الفصل الثاني

التكامـــلات

1.2 تكامل دالة مستمرة على مجال

تعريف 1.1.2 : ليكن $I=[a,b]$ مجال في $\mathbb{R}$ وليكن f دالة حيث

$$f: I \to \mathbb{R}$$

نقول أن F دالة أصلية للدالة f حيث

$$F: I \to \mathbb{R}$$

إذا تحقق ما يلي

1- F قابلة للإشتقاق على المجال المفتوح I.

2-

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$$

نظرية 1.1.2 : كل دالة مستمرة $f: I \to \mathbb{R}$ تقبل دالة أصلية

نظرية 2.1.2 : لتكن الدالة $f: I \to \mathbb{R}$ حيث f تقبل دالة أصلية

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي

$$\{F+c, c \in \mathbb{R}\}$$

حيث F دالة أصلية خاصة للدالة f.

نرمز بـ $\int f(t)dt$ للدالة الأصلية للدالة f ونكتب:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

1.1.2. التكامل المحدود

لنكن الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ و المستمرة على المجال $[a,b]$ حيث $b \geq a$.

يمكن تعريف التكامل بطريقة أخرى أكثر استعمالا في ايجاد قيم ثابتة للتكاملات من خلال النظرية التالية:

نظرية 3.1.2 : لتكن الدالة $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ المعرفة

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

هي دالة أصلية للدالة f يعني أن الدالة F قابلة للإشتقاق وتحقق :

$$F'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$$

تعريف 2.1.2 : نسمي التكامل المحدود للدالة f الذي نرمز له بالرمز

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ حيث F هي الدالة الأصلية للدالة f و نكتب

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

مثال 1 : لنحسب التكاملات التالية:

1- من أجل $f(x) = e^x$ لتكن $F(x) = e^x$ دالة أصلية لها، ومنه

$$\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

2– من أجل $g(x) = x^2$ لتكن $G(x) = \frac{x^3}{3}$ دالة أصلية لها، ومنه

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}.$$

3–

$$\int_a^x \cos t\,dt = \left[\sin t\right]_{t=a}^{t=x} = \sin x - \sin a$$

دالة أصلية للدالة $\cos x$.

4– إذا كانت دالة فردية تكون دالتها الأصلية دالة زوجية (نبرهن لاحقا) ونستنتج أن

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0.$$

2.2 خواص التكاملات

الخصائص الرئيسية الثلاثة للتكامل هي علاقة Chasles وإيجابية وخطية التكاملات.

1.2.2. علاقة شال

اقتراح 1 : لتكن $a < c < b$. إذا كان f دالة قابلة للتكامل على $[a,c]$ و $[c,b]$ ، عندها تكون f قابلة للتكامل على $[a,b]$.

ولدينا

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

لدينا الخاصية التالية من أجل $a = b$:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

و من أجل $a < b$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

مثال 1 : لدينا

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^2dx &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}\\ \int_3^1 x^2dx &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^1 = \frac{1}{3} - \frac{27}{3} = -\frac{26}{3}\end{aligned}$$

$$\int_1^3 x^2dx = -\int_3^1 x^2dx.$$

ليكن الأعداد a, b, c و منه علاقة شال تصبح على الشكل التالي

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2.2.2. إيجابية التكامل

اقتراح 2 : ليكن $a \leq b$ عددين حقيقيين، f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a, b]$. إذا كان $f \leq g$ فإن

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

على وجه الخصوص ، يكون تكامل الدالة الموجبة إيجابيا:
إذا كانت $f \geq 0$ فإن

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq 0.$$

3.2.2. خطية التكامل

اقتراح 3 : لتكن f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a, b]$

-1 و منه $f + g$ دالةقابلة للتكامل و

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2- من أجل كل عدد حقيقي λ الدالة λf هي قابلة للتكامل و لدينا

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

من خلال هاتين النقطتين الأوليتين لدينا خطية التكامل:

من أجل كل عدد حقيقي λ و μ لدينا

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

ملاحظة 1 :

1- إذا كانت f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a,b]$ فإن في معظم الأحيان

$$\int_a^b (fg)(x)\ dx \neq \left(\int_a^b f(x)\ dx\right)\left(\int_a^b g(x)\ dx\right).$$

1- ذا كانت f دالة قابلة للتكامل على المجال $[a,b]$ فإن $|f|$ دالة قابلة للتكامل على المجال $[a,b]$ أيضا و لدينا

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b \big|f(x)\big|\ dx.$$

مثال 2 : لدينا:

$$\int_0^1 \left(7x^2 - e^x\right)\ dx = 7\int_0^1 x^2\ dx \ \ - \ \int_0^1 e^x\ dx = 7\frac{1}{3} \ - \ (e-1) = \frac{10}{3} - e$$

باستخدام الحسابات التي رأيناها سابقا نجد

$$\int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3}$$

و

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

مثال 3 : ليكن $I_n = \int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\ dx$ لنثبت أن $I_n \to 0$ لما $n \to +\infty$.

$$|I_n| = \left|\int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\ dx\right| \leq \int_1^n \frac{|\sin(nx)|}{1+x^n}\ dx \leq \int_1^n \frac{1}{1+x^n}\ dx \leq \int_1^n \frac{1}{x^n}\ dx$$

يبقى فقط حساب هذا التكامل الأخير

$$\int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^n x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^n = \frac{n^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

لأن $n^{-n+1} \to 0$ و $\frac{1}{-n+1} \to 0$ لما $n \to +\infty$.

ملاحظة 2 : نلاحظ أنه حتى و لو كانت $f \cdot g$ قابلة للتكامل فإنه على العموم

$$\int_a^b (fg)(x)dx \neq \Big(\int_a^b f(x)dx\Big)\Big(\int_a^b g(x)dx\Big).$$

على سبيل المثال، لتكن الدالة f و g المعرفتين كمايلي:

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1 & si \quad x\in[0,\frac{1}{2}[\\ 0 & si\ non.\end{cases}$$

و

$$g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases}1 & si \quad x\in[\frac{1}{2},1[\\ 0 & si\ non.\end{cases}$$

و منه $f(x)\cdot g(x)=0$ من أجل كل $x\in[0,1]$، إذا:

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$$

رغم أن

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

3.2 تكامل الدوال المألوفة

$\int e^x dx = e^x + c$ على $\mathbb{R}$
$\int \cos x dx = \sin x + c$ على $\mathbb{R}$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$ على $\mathbb{R}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ، $(n\in\mathbb{N})$ على $\mathbb{R}$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ ، $(\alpha\in\mathbb{R}_{\{-1\}})$ على $]0,+\infty[$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + c$ على $]0,+\infty[$ أو $]-\infty,0[$

$\int shx\, dx = chx + c$، $\int chx\, dx = shx + c$	على	$\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$	على	$\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$	على	$]-1,1[$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} Argsh\,(x) + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases}$	على	$\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} Argch\,(x) + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \end{cases}$	على	$x \in]1,+\infty[$

4.2 طرق التكامل

1.4.2. التكامل بالتجزئة

نظرية 1.4.2 : لتكن u و v دالتين من الفئة C^1 المعرفتين على المجال $[a,b]$ فإن :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\;dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\;dx$$

صيغة التكامل بالتجزئة للدالة الأصلية هي نفسها ولكن بدون حدود:

$$\int u(x)v'(x)\;dx = [uv] - \int u'(x)v(x)\;dx.$$

مثال 1 : لحساب التكامل

$$\int_0^1 xe^x\;dx$$

نضع $u(x) = x$ و $v'(x) = e^x$.

نعلم أن الدالة $u'(x) = 1$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$ و الدالة $v(x) = e^x$ هي الدالة الأصلية

للدالة v' و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx \\
&= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx \\
&= (1\cdot e^1 - 0\cdot e^0) - [e^x]_0^1 \\
&= e - (e^1 - e^0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

مثال 2 : لحساب التكامل

$$\int_1^e x\ln x\,dx.$$

نضع هذه المرة $u(x) = \ln x$ و $v'(x) =$.

و منه الدالة $u' = \dfrac{1}{x}$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$ و الدالة $v = \frac{x^2}{2}$ هي الدالة الأصلية للدالة v' و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x\cdot x\,dx = \int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v = \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,dx \\
= \left(\ln e\frac{e^2}{2} - \ln 1\frac{1^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \\
= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}
\end{aligned}$$

مثال 3 : لحساب التكامل

$$\int \arcsin x\,dx$$

لإيجاد دالة أصلية للدالة $\arcsin(x)$ نجعلها من شكل جداء حيث نضع $u(x) = \arcsin(x)$ و $v'(x) = 1$، حيث لدينا $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ و $v(x) = x$، ثم نطبق صيغة التكامل بالتجزئة فنجد

$$\begin{aligned}
\int 1\cdot\arcsin(x)dx &= [x\arcsin(x)] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= [x\arcsin(x)] - \left[-\sqrt{1-x^2}\right] \\
&= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c
\end{aligned}$$

مثال 4 : حساب التكامل
$$\int x^2e^xdx.$$
نضع $u(x)=x^2$ و $v'(x)=e^x$.

نعلم أن الدالة $u'(x)=2x$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$ و الدالة $v(x)=e^x$ هي الدالة الأصلية للدالة $v'(x)$ و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:
$$\int x^2e^x\ dx=\left[x^2e^x\right]-2\int xe^x\ dx$$
نعيد التكامل بالتجزئة للمرة الثانية على الجزء الثاني من المساواة السابقة نجد:
$$\int xe^x\ dx=[xe^x]-\int e^x\ dx=(x-1)e^x+c$$
في الأخير نجد
$$\int x^2e^x\ dx=(x^2-2x+2)e^x+c.$$

2.4.2. التكامل بتغيير المتغير

نظرية 2.4.2 : إذا كانت f دالة معرفة على المجال $I=[a,b]$ و ليكن التقابل $\varphi:J\to I$ من الفئة $\mathcal{C}^1$. من أجل كل $a,b\in J$ لدينا:
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(x)dx=\int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt$$
إذا كانت F دالة أصلية للدالة f فإن $F\circ\varphi$ هي الدالة الأصلية للدالة $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$. بصفة أخرى
$$\left(\int f(x)\ dx\right)\circ\varphi=\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\ dt$$
أي أن الدالة الأصلية للدالة $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ تنتج من تركيب كل من الدالة f و φ.

العبارة $\int f(x)\ dx=\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\ dt$ تمثل فعلا تغيير للمتغير، أو بصيغة مبسطة نضع $x=\varphi(t)$ ومنه نجد بعدها بالإشتقاق $\dfrac{dx}{dt}=\varphi'(t)$ أي $dx=\varphi'(t)\ dt$ ما يعطينا :
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(x)dx=\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

مثال 5 : حساب التكامل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,dx$$

بوضع

$$\sin(x) = t \Longrightarrow \sin(x)' = \cos(x) = dt$$

ومنه تتغير حدود التكامل من x الى t كما يلي

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow t = \sin(0) = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

ومنه نجد

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow \sin(0) = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,dx &= \int_0^1 t^2 dt \\ &= \left.\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

تمارين مفتوحة

5.2 سلسلة التمارين رقم 3

تمرين 1 : أدرس قيم التكامل التالي

$$I_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n}\, dx,$$

من أجل كل $n > 0$.

1- أثبت أن $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

2- أثبت أن $I_n \leq \ln \frac{n+1}{n}$ ثم استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3- أحسب قيمة التكامل

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n.$$

الحـــل

1- إثبات أن $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$: من أجل كل $0 \leq x \leq 1$، لدينا $0 < x+n \leq x+n+1$ و $\sin(\pi x) \geq 0$، ومنه ، نجد

$$0 \leq \frac{\sin(\pi x)}{x+n+1} \leq \frac{\sin(\pi x)}{x+n}$$

بتطبيق خاصية إيجابية التكامل.

2- من خلال $0 \leq \sin(\pi x) \leq 1$ لدينا

$$\frac{\sin(\pi x)}{x+n} \leq \frac{1}{x+n}$$

نجد

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{1}{x+n}\, dx = [\ln(x+n)]_0^1 = \ln\frac{n+1}{n} \to 0.$$

3- حساب قيمة التكامل

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n.$$

لنجري تكامل بالتجزئة، حيث نضع $u(x) = \dfrac{1}{x+n}$ و $v'(x) = \sin(\pi x)$ ومنه $u'(x) = -\dfrac{1}{(x+n)^2}$ و $v(x) = -\dfrac{1}{\pi}\cos(\pi x)$ نجد

$$\begin{aligned} nI_n &= n\int_0^1 \frac{1}{x+n}\sin(\pi x)\, dx \\ &= -\frac{n}{\pi}\left[\frac{1}{x+n}\cos(\pi x)\right]_0^1 - \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\cos(\pi x)\, dx \\ &= \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n \end{aligned}$$

يبقى لنا إيجاد قيمة

$$J_n = \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{(x+n)^2}dx.$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{n}{\pi}J_n\right| &\leq \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{|\cos(\pi x)|}{(x+n)^2}\, dx \leq \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\, dx \\ &= \frac{n}{\pi}\left[-\frac{1}{x+n}\right]_0^1 = \frac{n}{\pi}\left(-\frac{1}{1+n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1} \to 0. \end{aligned}$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n = \frac{2}{\pi}.$$