الفهرس

الفصل الأوّل

التطبيقات الخطية

1.1 التطبيقات الخطية

.1.1.1 تعاريف

لقد واجهنا سابقا مفهوم التطبيق الخطي في التطبيق $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ سوف نعمم هذه الفكرة على جميع الفضاءات الشعاعية.

تعريف 1.1.1 : ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل $\mathbb{K}$. نقول أن التطبيق f من E نحو F هو تطبيق خطي إذا كان يحقق الشرطين التاليين:

(•). من أجل كل $u, v \in E$ لدينا $f(u+v) = f(u) + f(v)$

(•). من أجل كل $u \in E$ و $\lambda \in \mathbb{K}$ لدينا $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$.

مثال 1 : التطبيق f المعرف

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}r^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-2x, y+3z) \end{array}$$

هو تطبيق خطي. في الواقع ، لدينا $u = (x,y,z)$ و $v = (x', y', z')$ عنصرين من $\mathbb{R}^3$ و λ عدد حقيقي

حيث.

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x+x', y+y', z+z') \\ &= \big(-2(x+x'), y+y'+3(z+z')\big) \\ &= (-2x, y+3z) + (-2x', y'+3z') \\ &= f(u)+f(v) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} f(\lambda\cdot u) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (-2\lambda x, \lambda y + 3\lambda z) \\ &= \lambda\cdot(-2x, y+3z) \\ &= \lambda\cdot f(u) \end{aligned}$$

2.1.1. خواص

اقتراح 1 : ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ إذا كان f تطبيق خطي من E نحو F فإن:

- $f(0_E)=0_F$،
- $f(-u)=-f(u)$ من أجل كل $u\in E$.

لدينا الخواص التالية أيضا:

اقتراح 2 : ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق من E نحو F فإن: التطبيق f خطي إذا وفقط إذا كان من أجل كل u و v من E ومن أجل كل سلمي λ و μ من $\mathbb{K}$،

$$\boxed{f(\lambda u+\mu v)=\lambda f(u)+\mu f(v).}$$

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$

تعريف 2.1.1 : .

- نقول أن التطبيق الخطي المعرف من E نحو F أنه أيضا إزومورفيزم أو أومومورفيزم للفضاء الشعاعي.

  مجموعة التطبيقات الخطية من E في F يرمز لها بالرمز $\mathcal{L}(E,F)$.

- نسمي التطبيق الخطي المعرف من E نحو E بأندو موفيزم مجموعة التطبيقات الخطية من E في F يرمز لها بالرمز $\mathcal{L}(E)$.

3.1.1. صورة ونواة تطبيق خطي

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق من E نحو F. لتكن A مجموعة جزئية من E.

جميع الصور بواسطة f لعناصر المجموعة A هي صورة مباشرة للمجموعة A نرمز لها بالرمز $f(A)$. وهي مجموعة جزئية من F. المعرفة:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

إذا كان $f : E \to F$ تطبيق خطي فإن $f(E)$ تسمى صورة التطبيق الخطي ونرمز لها بالرمز: $\Im(f)$.

اقتراح 3 : .

1) إذا كانت E' فضاء شعاعي جزئي من E فإن $f(E')$ هي فضاء شعاعي جزئي من F.

2) بصفة خاصة $\Im(f)$ هي فضاء شعاعي جزئي من F.

ملاحظة 1 : لدينا من خلال تعريف الصورة المباشرة $f : f(E)$ غامر إذا وفقط إذا $\Im(f) = F$.

تعريف 3.1.1 : ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق خطي من E نحو F. نرمز لنواة التطبيق f بالرمز $Ker(f)$ مجموعة العناصر من E التي صورها من 0_F :

$$\boxed{Ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}}$$

بمعنى آخر ، النواة هي الصورة المتبادلة للشعاع الصفري لفضاء الوصول:

$$Ker(f) = f^{-1}\{0_F\}.$$

اقتراح 4 : ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق خطي من E نحو F. نواة التطبيق f هي فضاء شعاعي جزئي من E.

مثال 2 : ليكن f التطبيق الخطي المعرف

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}r^3 & \to & \mathbb{R}r^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (-2x, y + 3z) \end{array}$$

- حساب النواة $Ker(f)$. ليكن

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in Ker(f) &\iff f(x,y,z)=(0,0)\\ &\iff (-2x,y+3z)=(0,0)\\ &\iff \begin{cases}-2x &= 0\\ y+3z &= 0\end{cases}\\ &\iff (x,y,z)=(0,-3z,z),\quad z\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

ومنه $Ker(f)=\{(0,-3z,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$. بصيغة أخرى $Ker(f)=Vect\{(0,-3,1)\}$: هي نشكل مستقيم.

- حساب صورة f. نأخذ $(x',y')\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(x',y')=f(x,y,z) &\iff (-2x,y+3z)=(x',y')\\ &\iff \begin{cases}-2x &= x'\\ y+3z &= y'\end{cases}\end{aligned}$$

نستطيع أخذ المثال $x=-\frac{x'}{2}$، $y'=y$، $z=0$. في الخلاصة، من أجل أي $(x',y')\in\mathbb{R}^2$ لدينا $f(-\frac{x'}{2},y',0)=(x',y')$. ومنه $\Im(f)=\mathbb{R}^2$ فإن f تطبيق غامر.

مثال 3 : لتكن $A\in M_{n,p}(\mathbb{R})$. وليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R}^n$ المعرف كما يلي $f(X)=AX$.
ومنه $Ker(f)=\{X\in\mathbb{R}^p\mid AX=0\}$:
وبالتالي فإن $X\in\mathbb{R}^p$ هي مجموعة الحلول للجملة الخطية المتجانسة $AX=0$.
سوف نرى في المحور القادم أن $\Im(f)$ هي الفضاء الشعاعي المولد من أعمدة المصفوفة A.