جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
وعلوم التسييـــر

قسم مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية *LMD-SEGC*
السنــة الأولـــى

مُحاضَراتٌ في مِقياسِ الإحصَــاءِ الرِّياضِيِّ.

المحور الثالث: مفاهيم أساسية في نظرية الاحتمال

الجزء الأول: تعريفات ومفهومات.

إعداد الدكتور هاشمي عبابسة.

h.ababsa@univ-biskra.dz

المحور الثالث: مفاهيم أساسية في نظرية الاحتمال.

الجزء الأول: تعريفات ومفهومات.

أ- نبذة تاريخية:

تاريخيا ارتبط ظهور نظرية الاحتمالات بألعاب الحظ التي كانت سائدة بكثرة في أوربا في القرن السابع عشر وتنظمها البنوك بشكل خاص. لكن قلة انتشار طباعة الكتب والأجواء الدينية السائدة التي لا تبارك هذه الألعاب منعت انتشار الكتابات في هذا الشأن. وينسب البعض أول الكتابات في علم الاحتمالات إلى العالم "باسكال" *(PASCAL 1662- 1623)* الذي كتب عما أسماه آنذاك "هندسة الحظ" *(La géométrie du hasard)*. وكان ذلك من خلال رسائل له مع زميله المعروف هو الآخر "فرمات" *(FERMAT : 1665 – 1601)* .

وتذكر في هذا الصدد بشكل خاص المسألة التي طرحها على باسكال أحد هواة الألعاب "كم ينبغي من رمية لمكعبي نرد حتى يمكن المراهنة بتفاؤل على الحصول على مجموع *12*؟ ". ثم جاء علماء آخرون كانت لهم إضافات بارزة في هذه الفترة مثل هايجان (*HUYGEN : 1629 – 1695*)، جاك برنولي *(JACQUES BERNOULLI)*، موافر *(MOIVRE)* وكذا لايبنيتز *(LEIBNIZ : 1716 – 1646)*. كما ساهم في هذه الفترة التي سبقت القرن *19* علماء كبار أمثال (*GAUSSE, BAYES, LAPLACE* عرفت نظرية الاحتمالات على أيديهم إنجازات كبيرة.

القرن التاسع عشر: في هذا القرن برزت إحدى أهم عناصر نظرية الاحتمالات وهي "التوزيع الطبيعي" وذلك لقياس نسبة الخطأ في مجال الحسابات الفلكية. كان هذا من ثمرة عمل العالمين لابلاس وقوس*(GAUSSE* و*LAPLACE)*. في هذا القرن أيضا ظهرت حسابات الارتباط لقالتو *(GALTOU)* كما برزت أسماء مثل كتلت *(QUETLET)*وآخرون .

القرن العشرون: نظرية الاحتمالات كما نراها الآن، أي بصياغة رياضية ناضجة في شكل قوانين مبرهن عليها رياضيا، إنما تبلورت في القرن العشرين وبالضبط في بدايته. ومن الأسماء التي برزت في الفترة الأولى (*1980 – 1920*) من هذا القرن نجد من بريطانيا بيرسون (*KARLE PEARSON*) ومن روسيا ماركوف (*MARKOV*) ومن فرنسا بوريل (*BOREL*). في الفترة الثانية (*1921 – 1932*) درست مسائل التوقع، حيث كان لفيشر (*FISHER*) دورا بارزا.

في الفترة الممتدة من *1933* إلى نهاية الحرب العالمية الثانية برزت اختبارات الفروض على يد نايمان (*NEYMAN*) وإيقون بيرسون (*EGON PEARSON*) وبداية النظرية الحديثة للمعاينة لنايمان (*NEYMAN*)

بالإضافة إلى خطط التجارب لفيشر. بداية من الخمسينات تكاثرت الكتابات في مجال الإحصاء حيث عرفت نظرية التقدير وتحليل البيانات. وبالتدريج انتشر استخدام الإحصاء في الميادين المختلفة والعلوم التجريبية والإنسانية.

ملخص: تاريخيا إذا ارتبطت أولى استعمالات الإحصاء بحاجة الدولة لتنظيم الجباية والتجنيد ودراسة السكان، كما أن أولى الدراسات في حساب الاحتمالات (أصل الإحصاء الرياضي) ارتبطت أول الأمر بمسائل ألعاب الصدفة والحظ كمجال جديد أثار فضول عدد من العلماء الذين أسّسوا هذا العلم في القرن السابع عشر. وقد كان التطور السريع لعلم الاحتمالات كفرع من الرياضيات في بداية القرن العشرين، لكن أهم عناصر الإحصاء الرياضي كما هو معروف الآن تبلورت في النصف الأخير منه.[1]

ب- المفاهيم الأساسية للاحتمالات:

عادة ما تستخدم كلمة "**احتمال**" للدلالة على إمكانية تحقق حدث ما، **دون التأكد** مسبقا من حدوثه؛ أي أنه عادة ما تكون هناك أكثر من **نتيجة ممكنة** لكن من غير المؤكد أن واحدة منها ستتحقق.

إذن تهتم نظرية الاحتمالات بالأحداث غير المؤكدة، حيث تستخدم في عملية اتخاذ القرار في ظل عدم التأكد. ولهذا يعتبر فهم حساب الاحتمالات بالنسبة لعالم الاقتصاد والتسيير أداةً يومية لمعالجة المشاكل المطروحة واتخاذ القرار. فقرارات المسير – بل وحتى رب البيت- تُبنى في 99% من الحالات على معلومات غير مؤكدة.

تعد نظرية الاحتمالات وسيلة من وسائل علم الإحصاء لاستقراء المجتمع الإحصائي بعد سحب عينة منه ودراستها، ولذلك يمكن القول أن نظرية الاحتمال تساعد على:

- معرفة مدى تمثيل العينة للمجتمع الإحصائي الذي سُحبت منه.
- تحديد درجة الثقة في الاستقراء بواسطة هذه العينة ومن ثمّ التعميم على المجتمع ككل.

- **مفهوم التجربة، الحدث والاحتمال** (*Epreuve, événement, probabilité*)

➢ **التجربة**: التجربة في علم الاحتمالات مفهوم عام ومرن، وهي ذلك الاختبار الذي يتمخض عنه عدة نتائج ممكنة (إمكانيات أو أحداث). وهي نوعان:

- **تجارب تقريرية:** وهي التي تكون نتائجها مؤكدة مسبقا.
- **تجارب عشوائية:** وهي التي تكون نتائجها غير مؤكدة مسبقا.

ونظرية الاحتمالات تتعامل مع هذا النوع الأخير.

[1] https://fr.scribd.com/doc/157058593/112297878-2006-محاضرات-الاحصاء-الرياضي-لطلبة-كلية-العلوم-الاقتصادية-بوعبد-الله-صالح

- **فضاء الإمكانيات:** هو كل مجموعة تتألف من كافة الإمكانيات المرتقبة من تجربة إحصائية معينة، وله عدة تسميات أخرى منها: "فضاء المعاينة" ، " الفضاء الأساسي" ، " مجموعة الإمكانيات" ...

يرمز لمجموعة الإمكانيات بالرمز Ω ولعدد عناصرها بالحرف N. حيث N يساوي **عدد الإمكانيات في تجربة واحدة "أس" عدد التجارب.**

- **الحدث**: الحدث هو واقعة أو نتيجة ما نتجت عن تجربة إحصائية معينة، أي أن الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء الإمكانيات. وعليه يمكن القول أن التجربة هي أمُّ الحدث أو أمُّ النتيجة؛ لأن التجربة تتفرع بالضرورة إلى أحداث. نرمز للأحداث بالرموز: A ، B ، C ، ...

- **أنواع الحدث:**

- الأحداث البسيطة والأحداث المركبة.
- الأحداث المتلائمة والأحداث المتنافية.
- الأحداث المستقلة والأحداث المترابطة.
- الأحداث المؤكدة والأحداث المستحيلة.
- الحدث والحدث المتمم له.

ملاحظة: ليس شرطا أن يكون زمن وقوع الحدث هو المستقبل، فقد يكون الماضي أو الحاضر.

- **استخدام نظرية المجموعات للتعبير عن الأحداث العشوائية:**

من خلال العناصر الآتية تستخدم نظرية المجموعات للتعبير عن الأحداث العشوائية:

- نعبر عن النتائج الممكنة لتجربة ما بالرمز Ω، وتسمى المجموعة الكلية أو فضاء العينة كما ذكرنا سابقا.
- نعبر عن الحدث بمجموعة جزئية A من فضاء العينة، حيث A هي مجموعة من النتائج الممكنة للتجربة.
- إذا انتهت التجربة بنتيجة تمثل عنصرا من A نقول أن الحدث A قد تحقق.
- الحدث الذي يحتوي على نقطة أو عنصر واحد من Ω يسمى عادة حدثا بسيطا.

مثال1: *لتكن لدينا تجربة هي إلقاء مكعب نرد. أكتب مجموعة فضاء العينة ثم عبر عمليا عن الأحداث التالية:*

*الحدث **A**: الحصول على العدد 6 (حدث بسيط)* $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ، $A = \{6\}$

*الحدث **B**: الحصول على عدد زوجي* $B = \{6,4,2\}$

*الحدث **C**: الحصول على عدد أولي* $C = \{2, 3, 5\}$

*الحدث **D**: الحصول على عدد فردي* $D = \{1, 3, 5\}$

مثال 2: *لتكن لدينا تجربة هي رمي قطعتين نقديتين على التوالي: أكتب مجموعة فضاء العينة ثم عبر عن:*

الحدث A : الحصول على مرتين كتابة (حدث بسيط) $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}, \; A = \{PP\}$

الحدث B : الحصول على كتابة مرة واحدة $B = \{FP, PF\}$

الحدثC : الحصول على كتابة في الرمية الأولى $C = \{PP, PF\}$

- من بين الأحداث الممكنة في تجربة ما أيا كانت، الحدث Ø يمثل الحدث المستحيل لأنه لا يمكن أن يتحقق عنصر منها: $P(\varnothing)=0$
- من بين الأحداث الممكنة في تجربة ما أيا كانت، حدث المجموعة الأساسية Ω نفسها، وهو الحدث الأكيد لأنه لابد أن يتحقق أحد عناصرها على الأقل. $P(\Omega) = 1$
- بتطبيق عمليات مثل الإتحاد والتقاطع، الطرح، الجمع .... على المجموعات نحصل على مجموعات جديدة جزئية من Ω ومن ثم أحداث جديدة في Ω . من ذلك:

AUB هو الحدث: إما A أو B أو كلاهما.

$A\cap B$ هو الحدث : A وB معا.

$\bar{A}$ هو الحدث المعاكس لـ A.

$A - B$ هو الحدث: A لكن ليسB .

- إذا كان $A\cap B = \varnothing$ نقول أن A وB متنافيان (أو غير متلائمان) أي لا يمكن وقوعهما معا والعكس صحيح.

➢ **<u>الاحتمال:</u>** كثيرا ما يخلط الطلبة بين الحدث والاحتمال لارتباطهما ببعضهما البعض؛ فالحدث العشوائي هو واقعة أو نتيجة أو إمكانية ناتجة عن تجربة ما، أما الاحتمال فهو عدد محصور بين الصفر والواحد يعبر عن حظوظ أو فرص وقوع هذا الحدث.

لذا يجب التمييز بين الاحتمال والإمكانية (الإمكانية هي حدث). فالاحتمال في مفهوم العلم هو عدد يقيس حظوظ وقوع شيء ما نسميه نتيجة أو حدثا أو إمكانيةً. ويختلف عن هذا المفهوم العلمي تعريفُ الناس للاحتمال؛ فكثيرا ما تطلق كلمة "احتمال" و يقصد بها "إمكانية" ، فيقال مثلا: "إن هذا احتمال ممكن" و الصحيح "إن هذا حدث ممكن أو إن هذه إمكانية واردة" ، أو يقال: "إذا رمينا حجر نرد هناك 6 احتمالات" و الصحيح " هناك 6 إمكانيات أو 6 نتائج محتملة"، ...

وبما أن الاحتمالات عبارات عن أعداد فإنه يمكن جمعها أو طرحها ويمكن أن تخضع للجداء والقسمة. أما عمليات التقاطع والاتحاد، ... فهي عمليات على المجموعات وليست على الأعداد. من أجل ذلك لا يصح أن نكتب: احتمال تقاطع (أو اتحاد) احتمال آخر. بينما يمكن أن نكتب: الحدث A تقاطع (أو اتحاد) الحدث B، لأن الأحداث مجموعات.

- **تعريف الاحتمال**: هناك طريقتان لتعريف احتمال تحقق حدث معين A :

- **التعريف الكلاسيكي**: عرف بليز باسكال *(Blaise Pascal : 1623)* الاحتمال بالشكل الآتي: "احتمال حدث هو عدد الحالات الملائمة لوقوع الحدث مقسوما على عدد الحالات الممكنة، إذا اقترضنا أن كل الحالات لها نفس الاحتمال في الوقوع."[1]

مثال 3: *ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي عند رمي قطعة نرد؟ بيِّن كلا من التجربة، الحدث والاحتمال في هذا المثال.*

الجواب: *احتمال الحصول على عدد زوجي عند رمي قطعة نرد هو* $\frac{\text{عدد الحلالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{3}{6} = 0.5$

أما التجربة فهي عملية القاء حجر النرد، وأما الحدث فهو الحصول على عدد زوجي، وأما الاحتمال فهو فرصة تحقق هذا الحدث والمقدرة بنسبة 50%

يسمى هذا التعريف أيضا "التعريف القبلي"، ويعاب عليه أنه تعريف "**دائري**" لأنه يعتمد على كلمة "احتمال" في تعريفه للاحتمال.

- **التعريف الحديث**: إذا تم تكرار تجربة ما N مرة (حيث N كبير جدا) ، ولاحظنا أن الحدث A قد تحقق k مرة، فإن احتمال تحقق الحدث A هو التكرار النسبي لحدوث A أي $k/_N$.

يسمى هذا التعريف كذلك "التعريف البعدي أو التجريبي"، لكن ما يعاب عليه أن هذا العدد الكبير من التجارب الذي يوصلنا إلى قيمة الاحتمال غير محدد بدقة.

مثال4: *رمينا قطعة نقود ألف مرة، فحصلنا على 526 صورة، ثم رميناها ألف مرة أخرى فحصلنا على 489 صورة. إذا افترضنا أن A حدث يتحقق بحصولنا على "صورة" في رمية واحدة:*

1. *أحسب احتمال تحقق A في الألف رمية الأولى.*
2. *أحسب احتمال تحقق A بعد رمي القطعة ألفي مرة.*
3. *ماذا تلاحظ؟*

[1] ريجينالد لافوا 1981، ص 2 و3.

الجواب:

1. $P(A) = \frac{526}{1000} = 0.526 = 52.6\%$
2. $P(A) = \frac{1015}{2000} = 0.507 = 50.7\%$
3. *نلاحظ أنه كلما زدنا عدد مرات القاء قطعة النقود اقتربت النسبة من 50% وهي احتمال الحصول على الصورة من رمية واحدة.*

والخلاصة أن مفهوم الاحتمال يبقى مفهوما غامضا في نظرية الاحتمال الحديثة، على غرار النقطة والمستقيم في الهندسة كمثال، فقط هناك مجموعة من المُسلَّمات التي تُبنى عليها النظرية الحديثة للاحتمال.

الرموز: نرمز للاحتمال بالرمز P فنقول $P(A)$ يعني احتمال تحقق الحدث A.

ونعبر عن احتمال وقوع الحدث: $X = x_i$ كما يلي: $P(X = x_i)$ أو $P(x_i)$.

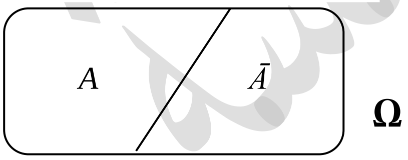
مثال5: *احتمال الحدث: "الحصول على الوجه 5" عند إلقاء حجر نرد يكتب: $P(X = 5) = 1/6$ ، أو باختصار: $P(5) = 1/6$*

2- خواص الاحتمالات:

- الاحتمال هو عدد موجب تماما أو معدوم (لا يكون سالبا).
- مجموع احتمالات أحداث تجربة ما يساوي الواحد.
- احتمال الحدث الأكيد دوما يساوي 1.
- احتمال الحدث المستحيل دوما يساوي 0.
- مما سبق فإن الاحتمال قيمة محصورة بين 0 و 1 .
- احتمال تحقق حدث A والحدث المتمم له أو المعاكس له $\bar{A}$ (أو $\grave{A}$) يساوي دوما 1. (أنظر الشكل رقم 03)

أي: $P(\bar{A}) + P(A) = 1 \Leftrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

الشكل رقم 03: الحدث والحدث المتمم



المصدر: محاضرات الأستاذ بوعبد الله

مثال6: *نرمي قطعة نقدية ونرمز ب P للكتابة وF للصورة (الوجه).*

نلاحظ أن:

$P(P) = P(F') = 1 - P(F) \Leftrightarrow P(P) + P(F) = 1$

مثال 7: *عند رمي حجر نرد فإن احتمال الحصول على العدد 5 هو: $P(5) = 1/6$ ، فما هو الحدث المعاكس في هذه الحالة وما احتماله؟*

الجواب: *الحدث المعاكس في هذه الحالة هو الحصول على أحد الأرقام الخمسة المتبقية عدا 5، واحتماله هو 56.*

مثال 8: *نرمي حجر نرد، ما هو احتمال الحصول على رقم زوجي، ما هو الحدث المعاكس وما هو احتماله؟*

الجواب: *الحدث المعاكس في هذه الحالة هو الحصول على رقم فردي، واحتماله يساوي 36.*