Université Med Khider Biskra

Département de Mathématiques

Gherbal Boulakhras

Cours d'analyse 2 (les équations différentielles du deuxième ordre)

**الفصل 4: المعادلات التفاضلية من الدرجة اثانية**

## Les équations différentielles du deuxième (second) ordre

## I-1- المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية

**تعريف:** ليكن D جزء غير خال من الجداء الديكارتي RxR و f تطبيق من D نحو R، نسمي المعادلة: $y''=f(x,y,y')$ بمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية. نسمي حلا لهذه المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية السابقة كل دالة $f: I\rightarrow R$ قابلة للاشتقاق مرتين على I بحيث:من اجل كل

$$x \in I ;(x,y(x)) \in D :y''(x)=f(x,y(x),y'(x)).$$

## I-2-المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية الخطية

## Equation différentielle de deuxième ordre linéaire

**تعريف:** لتكن a,b,c,d اربعة دوال مستمرة من I نحو R، نسمي المعادلة التفاضلية التالية:

$$a(x)y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x)=d(x)\ldots\ldots\ldots(E)$$

بمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية خطية. نسمي حلا لهذه المعادلة كل دالة f معرفة من I الى R وقابلة للاشتقاق مرتين بحيث: من اجل كل $x \in I$

$$a(x)f''(x)+b(x)f'(x)+c(x)y(x)=d(x).$$

*اذا كانت d هي الدالة الصفرية (المعدومة) على I (اي من اجل كل $x \in I$: $d(x)=0$ ) فان المعادلة (E) تصبح تسمى معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية متجانسة.

*نسمي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية متجانسة مرفقة للمعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية الخطية (E) المعادلة:

$$a(x)y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x)=0\ldots\ldots\ldots(E_0).$$

وتسمى ايضا معادلة تفاضلية خطية بدون الطرف الثاني.

**ملاحظة:** اذا كانت الدالة a لا تنعدم على I فان المعادلة التفاضلية من الدرجة الاولى الخطية (E) يمكن كتابتها كالتالي:

$$Y''(x)=\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\lambda(x).$$

حيث ان $\beta,\lambda$ و $\alpha$ دالتين مستمرتين على I.

## II- حل المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية ذات معاملات ثابتة

## Résolution des équations différentielles de second ordre à coefficients constants

### 1-II حل المعادلات التفاضلية المتجانسة

### Résolution des équations différentielles homogènes

لتكن a,b,c ثلاث أعداد مركبة مع $(a\neq 0)$ و لنعتبر $(E_0)$ المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية المتجانسة التالية:

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0,\ldots\ldots(E_0)$$

**نظرية 1:** *من اجل* $r\epsilon C$ الدالة $\psi_r(x)=e^{rt}$ : $\psi_r$ *تكون حلا للمعادلة التفاضلية المتجانسة* $(E_0)$ *إذا وفقط إذا كان* : $ar^2+br+c=0$

*هذه المعادلة الاخيرة تسمى بالمعادلة المميزة للمعادلة المتجانسة* $(E_0)$

*(l'équation caractéristique de* $(E_0)$*)*

<u>البرهان:</u>

$\psi_r$ حلا للمعادلة $(E_0)$ يعني

$$a\,\psi_r''(x)+b\,\psi_r'(x)+c\,\psi_r(x)=0,$$

ومنه

$$a\,r^2\,\psi_r(x)+br\,\psi_r(x)+c\,\psi_r(x)=0,$$

وبالتالي

$$\psi_r(x)(a\,r^2 + br + c) = 0,$$

وبما أن $\psi_r(x)=e^x \neq 0$, فإن

$$a\,r^2 + br + c = 0.$$

**1- <u>الحل في الحالة العقدية (cas complexe)</u>**

**<u>نظرية 1:</u>**

**1,** إذا قبلت المعادلة المميزة $(a\,r^2 + br + c = 0)$ جذرين مختلفين $r'$ و $r''$ فإن حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الثانية $(E_0)$ تعطى ب:

$$x \rightarrow \lambda_1 e^{r'x} + \lambda_2 e^{r''x},\ \lambda_1, \lambda_2 \in C.$$

**2,** إذا قبلت المعادلة المميزة $(a\,r^2 + br + c = 0)$ جذرا مضاعفا $r_0$ فإن حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الثانية $(E_0)$ تعطى ب:

$$x \rightarrow e^{r_0 x}(\lambda_1 + \lambda_2 x),\ \lambda_1, \lambda_2 \in C.$$

**2-<u>الحل في الحالة الحقيقية (cas réel)</u>**

**<u>نظرية 2:</u>** لتكن المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية المتجانسة:

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \ldots\ldots (E_0)$$

نفرض أن $a,b,c$ أعداد حقيقية.

**1,** إذا قبلت المعادلة المميزة $(a\,r^2 + br + c = 0)$ جذرين حقيقين مختلفين $r'$ و $r''$ فإن حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الثانية $(E_0)$ تعطى ب:

$$x \rightarrow \lambda_1 e^{r'x} + \lambda_2 e^{r''x},\ \lambda_1, \lambda_2 \in R.$$

**2,** إذا قبلت المعادلة المميزة $(a\,r^2 + br + c = 0)$ جذرا حقيقيا مضاعفا $r_0$ فإن حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الثانية $(E_0)$ تعطى ب:

$$x \rightarrow e^{r_0 x}(\lambda_1 + \lambda_2 x),\ \lambda_1, \lambda_2 \in R.$$

**3,** إذا قبلت المعادلة المميزة $(a\,r^2 + br + c = 0)$ جذرين مركبين مترافقين $\alpha \pm \beta i$ فإن حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الثانية $(E_0)$ تعطى ب:

$$x \rightarrow \lambda_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + \lambda_2 e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \lambda_1, \lambda_2 \in R.$$

مثال1: حل المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية المتجانسة التالية:

$$y''(x)+4y'(x)-5y(x)=0,\ldots..(E_0).$$

المعادلة المميزة المرفقة لها تعطى ب

$$r^2+4r-5=0,$$

تقبل جذرين مختلفين وهما 1 و (-5) وبالتالي حسب النظرية 2 المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الثانية $(E_0)$ تقبل حلول من الشكل

$$y(x)= \lambda_1 e^x+ \lambda_2 e^{-5x}, \lambda_1, \lambda_2 \epsilon R.$$

مثال2: حل المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية المتجانسة التالية:

$$y''(x)-2y'(x)+y(x)=0,\ldots..(E_0).$$

المعادلة المميزة المرفقة لها تعطى ب

$$r^2-2r+1=0,$$

تقبل 1 كجذرا مضاعفا وبالتالي حسب النظرية 2 المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الثانية $(E_0)$ تقبل حلول من الشكل

$$Y(x)=e^x (\lambda_1+ \lambda_2 x), \lambda_1, \lambda_2 \epsilon R.$$

مثال3: حل المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية المتجانسة التالية:

$$y''(x)+2y'(x)+2y(x)=0,\ldots..(E_0).$$

المعادلة المميزة المرفقة لها تعطى ب

$$r^2+2r+2=0,$$

تقبل جذرين مركبين مترافقين (-1+i) و (-1-i) وبالتالي حسب النظرية 2 المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الثانية $(E_0)$ تقبل حلول من الشكل

$$y(x)=e^{-x} (\lambda_1 \cos x+ \lambda_2 \sin x), \lambda_1, \lambda_2 \epsilon R.$$

## II-2- حل المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية مع الطرف الثاني

## Résolution des équations différentielles de deuxième ordre linéaires avec seconde membre

لتكن a,b,c أعداد مركبة و d دالة مستمرة على I نحو R و نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية التالية:

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=d(x),\ldots\ldots.(E)$$

مما سبق وجدنا حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الثانية $(E_0)$ المرفقة للمعادلة التفاضلية (E) وبالتالي لإيجاد حلول المعادلة (E) يكفي أن نجد حلا خاصا ل(E)

1. الحالة لما الدالة d تكون دالة كثير حدود (d est une fonction polynôme)

نبحث في هذه الحالة على حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية (E) على شكل كثير حدود. نلاحظ أنه إذا كان y كثير حدود ذو درجة $p\epsilon R$ فإن $ay''+by'+cy$ هو كثير حدود

أ- من الدرجة p إذا كان $c\neq 0$.
ب-من الدرجة p-1 إذا كان $c=0,b\neq 0$.
ت- من الدرجة p-2 إذا كان $c=b=0$.

**قضية 1 :** إذا كان P كثير حدود من الدرحة n فالمعادلة التفاضلية التالية

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=P(x),\ldots\ldots.(E)$$

تقبل حل خاص في شكل كثير حدود من الدرجة

* n إذا كان $c\neq 0$.

* n+1 إذا كان $c=0,b\neq 0$.

* n+2 إذا كان $c=b=0$.

2. الحالة لما الدالة d تعطى ب $d(x)=e^{mx}P(x),m\epsilon C$

إذا كان الطرف الثاني d بالشكل $d(x)=e^{mx}\varphi(x)$ فنضع $y(x)=e^{mx}Z(x)$ والمعادلة التفاضلية

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=e^{mx}\,\varphi(x),\ldots\ldots.(E)$$

تصبح بعد التبسيط

$$aZ''(x)+(2am+b)Z'(x)+(am^2+bm+c)Z(x)=\varphi(x),\ldots\ldots.(E')$$

ولإيجاد حل خاص ل (E) يكفي أن نجد حلا خاصا ل (E') باعتبار أن $\varphi(x)$ كثير حدود.

<u>**قضية 2 :**</u> إذا كان m عددا مركبا و P كثير حدود من الدرجة n يمكن إيجاد حل خاص للمعادلة التفاضلية

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=e^{mx}P(x),\ldots\ldots.(E)$$

من الشكل $y(x)=e^{mx}\varphi(x)$ أين $\varphi(x)$ هو كثير حدود :

- من الدرجة n إذا كان m ليس جذرا للمعادلة المميزة

$$Ar^2+br+c=0\ .$$

- من الدرجة n+1 إذا كان m جذرا بسيطا للمعادلة المميزة

$$Ar^2+br+c=0\ .$$

- من الدرجة n+2 إذا كان m جذرا مضاعفا للمعادلة المميزة

$$Ar^2+br+c=0\ .$$

<u>مثال 4.</u> لتكن المعادلة التفاضلية التالية:

$$y''(x)-4y'(x)+3y(x)=e^{-x}(2x+1),\ldots\ldots.(E)$$

نبحث عن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة ل (E) وهي:

$$y''(x)-4y'(x)+3y(x)=0,\ldots\ldots.(E_0)$$

وبالتالي المعادلة المميزة المرفقة هي:

$$r^2-4r+3=0,$$

تقبل جذرين مختلفين 1 و 3 وبالتالي حلول المعادلة المتجانسة $(E_0)$ تعطى بالدوال التالية:

$$y(x)=\lambda_1e^{x}+\lambda_2e^{3x},\ \lambda_1,\lambda_2\in R.$$

الآن نبحث عن حل خاص للمعادلة التفاضلية (E)

بما أن $m=-1$ ليس جذرا للمعادلة المميزة : $r^2-4r+3=0$ فإننا في هذه الحالة نبحث عن حل خاص ل (E) من الشكل :

$$f_0(x)=(ac+b)e^{-x}.$$

أي $\varphi(x)=ax+b$ من نفس درجة كثير الحدود $P(x)=2x+1$ وبالتالي:

$$f_0(x)=(ax+b)e^{-x}$$
$$f_0'(x)=-a\, e^{-x} -(ax+b)e^{-x}=(a-b-ax)\, e^{-x}.$$
$$f_0''(x)=-a\, e^{-x} -(a-b-ax)e^{-x}=(-2a+b+ax)\, e^{-x}.$$

نعوض في المعادلة التفاضلية (E) نجد:

$$(-2a+b+ax)\, e^{-x}-4\,(a-b-ax)\, e^{-x}+3(ax+b)\, e^{-x}=(2x+1)\, e^{-x}.$$

وبالتالي

$$(-6a+8b+8ax)\, e^{-x}=(2x+1)\, e^{-x}.$$

وبالمطابقة نجد:

$$-6a+8b=1\rightarrow 8b=1+6a=1+6/4=2/5\rightarrow b=5/16.$$

$$8a+0b=2\rightarrow a=1/4.$$

ومنه الحل الخاص ل (E) هو $f_0(x)=(x/4+5/16)e^{-x}$

وينتج مما سبق أن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية مع الطرف الثاني (E) هو

$$y(x)=(x/4+5/16)e^{-x}+ \lambda_1 e^{x}+ \lambda_2 e^{3x},\ \lambda_1, \lambda_2 \in R.$$

<u>مثال 5.</u> لتكن المعادلة التفاضلية التالية:

$$y''(x)-4y'(x)+3y(x)=e^{x}\,(2x+1),\ldots\ldots.(E)$$

نبحث عن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة ل (E) وهي:

$$y''(x)-4y'(x)+3y(x)=0,\ldots\ldots.(E_0)$$

وبالتالي المعادلة المميزة المرفقة هي:

$$r^2-4r+3=0,$$

تقبل جذرين مختلفين 1 و 3 وبالتالي حلول المعادلة المتجانسة ($E_0$) تعطى بالدوال التالية:

$$y(x)=\lambda_1 e^x+\ \lambda_2 e^{3x},\ \lambda_{1,}\ \lambda_2 \epsilon R.$$

الآن نبحث عن حل خاص للمعادلة التفاضلية (E)

بما أن $m=1$ جذرا للمعادلة المميزة : $r^2-4r+3=0$ فإننا في هذه الحالة نبحث عن حل خاص ل (E) من الشكل :

$$f_0(x)=(ax^2+bx)e^x.$$

أي $\varphi(x)=ax^2+bx$ من درجة كثير الحدود $P(x)=2x+1$ زائدة واحد (أي $n+1$ ) وبالتالي:

$$f_0(x)=(ax^2+bx)e^x$$

$$f_0'(x)=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx)e^x=(ax^2+(2a+b)x+b)e^x.$$

$$f_0''(x)=(2ax+2a+b)e^x+(ax^2+(2a+b)x+b)e^x$$

$$=(ax^2+(4a+b)x+2a+2b)e^x.$$

نعوض في المعادلة التفاضلية (E) نجد:

$$(ax^2+(4a+b)x+2a+2b)e^x-4(ax^2+(2a+b)x+b)e^x+(ax^2+bx)e^x$$

$$=(2x+1)\ e^x.$$

ومنه

$$(-4ax+2a-2b)e^x=(2x+1)\ e^x.$$

وبالمطابقة نجد:

$$-4a=2\rightarrow a=-1/2.$$

$$2a-2b=1\rightarrow 2b=2a-1=-1-1=-2\rightarrow b=-1.$$

ومنه الحل الخاص ل (E) هو $f_0(x)=((-1/2)x^2-x)e^x$

وينتج مما سبق أن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية مع الطرف الثاني (E) هو

$$y(x)=\ )=((-1/2)x^2-x)e^x+\lambda_1 e^x+\ \lambda_2 e^{3x},\ \lambda_{1,}\ \lambda_2 \epsilon R.$$

المثال 6. لتكن المعادلة التفاضلية التالية:

$$y''(x)-2y'(x)+y(x)=e^x (x-1),\ldots\ldots.(E)$$

نبحث عن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة ل (E) وهي:

$$y''(x)-2y'(x)+y(x)=0,\ldots\ldots.(E_0)$$

وبالتالي المعادلة المميزة المرفقة هي:

$$r^2-2r+1=0,$$

تقبل جذرا مضاعفا وهو 1 وبالتالي حلول المعادلة المتجانسة $(E_0)$ تعطى بالدوال التالية:

$$y(x)=(\lambda_1+\ \lambda_2\,x)e^x,\ \lambda_{1,}\ \lambda_2 \epsilon R.$$

الآن نبحث عن حل خاص للمعادلة التفاضلية (E)

بما أن $m=1$ جذرا مضاعفا للمعادلة المميزة : $r^2-2r+1=0$ فإننا في هذه الحالة نبحث عن حل خاص ل (E) من الشكل :

$$f_0(x)=(ax^3+bx^2)e^x.$$

أي $\varphi(x)=ax^3+bx^2$ من درجة كثير الحدود $P(x)=x-1$ زائدة إثنان (أي $n+2$ ) وبالتالي:

$$f_0(x)=(ax^3+bx^2)e^x.$$

$$f_0'(x)=(3ax^2+2bx)e^x+(ax^3+bx^2)e^x=(ax^3+(3a+b)x^2+2bx)e^x.$$

$$f_0''(x)=(3ax^2+2(3a+b)x+2b)e^x+(ax^3+(3a+b)x^2+2bx)e^x$$

$$=(ax^3+(6a+b)x^2+(6a+4b)x+2b)e^x.$$

نعوض في المعادلة التفاضلية (E) نجد:

$$(ax^3+(6a+b)x^2+(6a+4b)x+2b)e^x-2(ax^3+(3a+b)x^2+2bx)e^x+(ax^3+bx^2)e^x$$

$$=(x-1)\,e^x.$$

ومنه

$$(6ax+2b)e^x=(x-1)\, e^x.$$

وبالمطابقة نجد:

$$6a=1 \rightarrow a=1/6.$$

$$2b=-1 \rightarrow b=-1/2.$$

ومنه الحل الخاص ل (E) هو $f_0(x)=((1/6)x^3-x^2/2)e^x$

وينتج مما سبق أن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية مع الطرف الثاني (E) هو

$$y(x)= ((1/6)x^3-x^2/2)e^x+( \lambda_1+ \lambda_2 x)e^x,\ \lambda_1, \lambda_2 \epsilon R.$$

1.2 مبدأ التراكب (principine de superposition)

يعتمد مبدأ التراكب على مايلي:

إذا كانت الدالة $f_1$ حلا للمعادلة التفاضلية:

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=d_1(x),$$

و كانت الدالة $f_2$ حلا للمعادلة التفاضلية:

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=d_2(x),$$

فإن الدالة $\lambda_1 f_1+ \lambda_2 f_2$ هي حلا للمعادلة التفاضلية:

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)= \lambda_1 d_1(x)+ \lambda_2 d_2(x),\ \lambda_1, \lambda_2 \epsilon R.$$

مثال 7. أوجد على R حلول المعادلة التفاضلية التالية:

$$y''(x)-4y'(x)+3y(x)=(2x+1)sh(x),\ldots\ldots.(E)$$

ولقد وجدنا في مثالين سابقين أن المعادلة التفاضلية:

$$y''(x)-4y'(x)+3y(x)=(2x+1)e^x,$$

تقبل حلا خاصا من الشكل:

$$f_1(x)=(-x^2/2-x)e^x,$$

والمعادلة التفاضلية:

$$y''(x)-4y'(x)+3y(x)=(2x+1)e^{-x},$$

تقبل حلا خاصا من الشكل:

$$f_2(x)=(x/4-(5/16))e^{-x},$$

وبالتالي نستنتج أن المعادلة التفاضلية:

$$y''(x)-4y'(x)+3y(x)=(2x+1)sh(x),\ sh(x)=(e^x-e^{-x})/2.$$

تقبل حلا خاصا من الشكل:

$$f_0(x)=(1/2)f_1(x)-(1/2)f_2(x)=((-x^2)/4-(x/2)e^x-(x/8+(5/32))e^{-x}.$$

ووجدنا أن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة للمعادلة

$$y''(x)-4y'(x)+3y(x)=0,\ldots..(E_0)$$

تقبل حلول من الشكل

$$y(x)=\lambda_1e^x+\lambda_2e^{3x},\ \lambda_1,\ \lambda_2\epsilon R.$$

وبالتالي الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) هو:

$$y(x)=((-x^2)/4-(x/2)e^x-(x/8+(5/32))e^{-x}+\lambda_1e^x+\lambda_2e^{3x},\ \lambda_1,\ \lambda_2\epsilon R.$$

3.الحالة لما الدالة تعطى ب:

$$d(x)=e^{ux}(\cos(vx)P(x)+\sin(vx)Q(x)).$$

بما أن $\cos(vx)$ و $\sin(vx)$ هما عبارتين خطيتين لكل من $e^{ivx}$ و $e^{-ivx}$ فباستعمال مبدأ التراكب يمكننا حل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية مع الطرف الثاني من الشكل:

$e^{(u+iv)x}P(x)$ حيث $P(x)$ كثير حدود.

مثال 8. حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y''(x)-4y'(x)+3y(x)=xe^x\cos x,\ldots..(E)$$

نبحث في البداية على حلول المعادلة التفاضلية التالية:

$$y''(x)-4y'(x)+3y(x)=xe^{(1+i)x},\ldots..(E_1)$$

نبحث عن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة ل $(E_1)$ وهي:

$$y''(x)-4y'(x)+3y(x)=0,\ldots\ldots.(E'_0)$$

وبالتالي المعادلة المميزة المرفقة هي:

$$r^2-4r+3=0,$$

تقبل جذرين مختلفين 1 و 3 وبالتالي حلول المعادلة المتجانسة $(E'_0)$ تعطى بالدوال التالية:

$$y(x)=\lambda_1e^x+\lambda_2e^{3x},\ \lambda_1,\ \lambda_2\epsilon R.$$

الآن نبحث عن حل خاص للمعادلة التفاضلية $(E_1)$

بما أن $m=i+1$ ليس جذرا للمعادلة المميزة : $r^2-4r+3=0$ فإننا في هذه الحالة نبحث عن حل خاص ل $(E_1)$ من الشكل :

$$f_1(x)=(ax+b)e^{(1+i)x}.$$

و نجد:

$$f_1(x)=((-1/5+2i/5)x-(14/25+2i/25))e^{(1+i)x}.$$

وبالتالي حسب مبدأ التراكب فإن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (E) يعطى ب:

$$f_0(x)=(1/2)(\ f_1(x)+f_1(x))=Re(f_1)(x).$$

أي:

$$f_0(x)=(-x/5-14/25)e^x\cos x-(2x/5-2/25)e^x\sin x.$$

مع العلم أن

$$e^{(1+i)x}=e^x+e^{ix}=e^x(\cos x+i\sin x).$$

وينتج مما سبق أن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية مع الطرف الثاني (E) هو

$$y(x)=(-x/5-14/25)e^x\cos x-(2x/5-2/25)e^x\sin x+\lambda_1e^x+\lambda_2e^{3x},\ \lambda_{1,}\ \lambda_2\epsilon R.$$