UNIVERSITE DE BISKRA
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE
MATH GEOMETRIE

FACULTE DE SCIENCES EXACTES
ET SCIENCE DE LA NATURE ET DE LA VIE 2 LMD
20-04-2021

SERIE 3

EXERCICE 1

On considére la surface paramétrée par $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(u,v) = ((u+v)^2, v, 2(u+v))$$

1) Calculer les vecteurs f_u et f_v. Y a-t-il des points non reguliers ?

2) Donner l'équation cartisienne du plan tangent au point $f(1,0)$

EXERCICE 2

Soit S la surface paramétrisée par :$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$f(u, v) = (u^2, v^2, uv)$

Soient les points $a = (2, 2)$, $b = (2, 4)$, $c = (1, 2)$, $d = (3, 4)$

1) Paramétriser le segment de droite $\gamma : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ te que $\gamma(-1) = a$, $\gamma(1) = b$
2) Paramétriser le segment de droite $\beta : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ te que $\beta(-1) = c$, $\gamma(1) = d$
3) Trouver l'intersection de γ et β
4) Paramétriser les images de ces courbes vue sur la surface S
5) Calculer la matrice G du tenseur metrique
6) En utilisant la matrice G calculer l'angle entre ces deux courbes sur la surface

EXERCICE 3

On prend deux nombres réels $0 < r < R$. On considère le tore $f : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, paramétré par

$$f(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

1 Montrer que cette surface est reguliére

2 Calculer l'aire de cette surface

3 Que représentent geométriquement les courbes $C1 = \{f(0, v) / v \in [0, 2\pi]\}$ et $C2 = \{f(u, 0) / u \in [0, 2\pi]\}$

4 Montrer que les vecteurs tangents f_u et f_v sontorthogonaux

5 Calculer la courbure de Gauss

EXERCICE 4

On considère l'ellipsoïde de parametrisation $f : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathrm{R}^3$

$$f(u,v) = \left(\cos u.\cos v ,\sin u.\sin v, \frac{\sqrt{5}}{5} \cos v\right)$$

1 Etudier la regularité de cette surface

2 Calculer l'aire de la surface

3 Calculer les courbures principales

4 Calculer la courbure de Gauss

EXERCICE5

On prend deux nombres réels $0 < r < R$. On considère le tore $f : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathrm{R}^3$, paramétré par

$$f(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

6 Montrer que cette surface est reguliére

7 Calculer l'aire de cette surface

8 Que représentent geométriquement les courbes $C1 = \{f(0, v)/v \in [0, 2\pi]\}$ et $C2 = \{f(u, 0)/u \in [0, 2\pi]\}$

9 Montrer que les vecteurs tangents f_u et f_v sontorthogonaux

10Calculer la courbure de Gauss

EXERCICE 6 ;

On considere une surface $f: D \longrightarrow R^3$ ou $D = \{(u,v) \in R^2 | v > 0\}$ dont la matrice du tenseur metrique est

$$G(u,v) = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & v^2 \end{pmatrix}$$

On considère la courbe $C : [a, b] \longrightarrow D$ par $C(t) = (0, t)(0 < a < b)$

1 Calculer la longueur $L(\gamma)$ de la courbe $\gamma(t) = f(C(t))$

2 Que vaut $L(\gamma)$ lorsque $a \rightarrow 0$