Serie 03 Solution (Geometrie)

EXO:1 on a :

a) $C(t) = (1-t)a + t.b$, $t \in [-1,1]$

d'ou $C(t) = (2, 3+t)$, $t \in [-1,1]$

b/ $d(t) = (1-t)a + t.r$, $t \in [-1,1]$

d'ou $d(t) = (2+t, 3+t)$, $t \in [-1,1]$.

c/ $\gamma(t) = f(c(t)) = (4, (3+t)^2, 2(3+t))$

$= (4, t^2 + 6t + 9, 2t + 6)$

$\delta(t) = f(d(t)) = ((2+t)^2, (3+t)^2, (2+t)\cdot(3+t))$

$= (t^2 + 4t + 4, t^2 + 6t + 9, t^2 + 5t + 6)$.

d) $\dot{\gamma}_\gamma(t) = (0, 2t+6, 2)$

$\dot{\delta}_\delta(t) = (2t+4, 2t+6, 2t+5)$

En $p = f(a)$ ces vecteurs sont donnés par:

$\dot{\gamma}_\gamma(0) = (0, 6, 2) = v$

$\dot{\delta}_\delta(0) = (4, 6, 5) = w$

d'ou $\cos\theta = \dfrac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} = \dfrac{46}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{77}}$

d'ou $\theta \simeq 0{,}6 \simeq 34^\circ$

e) $f^1(u) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial u_1}\right)_p = (2u_1, 0, u_2)$.

$f^2(u) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial u_2}\right)_p = (0, 2u_2, u_1)$

$g_{11}(u) = \langle f^1(u), f^1(u) \rangle = 4u_1^2 + u_2^2$

$g_{12}(u) = g_{21}(u) = \langle f^1(u), f^2(u) \rangle = u_1 u_2$

$g_{22}(u) = \langle f^2(u), f^2(u) \rangle = 4u_2^2 + u_1^2$

d'où $G(u) = \begin{pmatrix} g_{11}(u) & g_{12}(u) \\ g_{21}(u) & g_{22}(u) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4u_1^2 + u_2^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & 4u_2^2 + u_1^2 \end{pmatrix}.$

f) $\dot{c}_c(t) = (0,1)$. , $\dot{d}_d(t) = (1,1)$

En p ces vecteurs sont donnés par :

$\dot{c}_c(0) = (0,1) = v$, $\dot{d}_d(0) = (1,1) = w$.

En a le tenseur metrique est donné par

$G(2,3) = \begin{pmatrix} 25 & 6 \\ 6 & 40 \end{pmatrix}.$

Nous avons

$$\cos\theta = \frac{v \cdot G(2,3) \cdot w}{\sqrt{v \cdot G(2,3) \cdot \cancel{w}} \cdot \sqrt{w\, G(2,3) \cdot w}} = \frac{46}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{77}}$$

EX 02

1) $\frac{\partial f}{\partial u_1} = (2(u_1+u_2), 0, 2)$

$\frac{\partial f}{\partial u_2} = (2(u_1+u_2), 1, -2)$

on remarque les vecteurs sont non nuls est linéairement indépendant, donc il n'y a pas de points non réguliers.

2- L'équation cartésienne du plan tangent au point $f(1,0)$

on a. $f(1,0) = (1,0,2)$

$\frac{\partial f}{\partial u_1}(1,0) = (2,0,2) = v$

$\frac{\partial f}{\partial u_2}(1,0) = (2,1,-2) = w$

on a, $v \wedge w = (-2, 8, 2)$

on a l'équation cartésienne du plan est

$$\boxed{-2x + 8y + z = 2}$$

EX, 03 :

on a, $\dot{c}_c(t) = (0,1)$

donc $\|\dot{\gamma}(t)\| = \left[(0,1)\begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{t}$

donc $L(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{t}\, dt = \ln(b/a)$.

. $\lim\limits_{a \to 0} L(\gamma) = +\infty$

Ex, 03

1- on a $f(u,v) = ((R+r\cos u)\cdot\cos v, (R+r\cos u)\sin v, r\sin u)$

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = (-r\sin u\cdot\cos v, -r\sin u\cdot\sin v, r\cos u)$$

$$f_v' = \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (-(R+r\cos u)\sin v, (R+r\cos u)\cos v, 0)$$

$$f_u \wedge f_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\sin u\cdot\cos v & -r\sin u\cdot\sin v & r\cdot\cos u \\ -(R+r\cos u)\sin v & (R+r\cos u)\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-(R+r\cos u)\cdot\cos v\cdot\cos u, r(R+r\cos u)\sin v\cdot\cos u,$$
$$-r(R+r\cos u)\sin u\cdot\cos^2 v - r(R+r\cos u)\sin u\cdot\sin^2 v)$$

$$= (-r(R+r\cos u)\cdot\cos v\cos u, r(R+r\cos u)\sin v\cos u, -r(R+r\cos u)\cdot\sin u)$$

on a $\|f_u\wedge f_v\| =$

$$\sqrt{r^2(R+r\cos u)^2\cdot\cos^2 v\cdot\cos^2 u + r^2(R+r\cos u)^2\sin^2 v\cdot\cos^2 u + r^2(R+r\cos u)^2\sin^2 u}$$

$= r(R+r\cos u) > 0$

donc f_u, f_v sont linéairement indépendant, par suite la surface est régulière.

2 $\text{Aire}(S) = \iint_D \| f_u \wedge f_v \| \, du \, dv$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r\,(R + r\cos u)\, du \cdot dv$$

$$= r \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (R\, du\, dv + r\cos u\, du\, dv)$$

$$= r\left[R \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} dv + r \int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} \cos u\, du\right]$$

$$= r \cdot (R\, 4\pi^2 + 0) = 4\pi^2 r R$$

$$\therefore \boxed{\text{Aire}(S) = 4\pi^2 r R}$$

3 - $C_1 = \{ f(0, v) \,/\, v \in [0, 2\pi] \}$

$f(0, v) = ((R+r)\cos v, (R+r)\cdot \sin v, 0)$

donc C_1 représente un cercle dans le plan (xoy) de centre (O) et de rayon $(R+r)$

$C_2 = \{ f(u, 0) \,/\, u \in [0, 2\pi] \}$

$f(u, 0) = (R + r\cos u, 0, r\sin u)$

donc C_2 represente un cercle dans le plans (xoz) de centre $(R, 0)$ et de rayon r

4 - $f_u \perp f_v \iff f_u \cdot f_v = 0$

on remarque que

$f_u \cdot f_v = r(R + r\cos u)\sin u \cdot \sin v \cdot \cos v$

$- r(R + r\cos u)\sin u \cdot \sin v \cdot \cos v + 0 = 0$

donc f_u et f_v sont ortogonaux.

5 -

le tenseur metrique est donnée par

$$G = \begin{pmatrix} \langle f_u, f_u \rangle & \langle f_u, f_v \rangle \\ \langle f_u, f_v \rangle & \langle f_v, f_v \rangle \end{pmatrix}$$

la matrice de l'expression de la courbure de la matrice est

$$H = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, n_p \rangle & \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, n_p \rangle \\ \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, n_p \rangle & \langle \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, n_p \rangle \end{pmatrix}$$

ou $n_p = \dfrac{f_u \wedge f_v}{\| f_u \wedge f_v \|}$

donc la courbure de Gauss est

$$\boxed{K(u,v) = \frac{\det H(u,v)}{\det G(u,v)}}$$ faire les calculs