I. Rappels mathématiques

I.1. Grandeurs et unités physiques

a- Définition

La Physique "en tant que science" est une activité humaine qui s'intéresse à l'étude rationnelle des phénomènes naturels. C'est à partir de l'observation, de l'expérimentation, de la mathématisation, de l'analyse épistémologique et de la mise en place d'outils conceptuels que le physicien et la physicienne construisent des théories et des modèles dont les prévisions se doivent d'être en accord avec un maximum de phénomènes observés dans la nature ou expérimentés en laboratoire.

Ce terme (Physique) aussi joue un rôle très important en biologie, en médecine puisque les phénomènes comme la montée de la sève dans les végétaux, l'ouïe, la vue, la tension artérielle, …etc. sont des problèmes qui ne peuvent être expliqués sans les lois de la physique.
Les lois physiques sont exprimées par des formules mathématiques. Pour décrire ces lois, la physique fait appel aux notions de grandeurs physiques. Chacune d'elles doit être bien définie et nous devons savoir la mesurer. Il existe deux types de grandeurs:

- Scalaires : la longueur, le temps, comme la masse, …etc ;
- Vectorielles : qui sont caractérisées par un sens, une direction, un module et un point d'application. Par exemple, la vitesse, la force, … etc.

b- Grandeurs fondamentales et grandeurs dérivées

La mesure de quelques grandeurs physiques exige l'utilisation d'étalons préalablement choisis, par exemple, pour mesurer les distances, il faut être en possession d'un étalon de longueur qui est le mètre, pour mesurer le temps, il faut avoir une horloge étalon synchronisée avec la rotation de la terre autour de son axe.

Les étalons de grandeurs physiques ne doivent pas varier pendant la mesure ou au cours du temps. Ils sont conservés au Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) dans les conditions stationnaires. Pour les mesures ordinaires, on se sert des copies fideles de ces étalons. Les grandeurs pour la mesure desquelles on a choisi des étalons sont dites grandeurs fondamentales. Les différentes grandeurs <u>fondamentales</u> doit être minimum parce qu'ils sont très difficiles de contrôler et d'assurer l'invariabilité des étalons dans le temps. Les grandeurs qui restent dont la mesure ramène à celle des grandeurs fondamentales sont dites <u>grandeurs dérivées</u>.

Les grandeurs fondamentales doivent être indépendantes entre elles. Par exemple, la longueur et la masse sont indépendantes mais la longueur et la vitesse ne le sont pas puisque la vitesse dépond de la longueur.

c- Système international d'unités (SI)

L'ensemble des méthodes de mesure et des unités des grandeurs fondamentales constitue ce qu'on appelle un système d'unités. Il existe plusieurs systèmes d'unités mais le plus usuel est le système international (SI) qui repose sur sept grandeurs fondamentales:

Grandeur	**Symbole**	**Unite**
Longueur	L	Mètre (m)
Masse	M	Kilogramme (Kg)
Temps	T	Seconde (S)
Intensité de courant électrique	I	Ampère (A)
Température thermodynamique	θ	Kelvin (K)
Quantité de matière	N	Mole (mol)
Intensité lumineuse	J	Candela (cd)

Ils existent aussi d'autres grandeurs supplémentaires:

Angle plan	A	Radian (rd)
Angle solide	Ω	Stéradian (sr)

Par souci de commodité, certaines unités dérivées ont reçu un nom spécial et un symbole particulier. Ces noms et symboles peuvent eux-mêmes être utilises pour exprimer d'autres unités dérivées. Les noms spéciaux et les symboles particuliers permettent d'exprimer, sous une forme condensée, des unités fréquemment utilisées.

Le tableau suivant donne des unités dérivées fréquemment utilisées en physique et qui ont un nom spécifique:

Grandeur dérivée	**Unite**	**SI**
Fréquence	Hertz (Hz)	S^{-1}
Force	Newton (N)	$m.Kg.S^{-2}$
Pression	Pascal (Pa (=$N.m^{-2}$))	$m^{-1}.Kg.S^{-2}$
Différence de potentiel électrique	Volt (V (=$W.A^{-1}$))	$m^{2}.kg.S^{-3}.A^{-1}$

Le tableau ci-dessous donne quelques exemples d'unités dérivées mais qui n'ont pas reçu de nom spécifique:

Grandeur dérivée	**Unite**	**SI**
Tension superficielle	Newton par mètre (N/m)	$Kg.S^{-2}$
Viscosité	Pascal. Seconde (Pa.S)	$m^{-1}.Kg.S^{-1}$
Champ électrique	Volt par mètre (V/m)	$m.Kg.S^{-3}.A^{-1}$

Il existe aussi des unités en dehors du SI dont la valeur en unité SI est obtenue expérimentalement comme la suivante:

Nom	Symbole	Valeur en unités SI
Électronvolt	eV	1 eV = 1,06021773349.10-19 J
Unite de masse atomique	u	1 u = 1,660540210.10-27 Kg
Unite astronomique	ua	1 ua = 1,4959787069130.1011 m

I.2. Analyse dimensionnelle

I.2.1. Dimension

Concernant les unités, nous utilisons le système international noté SI ou MKSA pour Mètre Kilogramme Seconde Ampère.

a- Définition

La dimension est la grandeur physique associée à un objet physique indépendamment de l'unité utilisée pour la mesure de l'objet. Ainsi :
- la dimension « longueur » sera notée L et son unit´e m;
- la dimension « masse » sera notée M et son unité kg.
- la dimension « temps » sera notée T et son unité s.

On dit que deux quantités physiques sont « homogènes » si elles ont la même dimension.
Toute grandeur dérivée **G** peut être exprimée en fonction des grandeurs fondamentales (Longueur, Masse, Temps, Intensité de courant,…) selon l'expression suivante:

$$[G] = L^a M^b T^c I^d \theta^e \mu^f J^j$$

Avec : a, b, c et d sont des nombres réels. L'expression $[G] = L^a M^b T^c I^d$ est l'*équation aux dimensions* de la grandeur G.

Exemples:

- La vitesse v d'un objet est le rapport d'une longueur sur un temps, on écrit alors: $[v] = L\ T^{-1}$. On utilise des crochets [ ] pour exprimer le fait qu'on ne s'intéresse qu'`a la dimension de l'objet considéré.
- L'accélération a pour dimension: $[\gamma] = \mathrm{L\ T^{-2}}$.

L'analyse dimensionnelle va nous permettre de retrouver facilement les formules physiques et d'éviter les erreurs dues aux unités puisque toutes les relations entre les grandeurs physiques sont homogènes de point de vue dimensions.

Remarque: Certaines grandeurs dérivées G sont définies par une équation aux grandeurs telle que tous les exposants dimensionnels entrant dans l'expression de la dimension de G sont égaux à zéro. En particulier, pour une grandeur définie comme le rapport entre deux grandeurs de même nature. Ces grandeurs sont décrites comme étant *sans dimension*, ou *de dimension un*.

b- Homogénéité d'un résultat

Une équation est dite *homogénéité* si ses deux membres ont la même dimension.

Remarque: Tout résultat non homogène est nécessairement faux. Par contre, un résultat homogène n'est pas forcement le bon.

***Exemples*:**

1- Comme chacun sait, *Einstein* a trouvé que l'énergie $E = m.c^2$ et on va vérifier l'homogénéité de cette équation d'Einstein :

On a:

- $[E] = M.L^2.T^{-2}$
- $[mc^2] = [m].[c^2] = M.L^2.T^{-2}$

On peut dire l'équation d'Einstein est homogène du point de vue analyse dimensionnelle.

2- Vérification de l'homogénéité de l'équation: $E = 4mc^2$, On a :

- $[E] = M\ L^2\ T^{-2}$
- $[4mc^2] = [m].[c^2] = M\ L^2\ T^{-2}$

On peut dire l'équation précédente est homogène du point de vue analyse dimensionnelle. Un résultat bon mais avec une équation fausse.

c- Règles d'homogénéité

- On ne peut additionner que des termes homogènes ;
- L'argument d'une fonction mathématique transcendante (exp, ln, cos, sin, tan. . .) est nécessairement sans dimension ;
- On doit éviter de remplacer le symbole d'une grandeur par sa valeur numérique ;
- Un vecteur ne peut être ajouté qu'à un vecteur et non à un scalaire.

I.2.2. Changement de systèmes de grandeurs

Pour écrire l'équation aux dimensions d'une grandeur donnée G dans un système de grandeurs fondamentales quelconques différent du SI, on procède comme suit :

- Ecrire l'équation aux dimensions de la grandeur G dans le SI et dans le nouveau système avec des exposants inconnus ;
- Ecrire les équations aux dimensions de toutes les grandeurs du nouveau système dans le SI ;
- Déterminer les inconnus par l'analyse dimensionnelle en respectant l'homogénéité des expressions ;
- Ecrire l'équation aux dimensions de G dans le nouveau système d'unités.

Exemple:

Supposons que l'on prenne pour grandeurs fondamentales la force (F), la masse volumique (ρ) et la fréquence (N). Quelles sont alors les dimensions de l'énergie E et de la force F?

Solution:

Les dimensions habituelles de l'énergie sont:

$$[E] = L^2\, M\, T^{-2}$$

Évaluons Les dimensions de *L, M et T* en fonction des nouvelles grandeurs fondamentales. Des relations:

$$[P] = L^{-1}\, M\, T^{-2} \ , \quad \rho = L^2\, M\, T^{-2} \ , \qquad [N] = T^{-1}$$

On tire:

$$[T] = N^{-1}$$

$$\frac{P}{\rho} = L^2\ T^{-2} \rightarrow [L] = P^{1/2}\ \rho^{-1/2}\ N^{-1}$$

Et $[M] = \rho[L^3] \rightarrow [M] = P^{3/2}\ \rho^{-1/2}\ N^{-3}$

Les dimensions de E sont alors:

$$[E] = P^{5/2}\ \rho^{-3/2}\ N^{-3}$$

Et celle de F:

$$[F] = M\ L\ T^{-2}$$

Soit:

$$[F] = P^2\ \rho^{-1}\ N^{-2}$$

I.3. Incertitudes et calculs d'erreurs

En métrologie, l'erreur de mesure qui représente la différence entre la valeur mesurée et la valeur exacte (bien souvent inconnue) d'une grandeur physique joue un rôle primordial dans toutes les sciences des mesures quantitatives. En outre, dans ce chapitre nous essayons de définir et d'éclairer la notion d'incertitude de mesure à nos étudiants pour qu'ils ne confondre pas entre termes calcul d'incertitude et calcul d'erreur.

a- Incertitudes

Lorsqu'on mesure une grandeur physique quelconque *G*, on ne peut jamais obtenir une valeur exacte, mais une valeur plus ou moins approximative. La différence entre la valeur mesurée et la valeur exacte est appelée erreur. Mais comme nous ne connaissons pas la valeur exacte, nous ne pouvons pas connaître l'erreur commise et le résultat est encore incertain. Pour cette raison, il faut parler des incertitudes de mesure ΔG qui apparaissent dans l'expression ci-dessous:

$$G = G_{ex} \pm \Delta G$$

Exemple : lorsqu'on désire mesurer une longueur $\boldsymbol{L}$ à l'aide d'une règle graduée, la valeur numérique obtenue est 5.32 m et on suppose que l'incertitude de mesure est évaluée à 0.02 m, le résultat de la mesure est donc écrit sous la forme [3]:

$$L = (5.32 \pm 0.02)\, m.$$

b- Erreurs

Lors des mesures physiques, il existe plusieurs types d'erreurs:

- ***Les erreurs systématiques***: qui restent essentiellement les mêmes lorsqu'on travail dans des conditions identiques.
- ***Les erreurs accidentelles ou fortuites***: qui se produisent toujours, sont souvent dues à des causes difficiles à connaître telles que: vibrations, variations temporaires de température, mauvais contacts dont la résistance électrique en fonction du courant et du temps. Cependant, les erreurs de nature aléatoire ne peuvent être résolues qu'en répétant des mesures avec des calculs de moyennes justifiés par des considérations statistiques.
- ***Les erreurs personnelles***: qui sont imputables à toutes les fautes physiques et intellectuelles de l'expérimentateur. Par exemple, lors de la lecture des erreurs indiquées sur l'équipement utilisé. Ainsi que les erreurs obtenues dans la valeur donnée par l'appareil de mesure, où cette erreur est due à la relation : $X_m = \frac{C\, X_m}{100}$ (%) avec C représente le calibre utilisé dans la mesure qui se trouve sur chaque appareil et qui indique la plus grande erreur absolue commise.

c- Calcul d'erreur-incertitude

Lorsque nous répétons plusieurs fois la mesure d'une quantité physique G, on obtient des nombres légèrement différents. Si nous notons que X est la valeur exacte (vraie) de G et X_{ex} est le résultat expérimentale de la mesure, la différence $\delta G = X - X_{ex}$ est appelée erreur absolue de la mesure. Comme cette erreur n'étant pas connue, on il faut rechercher une limite supérieure ΔG, appelée incertitude absolue, telle que $|\delta G| = \Delta G$.

Remarque: le rapport $\frac{\boldsymbol{\Delta G}}{\boldsymbol{G}}$ est appelé incertitude relative.

d- Théorème des erreurs-incertitudes

Soit une grandeur physique G, que l'on voudrait mesurer indirectement (c'est-à-dire pour obtenir sa valeur on doit mesurer d'autres grandeurs reliées par une loi physique). Exemple : pour calculer l'aire d'un rectangle donnée par la relation: $G = L.l$, on mesure la longueur L et la largeur l du rectangle et on en déduit la valeur de G.
Supposons maintenant que G est liée aux grandeurs physique indépendantes *x, y, z* par une relation : $G = f(x, y, Z)$

On écrit la différentielle totale de cette fonction: $\partial f = \frac{\partial f}{\partial x}\partial x + \frac{\partial f}{\partial y}\partial y + \frac{\partial f}{\partial z}\partial z$, avec $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\ et\ \frac{\partial f}{\partial z}$ sont respectivement les dérivées partielles de la fonction f par rapport aux variables x, y, z

Où $\frac{\partial f}{\partial x}$: représente la dérivée de f par rapport à x quand y et z sont supposés constants.

Le principe du calcul d'erreurs est basé sur le faite d'assimiler les erreurs absolues $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (erreurs absolues sur les variables x, y ou z) aux valeurs absolues des différentielles dx, dy, dz comme suit $\Delta x = |dx|, \Delta y = |dy|$ et $\Delta z = |dz|$.

Puisque le sens des erreurs n'est pas connu, il est nécessaire de prendre les différentielles et les dérivées partielles en valeur absolue, donc la relation fondamentale de l'erreur est donnée par : $\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial Z}\right|\Delta Z$

I. 4. Quelques applications

a- Cas d'une somme ou d'une différence

Soit la fonction f définie par: $f = x + y - z$, qui nous permet d'écrire $\frac{\partial f}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial f}{\partial Z}\ -1.$

Donc l'erreur de Δf s'écrit comme

$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial Z}\right|\Delta Z \Longrightarrow \Delta f = \Delta x + \Delta y + \Delta Z$

b- Cas d'un produit, d'un rapport ou d'une puissance

Soit la fonction G définie par: $G = k\frac{x^a y^b}{z^c}$

Où x, y et z sont des grandeurs que l'on mesure et k, a, b et c sont des constantes.

Dans ce cas, l'incertitude relative du résultat est obtenue en utilisant la procédure suivante : On applique la fonction logarithme aux deux membres de la relation

$$\log G = \log\left(k\frac{x^a y^b}{z^c}\right) = \mathrm{a}\log x + b\log \mathrm{y} - \mathrm{c}\log \mathrm{Z}$$

Ensuite, nous appliquons la dérivée différentielle suivante:

$$\frac{\partial G}{G} = a\frac{\partial x}{x} + b\frac{\partial y}{y} - c\frac{\partial Z}{Z}$$

Enfin, nous aurons l'incertitude relative suivante:

$$\frac{\Delta G}{G} = a\frac{\Delta x}{x} + b\frac{\Delta y}{y} + c\frac{\Delta Z}{Z}$$

TD N°01- Rappels mathématiques-

Exercice 01:

La force d'attraction qui s'exerce entre deux points matériels de masse m et m', séparés par une distance *r*, est donné en module par la loi de *Newton*:

$$F = G\,\frac{m\,m'}{r^2}$$

-Donner les dimensions de la constante de gravitation G.

Exercice 02:

La valeur moyenne $\langle E\rangle$ de l'énergie cinétique totale de translation des molécules d'un gaz est donnée par:

$$\langle E\rangle = \frac{3}{2}\,K_B\theta$$

Où θ représente la température absolue.

-Quelles sont les dimensions de la constante de Boltzmann K_B?

Exercice 03:

L'expérience démontre que la force subie par une sphère immergée dans un fluide en mouvement dépend du coefficient de viscosité η du fluide, du rayon *r* de la sphère et de leur vitesse relative *v*.

-Trouver l'expression de cette force en la supposant de la forme: $F = K\eta^x r^y v^Z$

Où *K* est un coefficient numérique sans dimension. On rappelle que $[\eta] = L^{-1}M\,\mathrm{T}^{-1}$.

Exercice 04:

Soit un pendule simple avec la loi suivante: $\mathrm{g} = 4\pi^2\mathrm{l}\,/\,\mathrm{T}^2$, on mesure la longueur l et la période *T*, on trouve les valeurs: $l = (1 \pm 0.001)$ m et $T = (2 \pm 0.004)$ s.

1-Donnez le résultat de la mesure de la pesanteur $(\mathrm{g}_0 = \pm\,\Delta\mathrm{g}\,)$ et sa précision $\frac{\Delta \mathrm{g}}{\mathrm{g_m}}$ En mesurant la densité volumique ρ, la hauteur h et la masse d'un cylindre, on obtient :

$\rho = (2 \pm 0.002)\ \mathrm{g}/cm^3$, $h = (9.97 \pm 0.001)$ cm, m $= (1578.5 \pm 0.5)$ g.

2-Démontrez la valeur mesurée de rayon *r* du cylindre.

Exercice 05:

La mesure de la hauteur *h* et de diamètre *D* d'un cylindre à l'aide d'un pied à coulisse a donnée *h = D = 4.000* $\pm\ 0.005\ cm$.

-Calculer le volume du cylindre avec son incertitude absolue.

TD N°01-Réponses des exercices:

Exercice 01:

-Comme: $[F] = [m\gamma] = ML\,T^{-2} \rightarrow [G] = \frac{[F][r]^2}{[m][m']} = (LMT^{-2})(L^2)(M^{-1})(M^{-1}) = L^3M^{-1}T^{-2}$

Exercice 02:

-De: $K_B = \frac{2\langle E\rangle}{3\theta} \rightarrow [K_B] = \frac{[\langle E\rangle]}{[\theta]} = L^2M\,T^{-2}\theta^{-1}$

Exercice 03:

- On a: $[F] = [K][\eta^x][r^y][v^Z] \rightarrow L\,M\,T^{-2} = (L^{-1}M\,T^{-1})^x L^y L^Z T^{-Z}$

Par identification, on tire: x = 1; y = 1 et Z = 1 → $F = K\,\eta\,r\,v$ *(c'est la formule de Stokes).*

Exercice 04:

1- $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \rightarrow ln(g) = ln\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2}\right) \rightarrow \frac{\Delta g}{g_m} = \frac{\Delta l}{l_m} + |-2|\frac{\Delta r}{r_m}$ *avec* $g_m = \frac{4\pi^2 l_m}{r^2{}_m} = \pi^2 = 9.87\ ms^{-2}$

$\rightarrow \Delta g = g_m\left(\frac{\Delta l}{l_m} + 2\frac{\Delta r}{r_m}\right) \approx 0.05\ ms^{-2} \rightarrow g = (9.87 \pm O.05)\ ms^{-2}$ *et* $\frac{\Delta g}{g_m} = 5.10^{-3} = 0.5\%$

Exercice 05:

-Volume d'un cylindre: $V = \pi\frac{D^2}{h} = 3.14 * \frac{4^2}{4} * 4 = 50.24\ cm^2$

-Incertitude absolue: $\Delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial D}\right|\Delta D + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right|\Delta h = \frac{2\pi Dh}{4}\ \Delta D + \frac{\pi D^2}{4}\Delta h = 0.19\ cm^2$

-Résultat avec son incertitude: $V = (50.24 \pm\ 0.19\ )\ cm^2$