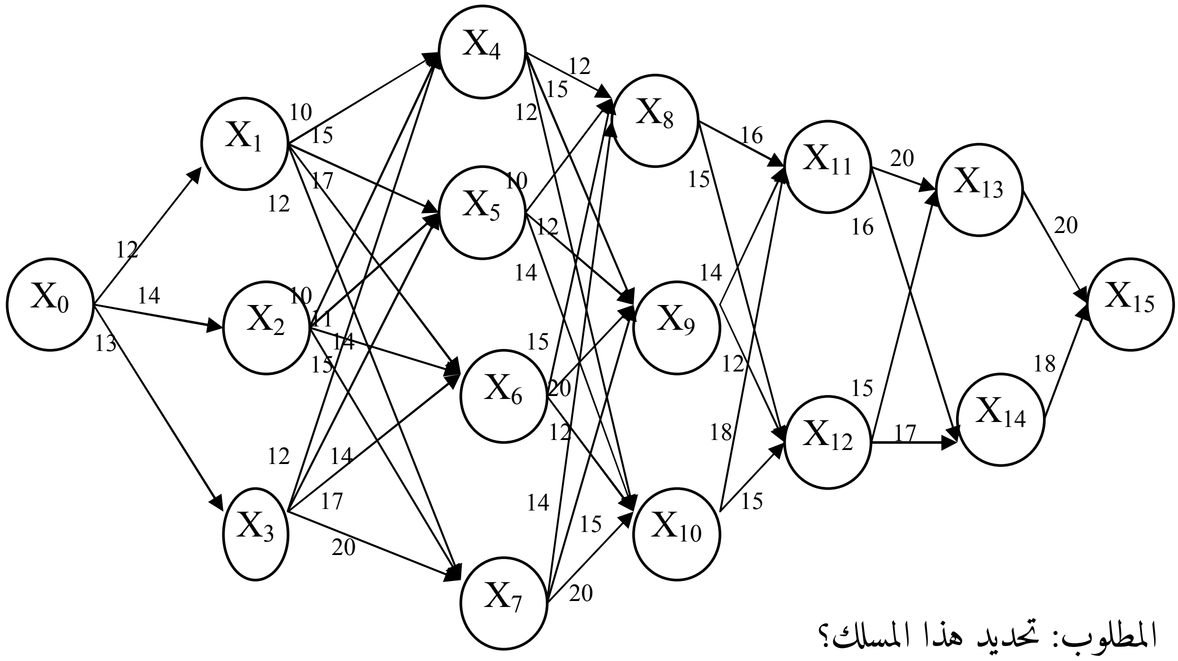
التمرين IV -14: يبحث مدير المبيعات بمؤسسة تجارية عن أصغر مسلك بين المدينة (A) والمدينة (J) لتسليم أكبر كمية من البضاعة لأحد الزبائن، يستطيع المرور بالوحدات والمخازن التابعة للمؤسسة، المسافات والكميات الممكن نقلها بين الوحدات والمخازن تظهر في الجدول التالي:

المسالك	المسافات (كم)	الكميات (طن)
AB	30	5
AC	20	4
AD	40	3
BE	10	6
BF	30	5
CE	25	6
CF	30	7
DE	15	3
DF	35	6

المسالك	سافات (كم)	الكميات (طن)
EG	40	9
EH	50	8
EI	20	10
FG	30	12
FH	45	10
FI	50	9
GJ	10	6
HJ	25	7
IJ	30	9

المطلوب: تحديد المسلك الأمثل الذي يسمح بنقل البضاعة؟

التمرين IV -15: يريد أحد المرشدين السياحيين بمؤسسة آفاق للسياحة والسفر تحديد أفضل مسلك يسمح له بنقل مجموعة من السياح من المدينة X_0 إلى المدينة X_{15} بأقل تكلفة من ضمن مسالك الشبكة التالية:



المطلوب: تحديد هذا المسلك؟

التمرين IV -16: تبحث مؤسسة توزيع المياه، عن وضع شبكة للتوزيع من المصدر (A) حتى إلى المدينة (I) فإذا كانت كمية المياه المنقولة عبر هذه الشبكة من مختلف المراكز بالمتر المكعب هي:

$$(AB=250),(AC=400),(BD=300),(BE=600),(CD=600)$$

$$(CE=100),(DF=250),(DH=100),(EF=350),(EG=200)$$

$$(FH=120),(FG=200),(HI=100),(FI=350\ \ ),(GI=100)$$

المطلوب: تحديد المسلك الذي يسمح بتوزيع أكبر كمية ممكنة من المياه؟

التمرين IV - 17: تفكر مؤسسة السلامة المختصة في إنجاز الطرق في إنجاز شبكة نقل من المدينة (A) إلى المدينة (I) وفقا للقيود التالية:

- يجب أن يمر الطريق بإحدى المدينتين(B)و(C) انطلاقا من إحدى المدن التالية (D)،(E)، (F)
- ثم المرور بالمدينتين(C) ، (H) ليصل إلى المدينة (I).

علما أن تكلفة الإنجاز بالنسبة لكل مرحلة هي:

$$(AB=6),(AC=2),(BD=5),(BE=7),(BF=10)$$

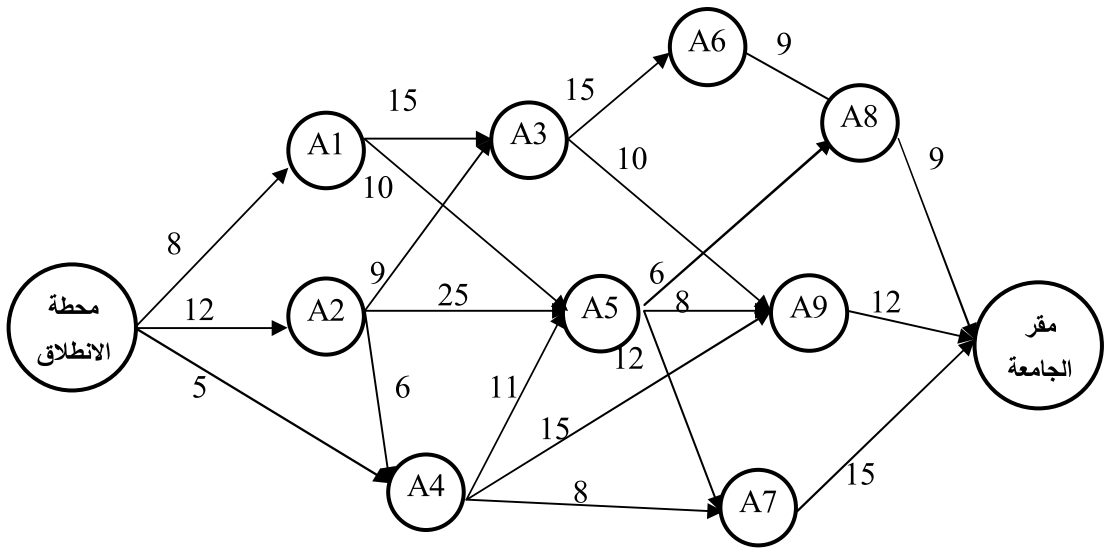
$$(CD=9),(CE=9),(CF=11),(AB=6),(DH=7)$$

$$(DG=9),(EG=8),(EH=7),(FG=5),(FH=6)$$

$$(GI=9),(HI=5).$$

المطلوب: تحديد الطريق الذي يمكن إنجازه بأقل تكلفة؟.

التمرين IV -18: يريد مدير النقل الجامعي إنجاز شبكة لنقل الطلبة، إذ أن العدد الممكن نقله من محطة إلى أخرى، وضمن مختلف الطرق ملخصة بالشبكة التالية:



المطلوب: تحديد الطريق الذي يسمح بنقل أكبر عدد ممكن من الطلبة؟

إذا كان من الضروري تخصيص الحفلات فإنه يجب أن لا تتجاوز حمولة الحافلة الكبيرة أكثر من 60 طالب، وحمولة الحافلة الصغيرة 25 طالب فما هو المسلك المخصص لكل حافلة؟.