

TD2

Exercice 1. Calculer les limites suivantes si elle existent :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2 - z^2}{z} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|}, \quad \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{(2z + 3)(z - 1)}{z^2 - 2z + 4}.$$

Exercice 2. 1. Montrer que la fonction $u(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ n'a pas de limite quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

2. Montrer les formules suivantes

$$\cos(iz) = \cosh(z), \quad \sin(iz) = i \sinh(z).$$

3. Montrer que $\sin(z)$ et $\cos(z)$ ne sont pas bornées dans \mathbb{C} .

Exercice 3. Calculer

$$1) \sin(1 - i), \quad 2) \ln(-1), \quad 3) 2^i, \quad 4) \ln(1 + i), \quad 5) i^i, \\ 6) \arcsin(i), \quad 7) (\cos(i))^i, \quad 8) (-1)^{\sqrt{2}}.$$

Exercice 4. Résoudre dans \mathbb{C} , les équations suivantes

$$e^{2z+4} = 3\sqrt{3} + 3i, \\ z^2 = 3 + 4i, \\ e^{iz} - (1 + i)e^{-iz} = i.$$

Exercice 5. Montrer que

$$\arctan(z) = \frac{i}{2} [\ln(i + z) - \ln(i - z)].$$

Exercice 6. Indiquer parmi les fonctions suivantes celles qui sont holomorphes

$$f(z) = \operatorname{Im}(z), \quad f(z) = e^{\bar{z}}, \quad f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i, \\ f(z) = (\operatorname{Re}(z))^2.$$

Exercice 7. Indiquer parmi les fonctions suivantes celles qui sont analytiques

$$f(z) = ze^z, \quad f(z) = \bar{z}z^2, \quad f(z) = \sin(3z).$$

Exercice 8. Déterminer les constantes réelles a, b et c telles que la fonction $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$ soit holomorphe dans \mathbb{C} .