مسائل النقل

يقصد بحل مسائل النقل إيجاد قيم متغيرات القرار x_{ij} المجهولة، لذلك فإن الأسلوب الرياضي لحل هذه المسائل يمر بمرحلتين أساسيتين هما: **إيجاد الحل الابتدائي الممكن** و التي تتضمن ثلاث طرق و هي: **طريقة الزاوية الشمالية الغربية ، طريقة التكاليف الدنيا ، طريقة فوجل التقريبية** ، ثم تحسين الحل الابتدائي في المرحلة الثانية وتتضمن هذه المرحلة هي الأخرى طريقتين هما: **طريقة المسار المتعرج** و **طريقة المؤشرين**.

1– المرحلة الأولى: تحديد الحل الابتدائي

1–1– طريقة الزاوية الشمالية الغربية *(Méthode du coin nord ouest)*: يقصد بها أول خانة في الجدول إلى الأعلى و إلى اليسار، و هي الخلية التي ينطلق منها إيجاد الحل الأساسي الأول، و يتم ذلك بإتباع المنهجية التالية و بالتطبيق على المثال التالي:

مثال: الجدول أدناه يقدم تكاليف النقل الوحدوية لنقل منتج معين من 03 مراكز إنتاج إلى 05 مراكز توزيع، بالإضافة إلى عرض كل مركز إنتاج و طلب كل مركز توزيع.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	A_i
O_1	100	800	100	500	400	240
O_2	500	500	300	600	700	160
O_3	200	900	500	900	800	260
b_i	120	130	145	125	140	660

المطلوب:1– انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكِّل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؛ وأكمل الحل؟

الحل:

- ❖ أول خلية موافقة لمركز الإنتاج الأول و مركز التوزيع الأول (أعلى إلى اليسار)، نجد أن طلب مركز التوزيع D_1 هو 120 وحدة، بينما حجم العرض O_1 هو 240 وحدة، فيحصل D_1 على كافة طلبه 120 وحدة من D_1، و يتشبع بذلك العمود الأول (D_1)، و يتبقى لمركز الإنتاج O_1 كمية تقدر بـ 120 وحدة.

❖ بالانتقال إلى الخلية المقابلة و الموافقة لمركز الإنتاج O_1، و مركز التوزيع D_2، تقدر الكمية المعروضة بـ 120 وحدة و هي الكمية المتبقية بعد التوزيع الأول، و حجم الطلب 130 وحدة، و عليه ستوجه كل الكمية المعروضة من O_1 إلى D_2، فيتشبع السطر الأول، و يبقى طلب D_2 هو 10 وحدات ينبغي على O_2 تلبيته، و هكذا. خطوات هذه الطريقة يلخصها الجدول أدناه:

حل مسألة النقل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	100 **120**	800 **120**	100 /	500 /	400 /	~~240~~ ~~120~~
O_2	500 /	500 **10**	300 **145**	600 **5**	700 /	~~160~~ ~~150~~ ~~5~~
O_3	200 /	900 /	500 /	900 **120**	800 **140**	~~260~~ ~~140~~
b_i	~~120~~	~~130~~ ~~10~~	~~145~~	~~125~~ ~~120~~	~~140~~	660

و بذلك نحصل على جدول الحل الأساسي الأول، و الذي نجد فيه:

$x_{11}=120$: أي أن O_1 يقوم بتموين D_1 بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـ 100 وحدة؛

$x_{12}=120$: أي أن O_1 يقوم بتموين D_2 بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـ 800 وحدة؛

$x_{22}=10$: أي أن O_2 يقوم بتموين D_2 بمقدار 10 وحدات بتكلفة تقدر بـ 500 وحدة؛

$x_{23}=145$: أي أن O_2 يقوم بتموين D_3 بمقدار 145 وحدة بتكلفة تقدر بـ 300 وحدة؛

$x_{24}=5$: أي أن O_2 يقوم بتموين D_4 بمقدار 5 وحدات بتكلفة تقدر بـ 600 وحدة؛

$x_{34}=120$: أي أن O_3 يقوم بتموين D_4 بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـ 900 وحدة؛

$x_{35}=140$: أي أن O_3 يقوم بتموين D_5 بمقدار 140 وحدة بتكلفة تقدر بـ 800 وحدة؛

❖ يتم حساب التكلفة الكلية وفق هذه الطريقة عن طريق ضرب قيمة التكلفة الوحدوية في كمية الإنتاج لكافة مراكز الإنتاج و التوزيع، أي:

$$Z=(100\times120)+(800\times120)+(500\times10)+(300\times145)+(600\times5)+(900\times120)+(800\times140)=379500$$

❖ عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (m)+عدد الأعمدة (n) $-$ **1**

2-1- طريقة التكاليف الدنيا *(Méthode du moindre coût)*:

تختلف هذه الطريقة عن سابقتها في إيجاد الحل الأساسي الأول، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ بتشبيع الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية أو الموالية و هكذا، حتى يتم استيفاء كل العرض والطلب، بحيث نحصل على عدد متغيرات داخلة في الحل يساوي ($m+n-1$).

و بالعودة إلى مثالنا السابق، يمكن تطبيق هذه الطريقة كما يلي:

- ❖ نلاحظ أن أدنى تكلفة في الجدول هي 100، أي إما نقل المنتج من المنبع الأول O_1 إلى المصب الأول D_1 أو من المنبع الأول O_1 إلى المصب الثالث D_3، و طريقة الاختيار هنا تعتمد على أكبر قدر من الطلب، فلو تمت مقارنة طلب كل من المصب الأول و الثاني، فإن المؤسسة حتما سوف تختار الطلب الأكبر لتصريف أكبر قدر من منتجاتها، لذلك يتم إشباع طلب المصب الثالث كليا من المنبع الأول؛
- ❖ أما التكلفة الموالية فهي 100، أي نقل المنتج من المنبع الأول O_1 إلى المصب الأول D_1 ، حيث يتم تزويده بـ 95 وحدة المتبقية من 240 وحدة بعد التوزيع، و بذلك يتشبع السطر الأول، أي أن الكمية المعروضة في المنبع الأول 0؛
- ❖ أما التكلفة الموالية فهي 200، و هي تكلفة نقل المنتج من المنبع الثالث O_3 إلى المصب الأول D_1 ، وهنا يتم تزويد هذا الأخير بـ 25 وحدة فقط و هي احتياجاته بعد حصوله على 95 وحدة من المنبع الأول، وبالتالي يتشبع العمود الأول، و هكذا يتم الانتقال بين الخلايا تصاعديا، كما في الجدول أدناه:

حل مسألة النقل بطريقة التكاليف الدنيا للمثال السابق

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	100 **95**	800 /	100 **145**	500 /	400 /	$\cancel{240}$ $\cancel{95}$
O_2	500 /	500 **130**	300 /	600 **30**	700 /	$\cancel{160}$ $\cancel{30}$
O_3	200 **25**	900 /	500 /	900 **95**	800 **140**	$\cancel{260}$ $\cancel{235}$ $\cancel{95}$
b_i	$\cancel{120}$ $\cancel{25}$	$\cancel{130}$	$\cancel{145}$	$\cancel{125}$ $\cancel{95}$	$\cancel{140}$	660

قيمة التكاليف وفق هذه الطريقة هي:

$$Z=(100\times 95)+(100\times 145)+(500\times 130)+(600\times 30)+(200\times 25)+(900\times 95)+(800\times 140)=309500$$

1-3- طريقة فوجل (*Méthode de Vogel*):

تعتبر طريقة فوجل التقريبية (طريقة الفروقات العظمى) من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة على الوصول للحل الأمثل أو الحل القريب من الأمثل، و نادرا ما تكون طريقة التكلفة الدنيا وطريقة الزاوية الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل، إلا أنها تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه الطريقتين السابقتين. وتتلخص خطوات إيجاد الحل الابتدائي لهذه الطريقة كما يلي:

- حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف و في كل عمود؛
- تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق التكلفة (أعلى جزاء)؛
- اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود؛
- في الخلية التي اختيرت في الخلية الثالثة، نقارن احتياجات المصب مع ما هو متوفر في المنبع لنأخذ القيمة الأقل؛
- نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة و الصفوف، و ذلك بعد إلغاء العمود أو السطر المشبع، و تكرر العملية السابقة إلى أن نلبي احتياجات كل المصبات من المنابع المتاحة.

و بالعودة إلى مثالنا السابق، سنقوم بتطبيق مراحل هذه الطريقة، وفق المراحل التالية:

- نقوم بحساب الفرق بين أدنى تكلفتين على مستوى جميع الأسطر و الأعمدة فنحصل على القيم: (100-100=0، 300-500=200، 500-200=300) على مستوى الأسطر الثلاث، ونحصل على القيم: (200-100=100، 800-500=300، 300-100=200، 600-500=100، 700-400=300) على مستوى الأعمدة؛
- نقوم باختيار أكبر فرق بين الأعمدة و الأسطر، نلاحظ في هذا المثال أن 300 هي أكبر فرق و قد تكررت في السطر الأخير و العمودين الثاني و الخامس، و هنا يتم اختيار أكبر فرق بينها و الذي يوافق أدنى تكلفة، و هو السطر الثالث و الذي يوافق 200 التي تعبر عن أدنى تكلفة في الجدول؛
- تعبر الخلية 200 عن تكلفة تزويد المصب الأول بالمنتج من المنبع الثالث، لذلك يتم تزويد طلبه المتمثل في 120 وحدة من 260 وحدة (عرض المنبع الثالث)، و بذلك يتم إشباع المصب الأول (العمود الأول)، و يتبقى للمنبع الثالث كمية معروضة تقدر بـ 140 وحدة؛

❖ و هكذا يتم إلغاء العمود الأول من جدول النقل لكونه مشبعا، و يتم تحيين (*actualisation*) الجدول بإعادة حساب الفرق بين التكاليف المتبقية، فنحصل على القيم: 300، 200، 300 في الأسطر الثلاث، و تبقى القيم: 300، 200، 100، 300 في الأعمدة الأربعة المتبقية، نقوم باختيار أكبر فرق (300) و الذي يوافق أدنى تكلفة (100)؛

❖ تمثل الخلية 100 عن تكلفة نقل المنتجات من المنبع الأول إلى المصب الثالث، لذلك يتم تزويد هذا الأخير بكل طلبه المتمثل في 145 وحدة من أصل 240 وحدة معروضة لدى المنبع الأول، و هكذا يتم إشباع العمود الثاني، و إلغاؤه، و يبقى للمنبع الأول كمية معروض تقدر بـ 95وحدة؛

❖ و بإتباع نفس الخطوات في كل مرة، نحصل على النتائج المبينة في الجدول أدناه:

حل مسألة النقل بطريقة فوجل للمثال السابق

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i	الفرق
O_1	100 /	800 /	100 **145**	500 /	400 **95**	~~240~~ ~~95~~	0 300 100
O_2	500 /	500 **130**	300 /	600 **30**	700 /	~~160~~ ~~30~~	200 200 100
O_3	200 **120**	900 /	500 /	900 **95**	800 **45**	~~260~~ ~~140~~	300 300 100
b_i	~~120~~	~~130~~	~~145~~	~~125~~ ~~95~~	~~140~~ ~~45~~	660	
الفرق	100	300 400	200	100 300	300 100		

المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال

انطلاقا من الجدول أعلاه أنه تم ملئ جميع الخانات، لذلك نتوقف عن تطبيق طريقة *Vogel*، و عليه تم الحصول على حل الأساس المقبول:

– **متغيرات الأساس الموجبة:** و عددها 07= ($m+n-1$)

$x_{13}=145, \quad x_{15}=95, \quad x_{22}=130, \quad x_{24}=30, \quad x_{31}=120, \quad x_{34}=95, \quad x_{35}=45$

– **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** و تمثل باقي متغيرات القرار.

بعدها نقوم بتعويض قيم متغيرات القرار على مستوى القيود الوظيفية للتحقق منها.

و بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف نقوم أيضا بتعويض قيم متغيرات القرار في دالة هدف نموذج النقل، فنحصل على:

$$Z = 100\,(0)+800\,(0)+100\,(145)+500\,(0)+400\,(95)+500\,(0)+500\,(130)+300\,(0)+600\,(30)+700\,(0)+200\,(120)+900\,(0)+500\,(0)+900\,(95)+800\,(45)=281000$$

قيمة دالة الهدف المحصل عليها باستخدام طريقة *Vogel* (281000) أقل من التكلفة الإجمالية للنقل المحصل عليها بطريقة التكاليف الدنيا (309500)، و أقل أيضا من التكلفة الإجمالية المحصل عليها بطريقة الزاوية الشمالية الغربية (379500).

ملاحظة: في حالة النموذج غير المتوازن أي في حالة عدم تساوي العرض و الطلب فإنه تتم إضافة الكمية المعروضة (في حالة العرض أقل من الطلب) في سطر جديد بتكاليف معدومة، أو إضافة الكمية المطلوبة في عمود جديد (في حالة الطلب أقل من العرض) في عمود جديد بتكاليف معدومة.

2- المرحلة الثانية: تحسين الحل الابتدائي

و يتم تحسين الحل الابتدائي بطريقتين: طريقة **المسار المتعرج ، أو طريقة المؤشرين**

2-1- طريقة المسار المتعرج: يتم في هذه الطريقة اختبار الخلايا الفارغة الموجودة في مصفوفة الحل الابتدائي الذي تم التوصل إليه بإحدى الطرق السابقة، و المقصود بالخلايا الفارغة تلك المربعات الموجودة في المصفوفة والتي لم يتم النقل إليها، أي التي تحتوي على $x_{ij} = 0$، و يمكن تلخيص هذه الطريقة في الخطوات التالية:

- يتم تحديد و رسم مسارات الخلايا الفارغة؛
- يتم حساب القيم الجبرية للخلايا الفارغة؛
- يتم اختيار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الجبرية الأشد سلبية و تتم دراسة مسارها، و ذلك بأخذ مسار مغلق (إشارته بالتناوب +، −، + ...) و يتم اختيار أصغر قيمة من بين الزوايا التي تحمل الإشارة (−)؛
- تكرر هذه العمليات إلى غاية الوصول إلى قيم جبرية للخلايا تكون موجبة أو مساوية للصفر و الذي يعني الوصول إلى الحل الأمثل.

ملاحظة: المسار ينطلق من الخلية الفارغة مرورا بالخلايا المملوءة و بخطوط مستقيمة مشكلة زوايا قائمة وصولا إلى نفس الخلية.

مثال 02: ليكن لدينا نموذج النقل التالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 x_{11}	5 x_{12}	3 x_{13}	1 x_{14}	90
O_2	3 x_{21}	1 x_{22}	2 x_{23}	4 x_{24}	80
O_3	4 x_{31}	2 x_{32}	1 x_{33}	5 x_{34}	70
b_i	40	50	110	40	240

أولا: سنقوم بحل هذا المثال باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية للحصول على الحل الابتدائي و من ثم تحسين الحل باستخدام المسار المتعرج.

حل مسألة النقل باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية للمثال 02

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 50	3 /	1 /	90 50 0
O_2	3 /	1 /	2 80	4 /	80 0
O_3	4 /	2 /	1 30	5 40	70 40 0
b_i	40 0	50 0	110 30 0	40 0	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\ (40)+5\ (50)+2\ (80)+1\ (30)+5\ (40) = 720$$

ثانيا: سنقوم بتحسين الحل الابتدائي، و لكن قبل ذلك ينبغي علينا التأكد من عدد الخلايا المملوءة.

عدد الخلايا المملوءة يساوي 5، و هذا لا يساوي 6=1−3+4= $(m+n-1)$، لهذا نضيف لخلية مملوءة كمية معدومة مساوية للصفر، كما يلي:

حل مسألة النقل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال 02

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2: 40	5: 50	3: /	1: /	90
O_2	3: /	1: 0	2: 80	4: /	80
O_3	4: /	2: /	1: 30	5: 40	70
b_i	40	50	110	40	240

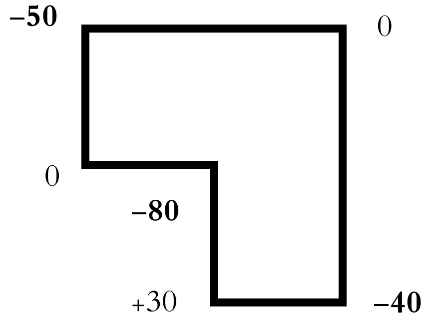
و بذلك نتحصل على خلايا 6 خلايا غير مملوءة يتم حساب قيمها الجبرية كما يلي:

حل مسألة النقل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال 02

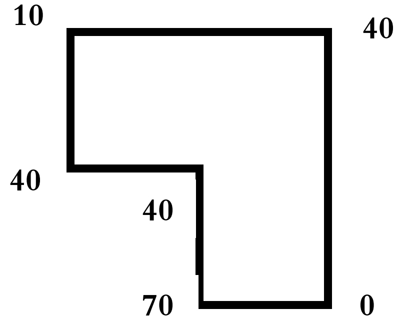
	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2: 40	5: 50	3: /	1: /	90
O_2	3: /	1: 0	2: 80	4: /	80
O_3	4: /	2: /	1: 30	5: 40	70
b_i	40	50	110	40	240

$$x_{13} = 3 - 5 + 1 - 2 = -3$$
$$x_{14} = 1 - 5 + 1 - 2 + 1 - 5 = -9$$
$$x_{21} = 3 - 2 + 5 - 1 = 5$$
$$x_{24} = 4 - 5 + 1 - 2 = -2$$
$$x_{31} = 4 - 2 + 5 - 1 + 2 - 1 = 7$$
$$x_{32} = 2 - 1 + 2 - 1 = 2$$

بالنظر إلى القيم الجبرية نلاحظ أن الخلية x_{14} هي الأشد سالبية حيث تمكّن من تخفيض التكاليف بمقدار 9 لكل وحدة منقولة عبرها، و بالتالي سندرس مسارها:



بما أن أقل كمية هي 40=$(min : 40, 80, 50)$، إذا ستأخذ الخلية x_{14} الفارغة هذه القيمة و يصبح المسار كالتالي:



و عليه يصبح جدول النقل كالتالي:

تحسين الحل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال 02

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 10	3 /	1 /	90
O_2	3 /	1 40	2 80	4 /	80
O_3	4 /	2 /	1 70	5 0	70
b_i	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\,(40) + 5\,(10) + 1\,(40) + 1\,(80) + 1\,(70) + 5\,(0) = 360$$

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 360 وحدة نقدية ($720 - 360 = 360$).

يتم تكرار العملية السابقة لاختيار الخلايا الفارغة بعد التأكد من أن عدد الخلايا المملوءة هي: ($m+n-1$)

$$x_{13} = 3 - 5 + 1 - 2 = -3$$

$$x_{21} = 3 - 2 + 5 - 1 = 5$$

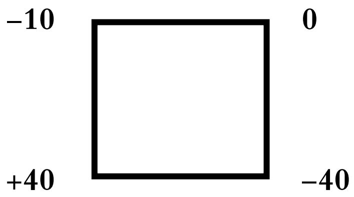
$$x_{24} = 4 - 1 + 5 - 1 = 7$$

$$x_{31} = 4 - 1 + 2 - 1 + 5 - 2 = 7$$

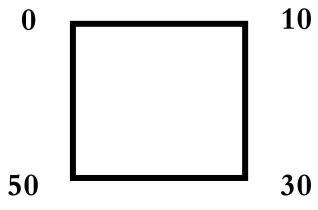
$$x_{32} = 2 - 1 + 2 - 1 = 2$$

$$x_{34} = 5 - 1 + 5 - 1 + 2 - 1 = 9$$

نلاحظ أن الخلية x_{13} ستساهم في تخفيض التكاليف بمقدار (-3) لكل وحدة منقولة، و عليه يجب دراسة مسارها.



بما أن أقل قيمة هي $10 = (min : 40, 10)$، إذا ستأخذ الخلية الفارغة x_{13} هذه القيمة و يصبح المسار كالتالي:



و عليه يصبح جدول النقل كالتالي:

تحسين الحل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال 02

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 / 40	5 / ⁄	3 / 10	1 / 40	90
O_2	3 / ⁄	1 / 50	2 / 30	4 / ⁄	80
O_3	4 / ⁄	2 / ⁄	1 / 70	5 / ⁄	70
b_i	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\,(40)+5\,(10)+3\,(10)+1\,(40)+1\,(50)+2\,(30)+1\,(70) = 330$$

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 30 وحدة نقدية (360 – 330 = 30).

يتم تكرار العملية السابقة لاختيار الخلايا الفارغة بعد التأكد من أن عدد الخلايا المملوءة هي: $(m+n-1)$

$$x_{12} = 5 - 3 + 2 - 1 = 3$$
$$x_{21} = 3 - 2 + 3 - 2 = 2$$
$$x_{24} = 4 - 1 + 3 - 1 = 4$$
$$x_{31} = 4 - 1 + 3 - 2 = 4$$
$$x_{32} = 2 - 1 + 2 - 1 = 2$$
$$x_{34} = 5 - 1 + 3 - 1 = 6$$

نلاحظ أن جميع القيم الجبرية موجبة، مما يعني أن الحل المتوصل إليه هو الحل الأمثل، و عليه فإن تكلفة النقل في هذه الحالة تساوي 330 و.ن.

2-2- طريقة المؤشرين (التوزيع المعدل): تستخدم هذه الطريقة لاختبار أمثلية الحل الأولي، و هي أكفأ من سابقتها، و التي تعتمد على تكوين مسارات مغلقة للمتغيرات غير الأساسية و من ثم إيجاد المتغير غير الأساسي

الذي يساهم في تقليل مجموع تكاليف النقل، أما هذه الطريقة فهي قادرة على تحديد المتغير غير الأساسي الذي يساهم في تقليل مجموع تكاليف النقل مباشرة، و تتلخص هذه الطريقة فيما يلي:

- ❖ نرمز لكل سطر (الوحدة الإنتاجية) بالرمز U_i، و نرمز لكل عمود (مركز التوزيع) بالرمز V_j؛
- ❖ كل متغيرة أساسية (الخلايا المملوءة) في جدول النقل تكتب بصيغة المعادلة التالية:

$$C_{ij} = U_i + V_i \quad \text{مع} \quad U_i=0$$

- ❖ كل متغيرة غير أساسية (الخلايا الفارغة) في جدول النقل تكتب بصيغة المعادلة التالية:

$$C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$$

و المطلوب تحديد قيم المجاهيل U_i و V_i.

- ❖ نختار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الجبرية الأشد سالبية و تتم دراسة مسارها وفقا للقاعدة المعروفة في الطريقة السابقة؛
- ❖ يتم تكرار هذه العملية إلى غاية الوصول إلى قيم جبرية موجبة أو معدومة.

بأخذ نفس المثال السابق، و بعد الوصول إلى الحل المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، سنقوم بتحسينه بالاعتماد على طريقة عوامل الضرب، بدءً بتحديد معادلتي الخلايا المملوءة و الخلايا الفارغة.

أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $U_i=0$ مع $C_{ij} = U_i + V_i$

$$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow 2 = 0 + V_1 \Rightarrow \boldsymbol{V_1 = 2}$$
$$C_{12} = U_1 + V_2 \Rightarrow 5 = 0 + V_2 \Rightarrow \boldsymbol{V_2 = 5}$$
$$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow 1 = U_2 + 5 \Rightarrow \boldsymbol{U_2 = -4}$$
$$C_{23} = U_2 + V_3 \Rightarrow 2 = -4 + V_3 \Rightarrow \boldsymbol{V_3 = 6}$$
$$C_{33} = U_3 + V_3 \Rightarrow 1 = U_3 + 6 \Rightarrow \boldsymbol{U_3 = -5}$$
$$C_{34} = U_3 + V_4 \Rightarrow 5 = -5 + V_4 \Rightarrow \boldsymbol{V_4 = 10}$$

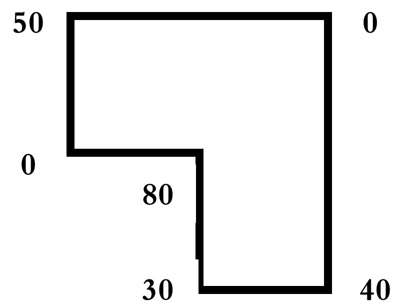
ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$

$$C'_{13} = C_{13} - V_3 - U_1 \Rightarrow C'_{13} = 3 - 6 - 0 \Rightarrow \boldsymbol{C'_{13} = -3}$$
$$C'_{14} = C_{14} - V_4 - U_1 \Rightarrow C'_{14} = 1 - 10 - 0 \Rightarrow \boldsymbol{C'_{14} = -9}$$
$$C'_{21} = C_{21} - V_1 - U_2 \Rightarrow C'_{21} = 3 - 2 - (-4) \Rightarrow \boldsymbol{C'_{21} = 5}$$
$$C'_{24} = C_{24} - V_4 - U_2 \Rightarrow C'_{24} = 4 - 10 - (-4) \Rightarrow \boldsymbol{C'_{24} = -2}$$

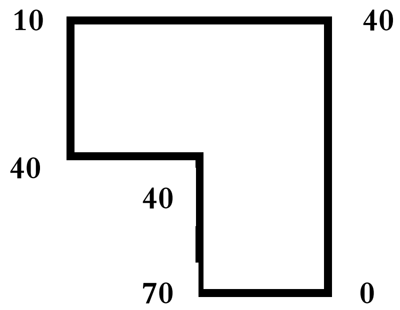
$$C'_{31} = C_{31} - V_1 - U_3 \Rightarrow C'_{31} = 4 - 2 - (-5) \Rightarrow \mathbf{C'_{31} = 7}$$

$$C'_{32} = C_{32} - V_2 - U_3 \Rightarrow C'_{32} = 2 - 5 - (-5) \Rightarrow \mathbf{C'_{32} = 2}$$

يتم اختيار الخلية $\boldsymbol{x_{14}}$ لأنها تتحمل القيمة الجبرية الأشد سالبية، لذلك ندرس مسارها بنفس الطريقة السابقة:



بما أن أقل قيمة هي 40 =$(min : 40, 80, 50)$، إذا ستأخذ الخلية الفارغة $\boldsymbol{x_{14}}$ هذه القيمة و يصبح المسار كالتالي:



ليصبح جدول النقل كالتالي:

تحسين الحل باستخدام طريقة عوامل الضرب للمثال 02

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(2) 40	(5) 10	(3) /	(1) /	90
O_2	(3) /	(1) 40	(2) 40	(4) /	80
O_3	(4) /	(2) /	(1) 70	(5) 0	70
b_i	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\,(40) + 5\,(10) + 2\,(40) + 1\,(70) + 5\,(0) = 360$$

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 360 وحدة نقدية (720 – 360 = 360).

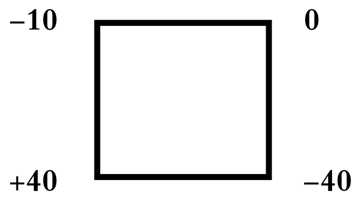
أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $U_i=0$ مع $C_{ij} = U_i + V_i$

$$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow 2 = 0 + V_1 \Rightarrow \boldsymbol{V_1 = 2}$$
$$C_{12} = U_1 + V_2 \Rightarrow 5 = 0 + V_2 \Rightarrow \boldsymbol{V_2 = 5}$$
$$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow 1 = U_2 + 5 \Rightarrow \boldsymbol{U_2 = -4}$$
$$C_{23} = U_2 + V_3 \Rightarrow 2 = -4 + V_3 \Rightarrow \boldsymbol{V_3 = 6}$$
$$C_{33} = U_3 + V_3 \Rightarrow 1 = U_3 + 6 \Rightarrow \boldsymbol{U_3 = -5}$$
$$C_{14} = U_1 + V_4 \Rightarrow 1 = 0 + V_4 \Rightarrow \boldsymbol{V_4 = 1}$$

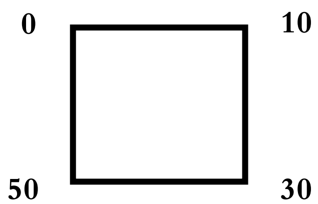
ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$

$$C'_{13} = C_{13} - V_3 - U_1 \Rightarrow C'_{13} = 3 - 6 - 0 \Rightarrow \boldsymbol{C'_{13} = -3}$$
$$C'_{21} = C_{21} - V_1 - U_2 \Rightarrow C'_{21} = 3 - 2 - (-4) \Rightarrow \boldsymbol{C'_{21} = 5}$$
$$C'_{24} = C_{24} - V_4 - U_2 \Rightarrow C'_{24} = 4 - 1 - (-4) \Rightarrow \boldsymbol{C'_{24} = 7}$$
$$C'_{31} = C_{31} - V_1 - U_3 \Rightarrow C'_{31} = 4 - 2 - (-5) \Rightarrow \boldsymbol{C'_{31} = 7}$$
$$C'_{32} = C_{32} - V_2 - U_3 \Rightarrow C'_{32} = 2 - 5 - (-5) \Rightarrow \boldsymbol{C'_{32} = 2}$$
$$C'_{34} = C_{34} - V_4 - U_3 \Rightarrow C'_{34} = 5 - 1 - (-5) \Rightarrow \boldsymbol{C'_{34} = 9}$$

الحل المتوصل إليه ليس أمثلا، لذا نختار الخلية الأشد سالبية و هي الخلية $\boldsymbol{x_{13}}$ و التي تتم دراسة مسارها:



بما أن أقل قيمة هي 10=(min : 10, 40)، إذا ستأخذ الخلية الفارغة $\boldsymbol{x_{13}}$ هذه القيمة و يصبح المسار كالتالي:



و عليه يصبح جدول النقل كالتالي:

تحسين الحل باستخدام طريقة عوامل الضرب للمثال 02

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 / 40	5 / ⁄	3 / 10	1 / 40	90
O_2	3 / ⁄	1 / 50	2 / 30	4 / ⁄	80
O_3	4 / ⁄	2 / ⁄	1 / 70	5 / ⁄	70
b_i	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\,(40) + 5\,(10) + 3\,(10) + 1\,(40) + 1\,(50) + 2\,(30) + 1\,(70) = 330$$

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 30 وحدة نقدية (360 – 330 = 30).

أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $U_i = 0$ مع $C_{ij} = U_i + V_i$

$$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow 2 = 0 + V_1 \Rightarrow \boldsymbol{V_1 = 2}$$
$$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow 1 = -1 + V_2 \Rightarrow \boldsymbol{V_2 = 2}$$
$$C_{23} = U_2 + V_3 \Rightarrow 2 = U_2 + 3 \Rightarrow \boldsymbol{U_2 = -1}$$
$$C_{33} = U_3 + V_3 \Rightarrow 1 = U_3 + 3 \Rightarrow \boldsymbol{U_3 = -2}$$
$$C_{14} = U_1 + V_4 \Rightarrow 1 = 0 + V_4 \Rightarrow \boldsymbol{V_4 = 1}$$
$$C_{13} = U_1 + V_3 \Rightarrow 3 = 0 + V_3 \Rightarrow \boldsymbol{V_3 = 3}$$

ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$

$$C'_{12} = C_{12} - V_2 - U_1 \Rightarrow C'_{12} = 5 - 2 - 0 \Rightarrow \boldsymbol{C'_{12} = 3}$$
$$C'_{21} = C_{21} - V_1 - U_2 \Rightarrow C'_{21} = 3 - 2 - (-1) \Rightarrow \boldsymbol{C'_{21} = 2}$$
$$C'_{24} = C_{24} - V_4 - U_2 \Rightarrow C'_{24} = 4 - 1 - (-1) \Rightarrow \boldsymbol{C'_{24} = 4}$$
$$C'_{31} = C_{31} - V_1 - U_3 \Rightarrow C'_{31} = 4 - 2 - (-2) \Rightarrow \boldsymbol{C'_{31} = 4}$$
$$C'_{32} = C_{32} - V_2 - U_3 \Rightarrow C'_{32} = 2 - 2 - (-2) \Rightarrow \boldsymbol{C'_{32} = 2}$$
$$C'_{34} = C_{34} - V_4 - U_3 \Rightarrow C'_{34} = 5 - 1 - (-2) \Rightarrow \boldsymbol{C'_{34} = 6}$$

نلاحظ أن جميع القيم الجبرية للخلايا الفارغة موجبة، مما يعني الوصول إلى الحل الأمثل، و عليه فإن تكلفة النقل المحصل عليها تساوي 330 و.ن.

3– ملخص خوارزمية حل مسائل النقل: يمكن تلخيص خوارزمية حل مسائل النقل في الخطوات التالية:

3–1– بناء جدول الحل الأساسي الأول بحيث:

– تظهر فيه تكاليف النقل من كل منبع إلى كل مصب؛

– كميات عرض كل منبع، و كميات طلب كل مصب، بحيث يتساوى مجموع العرض مع مجموع الطلب؛

3–2– إيجاد الحل الأساسي الأول، بإحدى الطرق: الزاوية الشمالية الغربية، التكاليف الدنيا أو طريقة فوجل.

– يجب أن يكون عدد الخلايا الداخلة في الحل محققا للشرط $m+n\text{-}1$.

3–3– نختبر الحل إذا كان أمثلا أم لا، و ذلك إما بطريقة المسار المتعرج أو طريقة التوزيع المعدل؛

– نكون أمام الحل الأمثل إذا كان كل: $C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i \geq 0$؛

– إذا كان الحل غير أمثل فنقوم بتحسينه، ثم نعود من جديد للخطوة السابقة، أما إن كان أمثلا فنقوم بشرحه.

4– مسائل النقل في حالة التعظيم:

لا تقتصر استخدامات مسائل النقل على حالة التدنية، و إنما يتعدى ذلك إلى حالة التعظيم أيضا و هي الحالة التي يتم فيها البحث عن أعظم ربح أو عائد في وجود نفس الشروط، فيتم استبدال تكاليف نقل الوحدة الواحدة بالربح المحصل عليه من نقل الوحدة الواحدة. و تختلف هذه الحالة عن سابقتها في النقاط التالية:

– عند استخدام طريقة التكلفة كان يتم اختيار أقل تكلفة بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة الأرباح فيتم اختيار أكبر خلية في الجدول لنبدأ الحل بها، و تسمى هذه الطريقة بطريقة تعظيم الأرباح؛

– عند استخدام طريقة فوجل التقريبية كان يتم حساب الفرق بين أصغر تكلفتين لكل سطر و عمود و ذلك بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة التعظيم فيتم حساب الفرق بين أكبر رقمين لكل سطر و عمود و يلي ذلك اختيار أكبر فرق، ليتم بعدها تحديد الخلية الكبرى؛

– عند استخدام طرق تحسين الحل يتم تقييم و اختيار الخلية التي تحمل أكبر قيمة موجبة؛

– الحل الأمثل يكون عند الحصول على قيم جبرية سالبة أو معدومة للخلايا الفارغة.

مثال 03: لتكن لدينا المعطيات التالية عن مؤسسة إنتاجية، تحتوي على 3 مصانع و 3 مخازن:

المصانع	عدد الوحدات	تكلفة الإنتاج	تكلفة النقل		
			D_1	D_2	D_3
O_1	2000	200	60	80	50
O_2	2500	280	100	30	100
O_3	1800	300	80	120	70

إذا كان عدد الوحدات المطلوبة للمخازن هو على التوالي كالتالي: 1600، 2400 و 2000 وحدة، و إذا كان السعر الوحدوي في المخازن الثلاث هو على التوالي كالتالي: 450 و.ن، 240 و.ن، 400 و.ن.

المطلوب: تحديد عدد الوحدات الواجب نقلها من كل مصنع إلى كل مخزن بشرط تحقيق أعظم ربح.

4-1- تشكيل جدول النقل:

تشكيل جدول النقل للمثال 03

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	**2000**
O_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	**2500**
O_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	**1800**
b_i	**1600**	**2400**	**2000**	**6300** / **6000**

ما يلاحظ من الجدول أعلاه أن النموذج غير متوازن، ما يستوجب إضافة عمود آخر وهمي للطلب، فيصبح جدول النقل كالتالي:

تشكيل جدول النقل للمثال03

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	0	2000
O_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	0	2500
O_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	0	1800
b_i	1600	2400	2000	300	6300 / 6300

بما أننا في هذه الحالة بصدد تعظيم الأرباح فسنقوم بحساب الأرباح الوحدوية و التي نرمز لها بالرمز p_{ij} حيث:

الربح = سعر البيع الوحدوي – التكاليف الوحدوية الكلية (و في حالة وجود خسارة تُشطب الخلية)؛

التكاليف الوحدوية الكلية = تكاليف الإنتاج الوحدوية + تكاليف النقل الوحدوية.

التكاليف الوحدوية الكلية:

O_1 ((2
O_2 (28
O_3 (3

الربح الوحدوي:

D_1 ((45
D_2 (45
D_3 (45

و عليه يصبح جدول النقل كالتالي:

تشكيل جدول النقل للمثال 03

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	190	140	150	0	2000
O_2	70	110	20	0	2500
O_3	70	0	30	0	1800
b_i	1600	2400	2000	300	6300 / 6300

4–2- إيجاد الحل الابتدائي الأساس باستخدام طريقة الربح الأعظم:

الحل الابتدائي الأساس باستخدام طريقة الربح الأعظم للمثال 03

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	190 1600	140 /	150 400	0 /	~~2000~~ ~~400~~ 0
O_2	70 /	110 2400	20 /	0 100	~~2500~~ ~~100~~ 0
O_3	70 /	0 /	30 1600	0 200	~~1800~~ ~~200~~ 0
b_i	~~1600~~	~~2400~~	~~2000~~ ~~1600~~ 0	~~300~~ ~~100~~ 0	6300 / 6300

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 190\,(1600) + 150\,(400) + 110\,(2400) + 0\,(100) + 30\,(1600) + 0\,(200) = 676000$$

عدد الخلايا المملوءة $6 = m+n-1$.

4-3- تحسين الحل الابتدائي (استخدام طريقة المسار الحرج):

تحديد الخلايا الفارغة: x_{12} , x_{14} , x_{21} , x_{23} , x_{31} , x_{32}

حساب القيم الفارغة للخلايا الفارغة:

$$x_{12} = 140 - 150 + 30 - 0 + 0 - 110 = -90$$
$$x_{14} = 0 - 0 + 30 - 150 = -120$$
$$x_{21} = 70 - 190 + 150 - 30 + 0 - 0 = 0$$
$$x_{23} = 20 - 30 + 0 - 0 = -10$$
$$x_{31} = 70 - 190 + 150 - 30 = 0$$
$$x_{32} = 0 - 110 + 0 - 0 = -110$$

نلاحظ أن جميع القيم الجبرية للخلايا الفارغة سالبة مما يعني الوصول إلى الحل الأمثل الذي يعظم الأرباح.