رياضيات ٣

الجبر الخطي

٢- المحددات

تعريف -١ :

لتكن $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ وليكن A_{ij} المصفوفة من النوع $(n-1),(n-1)$ المحصل عليها بحذف السطر رقم i والعمود رقم j من A، نسمي cofacteur والترميد (i,j) السلمية $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ و يسمى المعرف a_{ij}.

نظرية :

ليكن $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ إذن :

١) $\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij}$, $1 \leq i \leq n$

أو

٢) $\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij}$, $1 \leq j \leq n$

المعادلة ① تعطي نشر لـ $|A|$ بالنسبة للعناصر السطر i من A.

المعادلة ② " " " $|A|$ " " العمود j من A.

نظرية :

ليكن $L = (\Delta_{ij})$ و A مصفوفة قابلة للقلب اذن :

$$A^{-1} = \frac{L^t}{|A|}$$

مثال: عين محدد المصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

نحسب det بالنسبة لعناصر العمود الأول

$$\det A = |A| = (-1)^{1+1} \times 4 \times \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \times 0 \det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} \times 0 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 4 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 6 - 0 = 24$$

ملاحظة:

لتسهيل عملية الحساب نختار السطر أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من الأصفار

مثال: عين مقلوب المصفوفة السابقة.

لدينا $|A| = 24 \neq 0$ اذن المصفوفة قابلة للقلب.

- حساب المصفوفة L^t المرفقة لـ A حسب عناصر المصفوفة L ناتجة من العلاقات التالية:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

أي:

$$L = adj(A) = (\Delta_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

اذن:

$$L = adj(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$L = adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ -16 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

ومنه المصفوفة المرفقة L^t للمصفوفة A هي

$$L^t = (adj(A))^t = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -16 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

بالتالي:

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -16 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ملاحظة:

1) مقلوب مصفوفة مثلثية هو مصفوفة مثلثية

2) محدد مصفوفة مثلثية من النوع (n,n) يساوي لجداء عناصرها القطرية.

3) اذا كان صفين من مصفوفة متساويين اذن محددها معدوم

4) اذا غير صفين من مصفوفة اذن محددها يغير اشارته

5) اذا كان أحد صفوف مصفوفة مضروب بسلمية α فان محددها يكون مضروب بـ α.

6) اذا كان أحد صفوف مصفوفة هو عبارة خطية من الصفوف الأخرى اذن محددها معدوم

7) اذا كان احد صفوف المصفوفة معدوم اذن محددها معدوم

نظرية:

محدد مصفوفة مربعة يساوي محدد منقول هذه المصفوفة اي:

$$|A| = |A^t|$$

ملاحظة:

من هذه النظرية نستنتج اذا الخصائص من 1 - 2 صحيحة كذلك من اجل الاعمدة.