

Longé type Devoir à domicile

1/ Pour un régime permanent, le flux de chaleur transmise de l'eau vers la Tasse par la surface latérale est :

$$\phi = -2\pi r \cdot L \cdot \lambda \frac{dT}{dr} = \text{constante}$$

Pour obtenir ϕ on intègre l'équation précédente :

$$\phi \cdot \frac{dr}{r} = -2\pi \lambda L dT \Rightarrow \phi \cdot \int_R^{R+e} \frac{dr}{r} = -2\pi L \cdot \lambda \int_{T_0}^{T_1} dT$$

avec : T_0 : Température d'ébullition de l'eau

T_1 : température à la surface externe de la tasse

après intégration :

$$\phi = 2\pi L \lambda \frac{(T_0 - T_1)}{\ln(1 + \frac{e}{R})} \quad \dots (1)$$

ϕ est aussi égal au flux de chaleur transmise par convection vers le milieu ambiant dont la température est T_{∞}

$$\phi = 2\pi (R+e) \cdot L \cdot h_c (T_1 - T_{\infty}) \quad \dots (2)$$

En égalisant les deux équations (1) = (2) on trouve la relation suivante :

$$T_1 = \frac{\lambda T_0 + h_c R (1 + \frac{e}{R}) \ln(1 + \frac{e}{R}) T_{\infty}}{\lambda + h_c R (1 + \frac{e}{R}) \ln(1 + \frac{e}{R})} \quad \dots (3)$$

Comme $\frac{e}{R} \ll 1 \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{e}{R}\right) \approx \frac{e}{R}$

l'équation (3) devient :

$$T_1 = \frac{\lambda T_0 + h_c \cdot e T_\infty}{\lambda + h_c \cdot e}$$

$$\text{A.N.: } T_1 = \frac{1,05 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,25 \cdot 20}{1,05 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,25} \approx \boxed{91,5^\circ \text{C}}$$

2/ Calcul de e pour que $T_1 < T'_i = 50^\circ \text{C}$ c'est à dire :

$$\frac{\lambda T_0 + h_c \cdot e T_\infty}{\lambda + h_c \cdot e} < T'_i$$

il faut que l'épaisseur vérifie la relation :

$$e > \frac{\lambda (T_0 - T'_i)}{h_c (T'_i - T_\infty)}$$

$$\text{A.N.: } e > \frac{1,05 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{100 - 50}{50 - 20} \right) \Rightarrow e > \boxed{3,5 \text{ cm.}}$$