(P1) تصحيح إمتحان السداسي الثالث.

مقياس رياضيات تطبيقية.

ت (01): 8 نقاط.

1) $I = \int_{2}^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$.

$\cos\left(\frac{1}{t}\right) = 1 - \frac{(1/t)^2}{2!} + o(1/t^2)$.

$= 1 - \frac{1}{2t^2} + o(1/t^2)$.

4pts

$\Rightarrow I = \int_{2}^{+\infty} 1 - \left(1 - \frac{1}{2t^2}\right) dt = \int_{2} \frac{1}{2t^2} dt$.

وهو تكامل ريمان متقارب $(\alpha > 1)$ على المجال $[1, +\infty[$ فهو متقارب على المجال $[2, +\infty[$.

2) $J = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

إثبات أن J متقارب:

لدينا $\frac{1}{t}$ دالة موجبة مستمرة متناقصة على $[1, +\infty[$ و $\underset{t \to +\infty}{1/t \to 0}$

كذلك $\int_{1}^{x} \sin(t) dt$ محدود حسب نظرية "Abel" J متقارب.

* نبرهن أن J ليس متقارب مطلقا:

$\left|\frac{\sin t}{t}\right| \geq \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1 - \cos(2t)}{2t}$.

2pts

$\Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \int_{1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(2t)}{2t}$

نستعمل التكامل بالتجزئة: $u' = \cos 2t,\ v = \frac{1}{t}$

$\Rightarrow \int_{1}^{x} \frac{1 - \cos(2t)}{2t} dt = \frac{1}{2} \ln t \Big|_{1}^{x} - \frac{1}{4} \left[\frac{\sin(2t)}{t}\right]_{1}^{x} - \frac{1}{4} \int^{x} \frac{\sin(2t)}{t^2} dt$

2pts

$\frac{1}{2} \ln x \to +\infty \to$ متباعد.

$\frac{1}{4} \frac{\sin(2x)}{x} + \frac{1}{4} \sin(2) \to \frac{1}{4} \sin(2) \to$ متقارب

$-\frac{1}{4} \int_{1}^{x} \frac{\sin(2t)}{t^2} dt \sim \int_{1}^{x} \frac{1}{t^2} dt \to$ متقارب $\Rightarrow$ J ليس مطلقا متقارب