TD III: Résoudre les programmes linéaires suivants en utilisant la méthode du simplexe :

EXERCICE N° II

Résoudre les programmes linéaires suivants en utilisant la méthode du simplexe :

1. $X_1 \geq 0, X_1 \in IR$; $X_2 \geq 0, X_2 \in IR$

   $X_2 \leq 10$

   $10X_1 + X_2 \leq 70$

   $3X_1 + 2X_2 \leq 30$

   $Max(15X_1 + 5X_2)$

Pour le corrigé de cette série d’exercice , appliquer l’algorithme suivant :

<u>Résolution d’un programme linéaire par la méthode du Simplexe</u>

Soit P un programme linéaire présenté sous une forme Primal :

- $X \geq 0$ tel que X est le vecteur des variables principales $X=(X_1 , X_2,\ldots\ldots,X_n)$
- $AX \leq B$ tel que A(m,n) matrice des coefficients technologiques et $B=(b1,b_2,\ldots,bm)$ vecteur de la disponibilité avec $bi \geq 0 \ \forall i=1,m$
- Max(CX) avec $C=(C_1,C_2,\ldots\ldots,C_n)$ un vecteur cout

Algorithme du Simplexe

<u>Début</u>

Pas1 : Standardiser le PL sous forme standard par rapport à une base (nécessite l'ajout d'une variable d'écart pour chaque contrainte).

Pas 2 : Représenter le PL (FS/BASE) par les tableaux.

Pas 3 : Calculer ***s*** qui représente l'indice de la variable sortante tel que ***s*** = rang Max (vecteur Cout C_i).

Si $Ci \leq 0 \; \forall \; i = 1,n$ la solution optimale est atteinte alors Arrêt.

Pas 4 *:* r selon l'analyse de de A_i^s

si $(A_i^s > 0) = 0 \Rightarrow$ la fonction objective est non bornée Arrêt.

Sinon calculer r indice de la variable entrante tel que ***r*** = rang (Min(b_i / A_i^s) / $A_i^s > 0$)

Pas 5 : Pivotage selon la méthode de Gauss.

Pas 6 : Aller à Pas 3.

<u>Fin.</u>

$X_1 \geq 0, X_1 \in IR$; $X_2 \geq 0, X_2 \in IR$

$X_2 \leq 10$

$10X_1 + X_2 \leq 70$

$3X_1 + 2X_2 \leq 30$

$Max(15X_1 + 5X_2)$

Pas1 : Standardiser le PL sous forme standard par rapport à une base (nécessite l'ajout d'une variable d'écart pour chaque contrainte).

$X_1 \geq 0, X_1 \in IR$; $X_2 \geq 0, X_2 \in IR$; $e_1 \geq 0, e_1 \in IR$; $e_2 \geq 0, e_2 \in IR$; $e_3 \geq 0, e_3 \in IR$

$X_2 + e_1 = 10$

$10X_1 + X_2 + e_2 = 70$

$3X_1 + 2X_2 + e_3 = 30$

$Max(15X_1 + 5X_2 + 0\,e_1 + 0\,e_2 + 0\,e_3)$

Pas 2 : Représenter le PL (FS/BASE) par les tableaux.

$X_2 + e_1 = 10$

$10X_1 + X_2 + e_2 = 70$

$3X_1 + 2X_2 + e_3 = 30$

$Max(15X_1 + 5X_2 + 0\ e_1 + 0\ e_2 + 0\ e_3)$

	x1	x2	e1	e2	e3	b
e1	0	1	1	0	0	10
e2	10	1	0	1	0	70
e3	3	2	0	0	1	30
z	15	5	0	0	0	

Pas 3 : Calculer de la variable sortante = rang Max (vecteur Cout C_i).

Si $Ci \leq 0 \ \forall \ i = 1,n$ la solution optimale est atteinte alors Arrêt.

	x1	x2	e1	e2	e3	b	
e1	0	1	1	0	0	10	
e2	10	1	0	1	0	70	
e3	3	2	0	0	1	30	
z	15	5	0	0	0		

Max Z

Pas 4 : si ($B_i^s > 0$) = 0 $\Rightarrow$ la fonction objective est non bornée Arrêt.

de la variable entrante = rang (Min(b_i / B_i^s) / $B_i^s > 0$)

	x1	x2	e1	e2	e3	b	R
e1	0	1	1	0	0	10	
e2	$\boxed{10}$	1	0	1	0	70	7
e3	3	2	0	0	1	30	10
z	15	5	0	0	0		

Min R

Max Z

Pas 5 : Pivotage selon la méthode de Gauss.

	x1	x2	e1	e2	e3	b
e1	0		1		0	
x1	1	1/10	0	1/10	0	7
e3	0		0		1	
z	0		0		0	

Pas 5 : Pivotage selon la méthode de Gauss.

	x1	x2	e1	e2	e3	b
e1	0		1		0	
x1	1	1/10	0		0	7
e3	0		0		1	
z	0	=5-(15/10)	0		0	

Pas 5 : Pivotage selon la méthode de Gauss.

	x1	x2	E1	e2	e3	b
e1	0	1	1	0	0	10
x1	1	1/10	0	1/10	0	7
e3	0	17/10	0	-3/10	1	9
z	0	35/10	0	-15/10	0	-105

Pas 5 : Pivotage selon la méthode de Gauss.

	x1	x2	e1	e2	e3	b	R
e1	0	1	1	0	0	10	10
x1	1	1/10	0	1/10	0	7	70
e3	0	17/10	0	-3/10	1	9	90/17
z	0	35/10	0	-15/10	0	-105	

Min R

Max Z

Pas 6 : Aller à Pas 3.

T3	x1	x2	e1	e2	e3	b
e1	0	0	1			80/17
x1	1	0	0			110/17
x2	0	1	0	-3/17	10/17	90/17
z	0	0	0	-105/170	-15/17	-210/17

Pas 6 : Aller à Pas 3.

	x1	x2	e1	e2	e3	b
e1	0	0	1			80/17
x1	1	0	0			110/17
x2	0	1	0	-3/17	10/17	90/17
z	0	0	0	-105/170	-15/17	-210/17

$Z_i \leq 0 \ \forall \ i = 1, n$ la solution optimale est atteinte alors Arrêt

Z*=210/17
X*= (110/17,90/17,80/17,0,0)

TD IV: Résoudre le programme linéaire suivants en utilisant la méthode du dual simplexe :

Algorithme de la Méthode du Dual Simplexe

PAS 1 RENDRE (D) EN (D')

PAS 2 VERIFIER SI LE SECOND MEMBRE (D) EST $\geq$ 0

PAS 3 Indice (s) vecteur sortant est :

s = MIN(second membre(C) de (D')/ C < 0)

PAS4 Indice (r) vecteur rentrant est :

r=MIN($\frac{\text{vecteur coût(B)}}{A(s,j)}$ de (D') / $A(s,j)$ < 0)

PAS5 Pivot = A(s,r) ;

Pivotage selon la formule de GAUSS

PAS6 aller à **PAS2**

$$(P)\begin{cases} X \geq 0 \\ AX \leq B \\ MAX(Z) = CX \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} Y \geq 0 \\ Y^T A \geq C \\ MIN(W) = Y^T B \end{cases}$$

La forme canonique de (D) est :

$$(D')\begin{cases} Y \geq 0 \\ -Y^T A \leq -C \\ MAX(-W) = -Y^T B \end{cases}$$

$$(P)\begin{cases} X \geq 0 \\ AX \leq B \\ MAX(Z) = CX \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} Y \geq 0 \\ Y^T A \geq C \\ MIN(W) = Y^T B \end{cases}$$

La forme canonique de (D) est :

$$(D')\begin{cases} Y \geq 0 \\ -Y^T A \leq -C \\ MAX(-W) = -Y^T B \end{cases}$$

EXERCICE N:

Résoudre les programmes linéaires suivants en utilisant la méthode du dual simplexe :

$x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

$4\,x_1 \quad + 8\,x_2 \geq 5$

$4\,x_1 \quad + 6\,x_2 \geq 1$

$4\,x_1 \quad + 4\,x_2 \geq 6$

$x_1 \quad + 3\,x_2 \geq 2$

$\text{Min}(w) = \ (24\,x_1 \quad +36\,x_2)$

Pas1 : Rendre (D) en (D') et Standardiser le PL sous forme standard par rapport à une base (nécessite l'ajout d'une variable d'écart pour chaque contrainte).

D:

$x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

$4\,x_1 + 8\,x_2 \geq 5$

$4\,x_1 + 6\,x_2 \geq 1$

$4\,x_1 + 4\,x_2 \geq 6$

$x_1 + 3\,x_2 \geq 2$

$\text{Min}(w) = (24\,x_1 + 36\,x_2)$

D':

$x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

$-4\,x_1 - 8\,x_2 \leq -5$

$-4\,x_1 - 6\,x_2 \leq -1$

$-4\,x_1 - 4\,x_2 \leq -6$

$-x_1 - 3\,x_2 \leq -2$

$\text{Max}(-w) = (-24\,x_1 - 36\,x_2)$

$X_1 \geq 0, X_1 \in IR$; $X_2 \geq 0, X_2 \in IR$; $e_1 \geq 0, e_1 \in IR$; $e_2 \geq 0, e_2 \in IR$; $e_3 \geq 0, e_3 \in IR$

$-4\,x_1 - 8\,x_2 + e_1 = -5$

$-4\,x_1 - 6\,x_2 + e_2 = -1$

$-4\,x_1 - 4\,x_2 + e_3 = -6$

$-x_1 - 3\,x_2 + e_4 = -2$

$\text{Max}\,(-24X_1 - 36X_2 + 0\,e_1 + 0\,e_2 + 0\,e_3 + 0\,e_4)$

Représenter le PL (FS/BASE) par les tableaux.

$-4\,x_1 \quad - 8\,x_2 + e_1 = -5$

$-4\,x_1 \quad - 6\,x_2 + e_2 = -1$

$-4\,x_1 \quad - 4\,x_2 + e_3 = -6$

$-x_1 \quad - 3\,x_2 + e_4 = -2$

Max $(-24X_1 - 36X_2 + 0\,e_1 + 0\,e_2 + 0\,e_3 + 0\,e_4)$

	x1	x2	e1	e2	e3	e4	b
e1	-4	-8	1	0	0	0	-5
e2	-4	-6	0	1	0	0	-1
e3	-4	-4	0	0	1	0	-6
e4	-1	-3	0	0	0	1	-2
z	-24	-36	0	0	0	0	

PAS 3 Indice (s) vecteur sortant est :

s = MIN(second membre(C) de (D')/ C < 0)

	x1	x2	e1	e2	e3	e4	b
e1	-4	-8	1	0	0	0	-5
e2	-4	-6	0	1	0	0	-1
e3	-4	-4	0	0	1	0	-6
e4	-1	-3	0	0	0	1	-2
z	-24	-36	0	0	0	0	

Min b (-5,-1,-6,-2)

PAS4 Indice (r) vecteur rentrant est :

$$r=\text{MIN}\left(\frac{\text{vecteur coût}(B)}{A(s,j)} \text{ de } (D') \, / \, A(s,j) < 0\right)$$

	x1	x2	e1	e2	e3	e4	b	
e1	-4	-8	1	0	0	0	-5	
e2	-4	-6	0	1	0	0	-1	
e3	-4	-4	0	0	1	0	-6	**Min b**
e4	-1	-3	0	0	0	1	-2	
z	-24	-36	0	0	0	0		

Min C/A(s,j): Min(-24/-4,-36/-4)=

PAS5 Pivot = A(s,r) ;

Pivotage selon la formule de GAUSS

	x1	x2	e1	e2	e3	e4	b
e1	-4	-8	1	0	0	0	-5
e2	-4	-6	0	1	0	0	-1
e3	-4	-4	0	0	1	0	-6
e4	-1	-3	0	0	0	1	-2
z	-24	-36	0	0	0	0	

PAS5 Pivot = A(s,r) ;

Pivotage selon la formule de GAUSS

	x1	x2	e1	e2	e3	e4	b
e1	0		1	0		0	
e2	0		0	1		0	
x1	1	1	0	0	0	0	6/4
e4	0		0	0		1	
z	0		0	0		0	

PAS5 Pivot = A(s,r) ;

Pivotage selon la formule de GAUSS

	x1	x2	e1	e2	e3	e4	b
e1	0	-4	1	0	-1	0	1
e2	0	-2	0	1	-1	0	7
x1	1	1	0	0	0	0	6/4
e4	0	-11/4	0	0	-1/4	1	-1/2
z	0	-12	0	0	-6	0	36

PAS5 Pivot = A(s,r) ;

Pivotage selon la formule de GAUSS

	x1	x2	e1	e2	e3	e4	b
e1	0	-4	1	0	-1	0	1
e2	0	-2	0	1	-1	0	7
x1	1	1	0	0	0	0	6/4
e4	0	-11/4	0	0	-1/4	1	-1/2
z	0	-12	0	0	-6	0	36

PAS5 Pivot = A(s,r) ;

Pivotage selon la formule de GAUSS

	x1	x2	e1	e2	e3	e4	b
e1	0	0	1	0			19/11
e2	0	0	0	1			81/11
x1	1	0	0	0			29/22
x2	0	-1	0	0	1/11	-4/11	2/11
z	0	0	0	0			420/11

Pas 6 : Aller à Pas 3.

	x1	x2	e1	e2	e3	e4	b
e1	0	0	1	0			19/11
e2	0	0	0	1			81/11
x1	1	0	0	0			29/22
x2	0	-1	0	0	1/11	-4/11	2/11
z	0	0	0	0			420/11

$C_i \leq 0 \ \forall \ i = 1,n$ la solution optimale est atteinte alors Arrêt

Z*=420/11

X*= (29/22,2/11,19/11,81/11,0,0)

TD IV: Résoudre le programme linéaire suivants en utilisant la méthode du transposé :

La méthode de la transposé consiste a transposé le problème dual (D) et le rendre primal de manière que :

1. **La variable principale de P (primal) devienne une variable d'écart de D (Dual) et la variable d'écart de P devienne la variable principale de D .**

2. **Le vecteur coût de P (primal) devient le vecteur second membre de D (dual).**
3. **Le vecteur second membre de P (primal) devient Le vecteur coût de D (dual).**
4. **Le vecteur de base de P devient le vecteur hors base de D et vice versa.**

   Une fois la transformation de D en P est faite par l'application de ces sus 4 règles on applique le simplexe normal sauf que la lecture des résultats des variables se font d'une façon verticale (il faut lire les valeurs du vecteur hors base du primal)

Exemple d'applications de la méthode de la transposée :

Le dual **le primal par la transposée**

$$
D \begin{cases} X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0 \\ 3X_1 + 5X_2 \geq 12 \\ 4X1 + 7X2 \geq 18 \\ 2X1 + 6X2 \geq 24 \\ MIN(w) = 6X1 + 8X2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad P \begin{cases} y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0 \; ? \; y_3 \geq 0 \\ 3Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \quad 6 \\ 3Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \quad 6 \\ MAX(Z) = 12Y_1 + 18Y_2 + 24Y_3 \end{cases}
$$

On applique le simplexe normal sur la transposée P. une fois la solution optimale atteinte, il faut lire les résultats à partir du vecteur hors base de P (autrement dit verticale).

EXERCICE N:

Résoudre les programmes linéaires suivants en utilisant la méthode du transposé :

$x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

$4\,x_1 + 8\,x_2 \geq 5$

$4\,x_1 + 6\,x_2 \geq 1$

$4\,x_1 + 4\,x_2 \geq 6$

$x_1 + 3\,x_2 \geq 2$

$\mathrm{Min}(w) = (24\,x_1 + 36\,x_2)$

D

$x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

$4\,x_1 \quad + 8\,x_2 \geq 5$

$4\,x_1 \quad + 6\,x_2 \geq 1$

$4\,x_1 \quad + 4\,x_2 \geq 6$

$x_1 \quad + 3\,x_2 \geq 2$

$\text{Min}(w) = \quad (24\,x_1 \quad +36\,x_2\,)$

D'

$x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

$4\,y_1 \quad + 4y_{2+}\,4y_{3+}\,y_4 \leq 24$

$8\,y_1 \quad + 6y_{2+}\,4y_{3+3}\,y_4 \leq 36$

$\text{Max}(5y_1 \quad + 1y_{2+}\,6y_{3+2}\,y_4\,)$

T1	y1	y2	y3	y4	x1	x2	b
X1	4	4	4	1	1	0	24
X2	8	6	4	3	0	1	36
z	5	1	6	2	0	0	

on applique le simplexe normal

T1	y1	y2	y3	y4	x1	x2	b	R
X1	4	4	4	1	1	0	24	6
X2	8	6	4	3	0	1	36	9
z	5	1	6	2	0	0		

Min R

Max Z

T2	y1	y2	y3	y4	x1	x2	b
y3	1	1	1	1/4	¼	0	6
X2	4	2	0	2	-1	1	12
z	-1	-5	0	1/2	-6/4	0	-36

T2	y1	y2	y3	y4	x1	x2	b	R
y3	1	1	1	1/4	¼	0	6	24
X2	4	2	0	2	-1	1	12	6
z	-1	-5	0	1/2	-6/4	0	-36	

T3	y1	y2	y3	y4	X1	x2	b
y3			1	0			36
y4	2	1	0	1	-1/2	11/2	6
z	-2	-11/2	0	0	-5/4	-1/4	-39

$Z_i \leq 0 \ \forall \ i = 1, n$ la solution optimale est atteinte alors Arrêt

Z*=39
X*= (-2,-11/2,0,0,-5/4,-1/4)

La lecture des résultats des variables se font d’une façon verticale (il faut lire les valeurs de vecteur hors base de primal