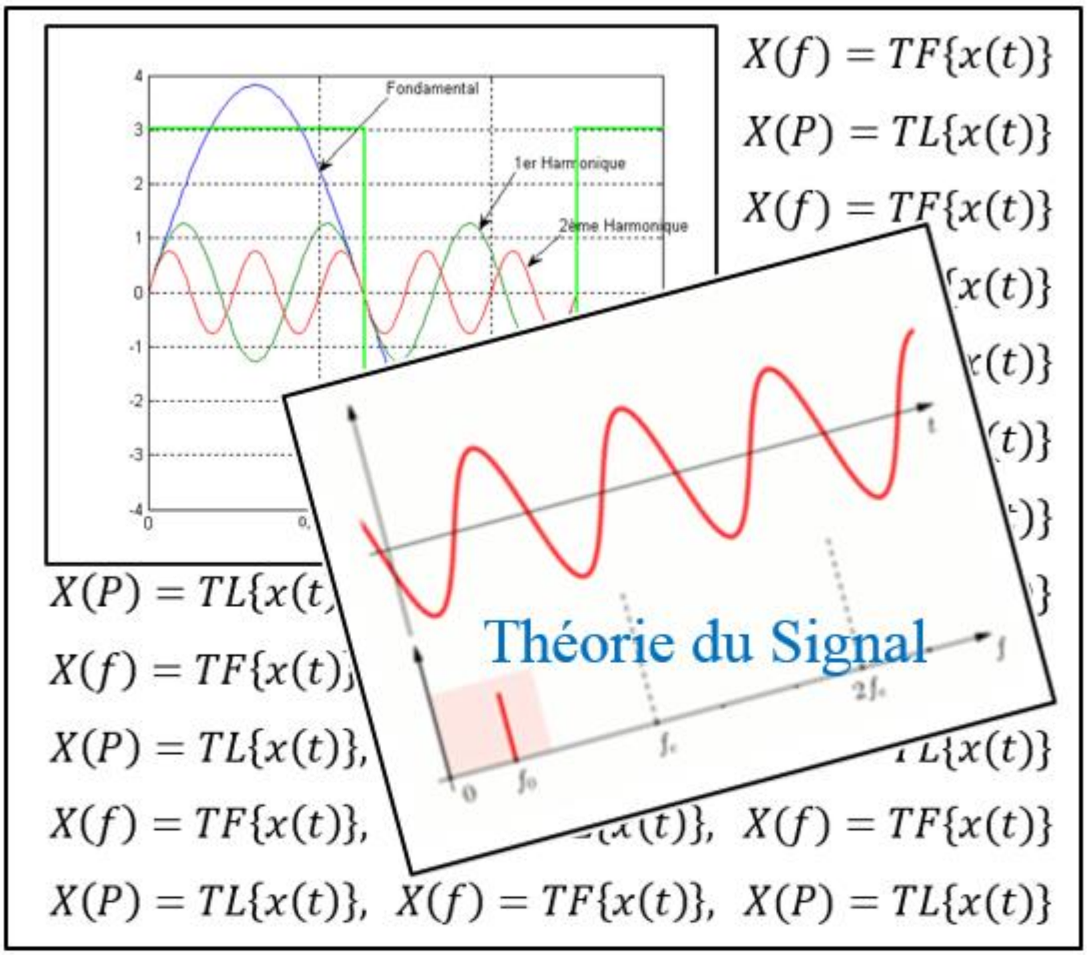
Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences et de la Technologies

Tronc commun sciences et techniques (ST)

2ème Année ST (Génie Electrique)

Support du cours



Dr. Soraya ZEHANI

Email : soraya.zehani@univ-biskra.dz

Année Universitaire : 2018/2019

Préface

Ce document est un support du cours du module : « *Théorie du Signal* », dédié aux étudiants de deuxième années sciences et techniques, spécialité : Génie Electrique ; qui contient les filières suivantes : Electrotechnique, Electronique, Automatique et Télécommunication.

Le module de théorie du signal contient les outils mathématiques de base qui seront le bagage nécessaire à l'étude du traitement du signal. Le but de ce module est de découvrir l'étude des signaux déterministes.

Ce document contient quatre chapitres qui sont :

1. Généralités sur les signaux
2. Analyse de Fourier
3. La convolution et la corrélation
4. La transformée de Laplace

Ce support du cours est le fruit personnelle de mon enseignement de ce module depuis six ans et plus. Mais aussi est le produit de la communoté scientifique qui m'entourage. Dans cette occasion je tiens à remercie :

- Pr. Sbaa Salim, de m'avoir enseigné la théorie du signal, pour leur conseils et encouragement.
- Dr. Toumi Abida et Pr. Terki Nadjiba, pour leurs encouragement et conseils.
- Pr. Baarir Zineddine pour m'avoir enseigné le traitement du signal.

Dr. Soraya ZEHANI,

Département de Génie Electrique

Faculté des sciences et techniques

Université Mohamed Khider, Biskra.

Sommaire

Notations

$\boldsymbol{sgn(t)}$: Fonction signe

$\boldsymbol{e(t)}$: Fonction echelon unitaire (Héviside)

$\boldsymbol{\delta(t)}$: Impulsion de Dirac

$\boldsymbol{r(t)}$: Fonction rampe

$\boldsymbol{rect(t)}$: Fonction rectangulaire (rectangle ou porte), centrée à l'orignie de durée unité (1)

$\boldsymbol{rect_T(t) = rect(\frac{t}{T})}$: Fonction rectangulaire centrée à l'orignie de durée T

$\boldsymbol{rect(\frac{t-\tau}{T})}$: Fonction rectangulaire centé en τ de durée T

$\boldsymbol{tri(t)}$: Fonction triangulaire centrée à l'orignie de durée 2

$\boldsymbol{tri(\frac{t-\tau}{T})}$ **:** Fonction triangulaire centrée en τ , de durée 2T

$\boldsymbol{sinc}$: sinus cardinal

$\boldsymbol{\delta_T(t)}$: Peigne de Dirac

La forme générale de rect : $\boldsymbol{rect(\frac{t-centre}{Durée})}$

La forme générale de tri : $\boldsymbol{tri(\frac{t-centre}{2Durée})}$

$\boldsymbol{E_x}$ **:** l'énergie du signal $x(t)$

$\boldsymbol{P_x}$ **:** La puissance du signal $x(t)$

$\boldsymbol{a_0}$: la moyenne du signal (la composante continue)

$\boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{b_n}$: les coefficents de la serie de Fourier trigonométrique

$\boldsymbol{X_n}$: coefficents de la série de Fourier complexe

$\boldsymbol{X(f) = TF\{x(t)\}}$ **:** la transformée de Fourier du signal $x(t)$

$\boldsymbol{X(P) = TL\{x(t)\}}$ **:** la transformée de Laplace du signal $x(t)$

$\boldsymbol{x(t) * y(t)}$: la convolution de $x(t)$ par $y(t)$

ACF : Autocorrélation : la corrélation de $x(t)$ par lui-même

CCF : Intercorrélation : la corrélation de $x(t)$ par $y(t)$

DES : Densité spectrale d'énergie

Formulaire nécessaire pour la théorie du signal

Valeurs des sin, cos et tang des angles usuelles

x en radians	$cos(x)$	$sin(x)$	$tang(x)$
$\mathbf{0\ (2\pi)}$	**1**	**0**	**0**
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	**1**
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	**0**	**1**	$+\infty$
π	**-1**	**0**	**0**

Formule trigonométriques

- $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$
- $cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
- $sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
- $cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)$
- $cos(2x) = 1 - 2sin^2(x)$
- $sin(2x) = 2\sin(x).\cos(x)$
- $cos(-x) = \cos(x)$
- $sin(-x) = -\sin(x)$
- $sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x)$
- $sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
- $tang(x) = \frac{sin(2x)}{1+\cos(2x)} = \frac{1-\cos(2x)}{sin(2x)}$
- $cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $tang(a+b) = \frac{tang(a)+tang(b)}{1-tang(a).tang(b)}$
- $cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $sin(a-b) = \sin(a).\cos(b) - \cos(a).\sin(b)$
- $tang(a-b) = \frac{tang(a)-tang(b)}{1+tang(a).tang(b)}$

Nombres complexes

- $Z = a + jb$, forme algébrique.
- $Z^* = a - jb$, Z^* : le conjugué.
- $(z_1 + z_2)^* = {z_1}^* + {z_2}^*$
- $(z_1.z_2)^* = {z_1}^*.{z_2}^*$
- $|z|^2 = z.z^*$
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, module.
- $\theta = \arg(z) = arctang(\frac{b}{a})$, l'argument ou la phase.
- $z = |z|e^{j\theta}$, forme polaire
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Formule d'Euler

- $e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$
- $\cos(x) = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$
- $\sin(x) = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$

Formule de MOIVRE

- $(\cos(x) + j\sin(x))^n = \cos(nx) + j\sin(nx)$

Développements limités

- $sin(a) = a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{a^{2p+1}}{(2p+1)!}$
- $cos(a) = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{a^{2p}}{(2p)!}$

Dérivées

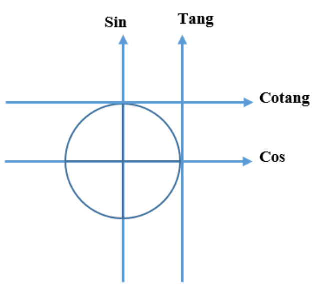
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(co\,s(x))' = -\sin(x)$
- $(tang(x))' = 1 + tang^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(e^x)' = e^x$
- $\left((f(x))^n\right)' = n\big(f(x)\big)^{n-1}(f(x))'$
- $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f(x)\prime}{f(x)^2}$
- $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f(x)\prime}{2\sqrt{f(x)}}$
- $(e^{f(x)})' = f(x)'e^{f(x)}$
- $(ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $(ln(f(x)))' = \frac{f(x)\prime}{f(x)}$
- $(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$
- $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)'g(x) - f(x)g(x)'}{(g(x))^2}$

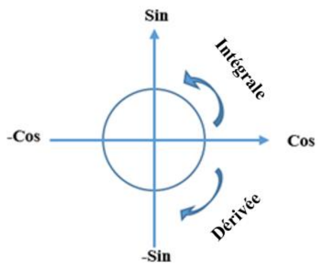
Primitives

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + Cst$
- $\int sin(ax)dx = -\frac{cos(ax)}{a} + Cst$
- $\int cos(ax)dx = \frac{sin(ax)}{a} + Cst$
- $\int \frac{dx}{(cos(x))^2} = tang(x) + Cst$
- $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + Cst$
- $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + Cst$
- $\int tang(x)dx = -ln|cos(x)| + Cst$
- $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctang\left(\frac{x}{a}\right) + Cst$
- $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + Cst$

Infiniment petits ($x \rightarrow 0$)

- $(1+x)^n = 1 + nx$
- $(1-x)^n = 1 - nx$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$
- $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2}$
- $ln(1+x) = x$
- $e^x = 1 + x$
- $sin(x) = x, \quad (x\ en\ radian)$
- $tang(x) = x, \quad (x\ en\ radian)$
- $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad (x\ en\ radian)$

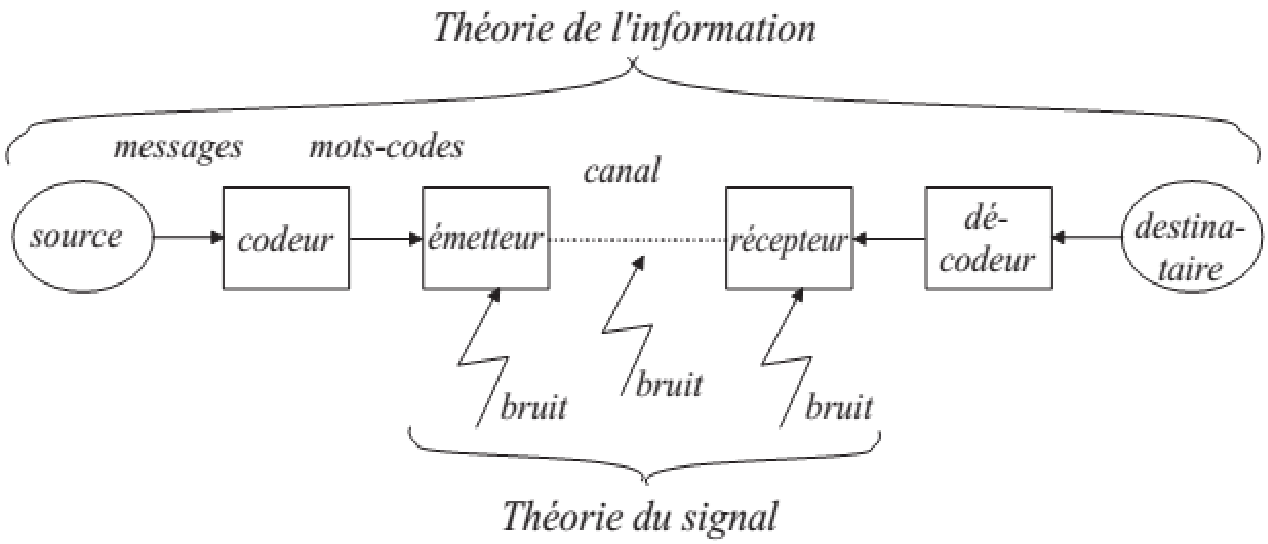




Chapitre 1 : Généralités sur les signaux

Introduction

La théorie du signal provient de la théorie de communication qui contient par son tour la théorie de l'information. En générale, un système de mesure à la structure donnée ci-dessous ;



Cette figure représente la position de la théorie du signal dans une chaine de transmission de l'information (la théorie de l'information).

Le phénomène que l'on veut étudier possède un capteur qui le transforme en un signal électrique (tension ou courant). L'ensemble chemine sur un canal de transmission et atteint enfin le récepteur; derrière lequel est effectué le traitement du signal.

Le but du traitement de signal est en effet d'extraire le maximum d'informations utiles sur un signal. Un signal est une variation d'une grandeur physique de nature quelconque porteuse d'informations, c'est donc la représentation physique de l'information. Sa nature physique peut être très variable : acoustique, électrique, mécanique, optique……

Le signal est généralement associé au bruit, qui est la perturbation indésirable qui se superpose au signal et aux données utiles dans un canal de transmission ou dans un système de traitement de l'information.

Définition du signal

Un signal est la variation d'une grandeur physique de nature quelconque porteuse d'information. Un signal est donc la représentation physique de l'information qu'il convoie de sa source à sa destination. En électronique cette grandeur physique est électrique (courant ou tension), en mécanique (force), en optique (lumière)….

Définition du bruit

Un bruit est un phénomène perturbateur genant la perception ou l'interprétation d'un signal. C'est une perturbation indésirable qui se superpose au signal et aux données utiles dans un canal de transmission ou dans un système de traitement de l'information.

Ainsi, il apparait évident que le problème fondamental en traitement du signal sera d'extraire le signal utile du bruit, ceci est mesuré par le rapport signal sur bruit (RSB, ou SNR : Signal to Noise Ratio) qui est le rapport des puissances du signal $\boldsymbol{P_s}$ et du bruit $\boldsymbol{P_n}$ il mesure la qualité du signal.

Définition du rapport signal sur bruit

Le rapport signal sur bruit est la mesure du degré de contamination du signal par le bruit, il s'exprime sous la forme du rapport (SNR) des puissances respectives du signal $\boldsymbol{P_s}$ et du bruit $\boldsymbol{P_n}$:

$$\boldsymbol{SNR = P_s / P_n}$$

Il est souvent indiqué selon une échelle logarithmique mesurée en décibels :

$$\boldsymbol{SNR_{db} = 10\, log(SNR)}$$

Les signaux : description et caractéristiques

Les signaux déterministes et les signaux aléatoires

On distingue les signaux déterministes des signaux aléatoires par leurs variations d'amplitude, de phase, de puissance, d'énergie spectrale ou autre. Ces paramètres peuvent être prédits dans le cas des signaux aléatoires.

Les signaux déterministes peuvent être représentés par des fonctions mathématiques qui permettent de calculer leur valeur pour tout, instant passé ou futur.

Les signaux aléatoires obéissent aux lois du (hasard) ou probabilité ou statistique (densité de probabilité, moyenne, variance, …).

Exemple de signaux déterministes : $x(t) = A.\cos(2\pi ft)$, $\quad y(t) = B.e^{-2t}\sin(2\pi ft)$

Exemple de signaux aléatoires : parole, vent, bruit,…..

De la théorie du signal au traitement du signal

Les termes signal et information dans le monde scientifique ont des significations bien précises.

La théorie du signal : est l'ensemble des outils mathématiques qui permettent de décrire les signaux et les bruits émis par une source, ou modifiés par un système de traitement.

La théorie de l'information : est l'ensemble des outils mathématiques qui permettent de décrire la transmission des messages véhiculés d'une source vers un destinataire.

Le traitement du signal : est l'ensemble des méthodes et des algorithmes qui permettent d'élaborer ou d'interpréter les signaux porteurs d'information. On entend par :

- **Elaboration** : Un système de : codage, modulation, changement de fréquence…
- **Interprétation** : Un système de : décodage, démodulation, filtrage, détection, identification,….

Actuellement, les méthodes de traitement du signal sont presqu'en totalité numériques, ce qui suppose ; un échantillonnage temporel, et une représentation des signaux en temps discret.

Vers un traitement multidimensionnel

Les signaux présentent une grande diversité, en particulier en ce qui concerne la dimension. Avec l'évolution des technologies (capteurs, calculateurs….), le traitement du signal traite des signaux multidimensionnels, au-delà d'un signal $1D$: signal audio, mesure électrique, signal reçu par une électrode en biomédical.

Signaux $\boldsymbol{2D}$: image, représentation temps-fréquence du signal.

Signaux $(\boldsymbol{2D} \times \boldsymbol{t})$: séquence vidéo.

Signaux 3D : objet 3 D (tomographie….).

Signaux $(\boldsymbol{3D} \times \boldsymbol{t})$: séquence d'objet 3 D (tomographie…).

Signaux $\boldsymbol{n\,D}$: qui peuvent recouvrir différentes formes par exemple :

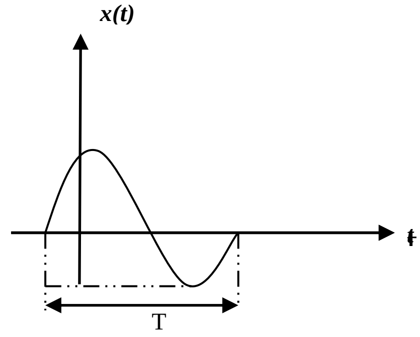
Signaux multi-capteurs (n capteurs) : réseaux d'antennes, Signaux électroencéphalographie (EEG) ou magnétoencéphalographie (MEG) (jusqu'à 250 électrodes).

Les signaux déterministes : ces signaux peuvent être :

1- **Signaux périodiques :** ce sont les signaux qui obéissent à une loi de répétition régulière de tel sorte que $x(t) = x(t+T)$, avec T est la période. Parmi ces signaux, on peut citer :

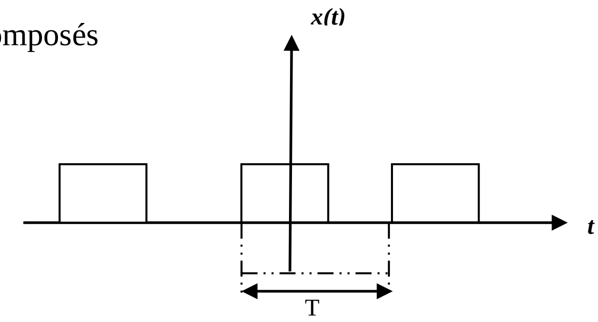
1-a- signaux sinusoïdaux

$x(t) = A\sin(\frac{2\pi}{T}t + \alpha)$



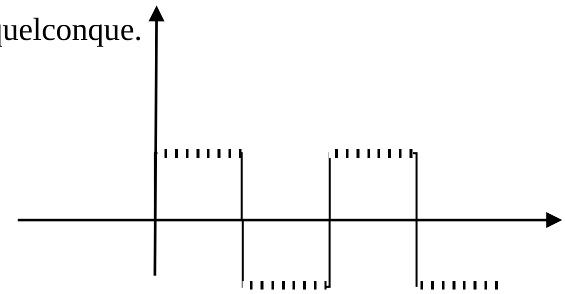
1-b-signaux périodiques composites

Ce sont des signaux sinusoïdaux, mais qui peuvent être décomposés en signaux sinus (par décomposition de Fourier) tel que : carré, rectangle, triangle,……..



1-c – signaux pseudo-aléatoires

Ce sont des signaux périodiques dans le temps, à formes quelconque.



2- Les signaux non périodiques

Ce sont les signaux qui ne respectent pas la loi cyclique tel que : $\boldsymbol{x(t) \neq x(t+T)}$; on peut citer :

2−a- les signaux quasi périodiques

Ils sont composés des signaux périodiques de période différente, le signal résultant peut etre périodique selon la relation entre T_1 et T_2:

Exemple :

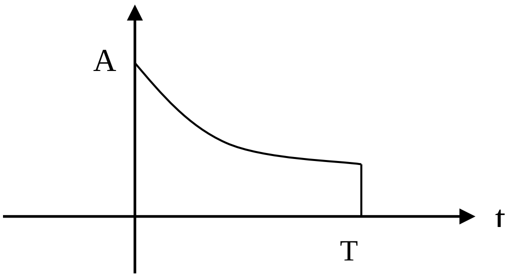
$x(t) = A_1 \sin\frac{2\pi}{T_1} + A_2 \cos\frac{2\pi}{T_2}t$, tel que T_1 # T_2

2_b_Les signaux transitoires

Ce sont les signaux dont l'amplitude est nulle en dehors d'un certain intervalle de temps :

Exemple :

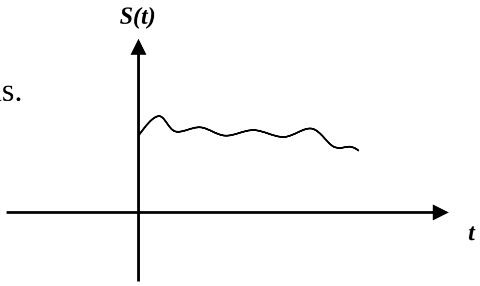
$$s(t) = \begin{cases} Ae^{-t} & si \quad 0 < t < T \\ 0 & si \quad \quad t > T \end{cases}$$



Classification morphologique des signaux

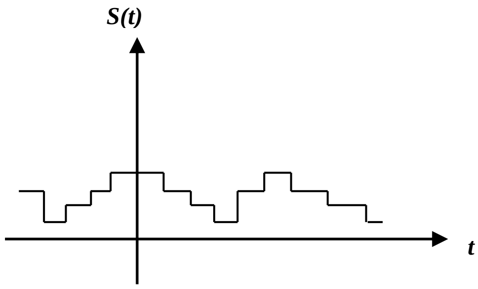
1- Signal analogique

Signal analogique ; l'amplitude et le temps sont continus.



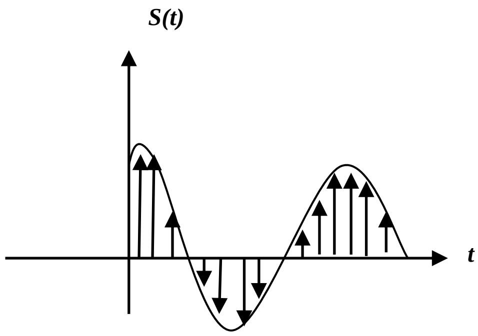
2- Signal quantifié

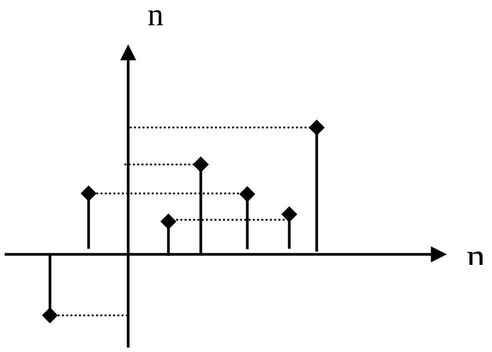
L'amplitude est discrète et le temps est continu.



3- Signal échantillonné

Temps discret et amplitude continue.





4- Signal numérique

Amplitude et temps discrets.

Les signaux usuels (signaux singulièrs)

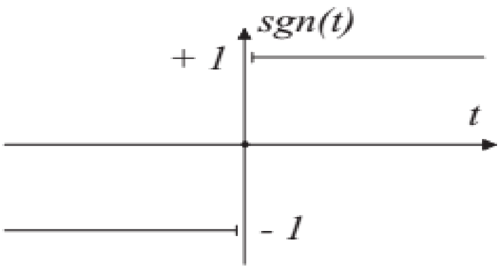
De nombreux signaux élémentaires (de base) ayant des expressions mathématiques très simples. C'est idéal, mais ne sont pas réalisablent physiquement. Très pratiques pour la description des modèles mathématiques et largement utilisés en traitement du signal et l'image.

On peut citez :

1- Fonction signe :

Elle est définie de la manière suivante :

$$sgn(t) = \begin{cases} +1, & si\ \ t > 0, \\ -1, & si\ \ t < 0. \end{cases}$$



Par convention, on définit : $sgn(0) = c_0,\ avec\ \ -1 \le c_0 \le +1$

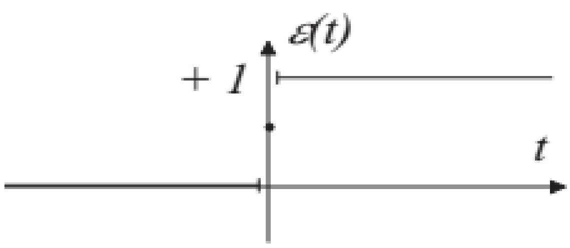
Usuellement on prend $sgn(0) = 0$. Avec cette convention, la fonction signe est une fonction impaire :

$$sgn(t) = -sgn(-t)\ \ \ \forall t$$

2- Fonction échelon unité (saut unité ou fonction de heaviside)

La fonction échelon unité, ou simplement échelon ou fonction Heaviside noté $e\ (t)$ (ou $u\ (t)$) est une fonction réelle de la variable réelle « t » définie par :

$$e\ (t) = \begin{cases} 1, & si\ t > 0 \\ 0, & si\ t < 0 \end{cases}$$



Par convention : $e\ (0) = 1/2$

On peut montrer facilement les relations (dans la séance de TD) :

$$\begin{cases} e(t) = \frac{1}{2} sign(t) + \frac{1}{2} \\ sgn(t) = 2e(t) - 1 \end{cases}$$

Remarques

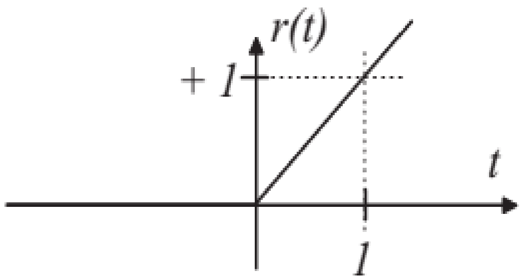
- La valeur à l'origine est arbitrairement comprise entre 0 et 1, mais il est préférable de lui assigner la valeur 1 (pour $e\ (t)$).
- La valeur à l'origine est en principe arbitraire, située entre ± 1 ; mais par contre cette valeur est nulle (pour $sgn\ (t)$).

3- Fonction rampe

La fonction rampe notée $r(t)$, est une fonction réelle de la variable réelle définie à partir de la fonction échelon unité comme étant :

$$r(t) = \int_0^t e(t)dt = t.e(t)$$

D'où : $e(t) = \frac{dr(t)}{dt}$



4- Fonction rectangulaire (ou rectangle) ou (porte)

a. La fonction rectangle ou fonction porte de largeur unité 1, notée $\boldsymbol{rect(t)}$ est une fonction réelle définie par :

$$\boldsymbol{rect(t) = e\left(t + \frac{1}{2}\right) - e(t - \frac{1}{2})}$$

On remarque que l'aire de la fonction rectangle $\boldsymbol{rect(t)}$ de largeur unité vaut 1.

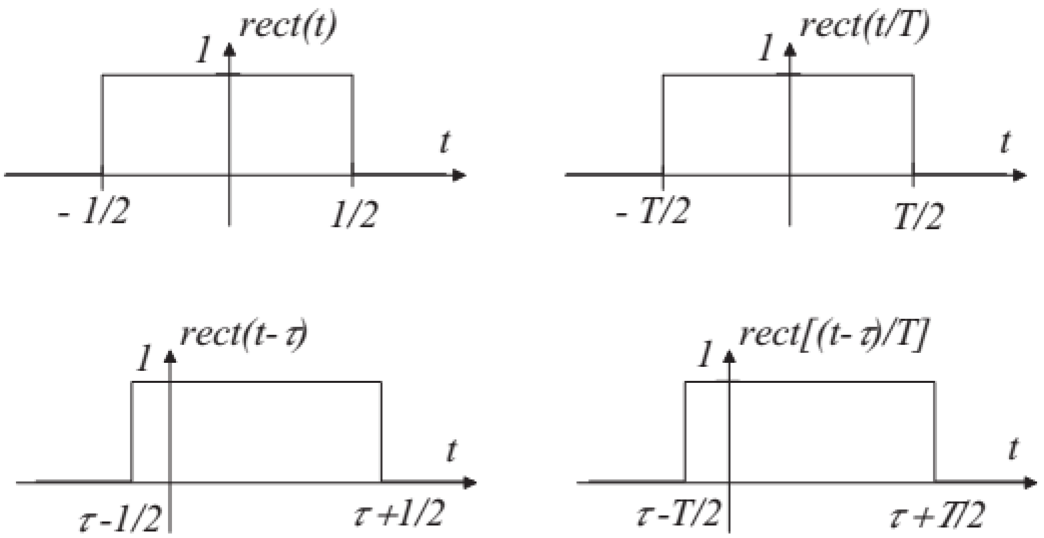
b. La fonction rectangle ou fonction porte de largeur T, notée $\boldsymbol{rect_T(t)}$ est une fonction réelle définie par : $rect_T(t) = rect(\frac{t}{T}) = e\left(t + \frac{T}{2}\right) - e\left(t - \frac{T}{2}\right)$

On remarque que l'aire de la fonction rectangle $\boldsymbol{rect_T(t)}$ de largeur T vaut T.

Remarques

- Une fonction rectangulaire de largeur unité, translatée de $(+\tau)$ s'écrit simplement : $\boldsymbol{rect(t - \tau)}$. De façon similaire, une fonction rectangulaire de largeur unité, translatée de $(-\tau)$ s'écrit simplement $\boldsymbol{rect(t + \tau)}$.

- Une fonction rectangulaire de largeur T translatée de $(+\tau)$ s'écrit simplement $\boldsymbol{rect}(\frac{t-\tau}{T})$. De façon similaire, une fonction rectangulaire de largeur (T) translatée de $(-\tau)$ s'écrit simplement $\boldsymbol{rect}(\frac{t+\tau}{T})$.



NB : on définit en générale

$$x(t) = Arect\left(\frac{t-\tau}{T}\right) = \begin{cases} A, & si\ \left(\frac{t-\tau}{T}\right) < \frac{1}{2} \\ 0, & si\ \left(\frac{t-\tau}{T}\right) > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A, & si\ (t-\tau) < \frac{T}{2} \\ 0, & si\ (t-\tau) > \frac{T}{2} \end{cases}$$

5- Fonction triangulaire

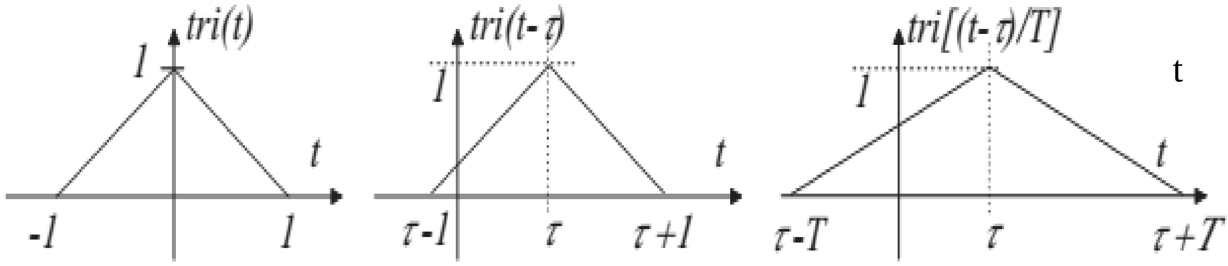
La fonction triangle unité notée $\boldsymbol{tri(t)}$, est une fonction réelle de la variable réelle "$\boldsymbol{t}$" définie par :

$$\boldsymbol{tri(t)} = \begin{cases} \mathbf{1 - |t|}, & \boldsymbol{si\ \ |t| \leq 1} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{sinon.} \end{cases}$$

Notons que l'aire de la fonction triangle unité vaut 1 et que la largeur de son support vaut 2.

On peut également appliquer les opérations de translation à cette fonction :

- La fonction $\boldsymbol{tri(t-\tau)}$ est une fonction triangle unité translatée de $(+\tau)$.
- La fonction $[\boldsymbol{tri}(\frac{t-\tau}{T})]$ est une fonction triangle de largeur $2T$ (ou d'aire égale à T) translaté de $(+\tau)$.



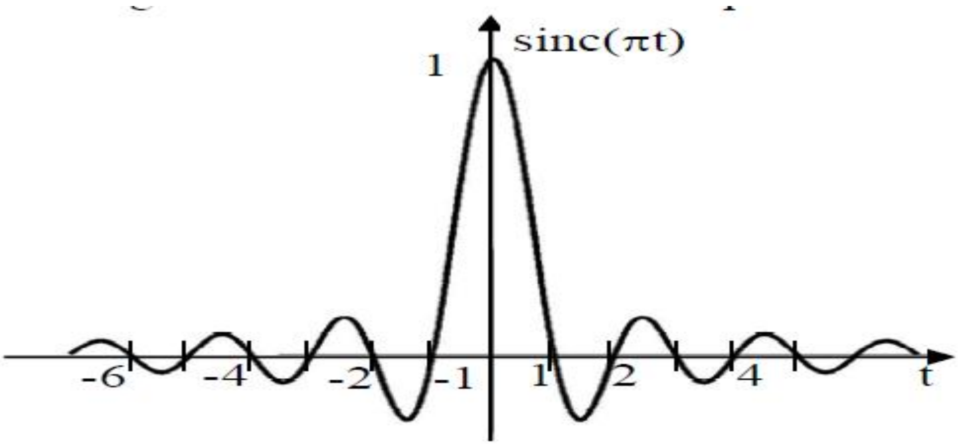
6- Fonction sinus cardinal

Cette fonction est très courante en traitement du signal où elle intervient comme transformée de Fourier d'une fonction rectangle. La fonction sinus cardinale, noté $\boldsymbol{sinc(t)}$ est définie :

$$\boldsymbol{sinc(t)} = \frac{\mathbf{sin}(\boldsymbol{\pi t})}{\boldsymbol{\pi t}}$$

Propriétés de la fonction sinus cardinal :

- Elle est paire : $sinc(t) = \mathrm{sinc}(-t)$,
- $sinc(t) \to 1 \quad lorsque \;\; t \;\to 0$,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(t)dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(t)dt = 1$



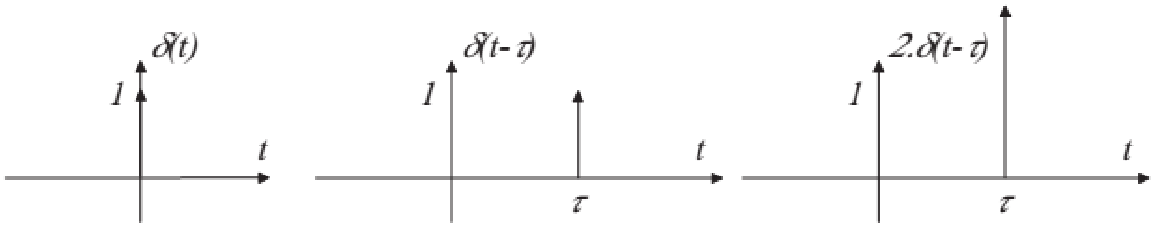
7- Distribution de Dirac ou impulsion de Dirac

La distribution ou impulsion de Dirac notée $\boldsymbol{\delta(t)}$ vérifié :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\delta(t) = \infty, \quad si \;\; t = 0} \\ \boldsymbol{\delta(t) = 0, \quad si \;\; t \neq 0} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\delta(t)dt = 1.} \end{cases}$$

On peut voir la distribution de Dirac comme la limité des fonctions, par exemple :

$$\begin{cases} \delta(t) = \lim\limits_{T\to 0} \dfrac{1}{T} tri\left(\dfrac{t}{T}\right) \\ \delta(t) = \lim\limits_{T\to 0} \dfrac{1}{T} rect\left(\dfrac{t}{T}\right) \\ \delta(t) = \lim\limits_{T\to 0} \dfrac{1}{T} sinc\left(\dfrac{t}{T}\right) = \lim\limits_{T\to 0} sinc\left(\dfrac{\pi t/T}{\pi t}\right) \end{cases}$$

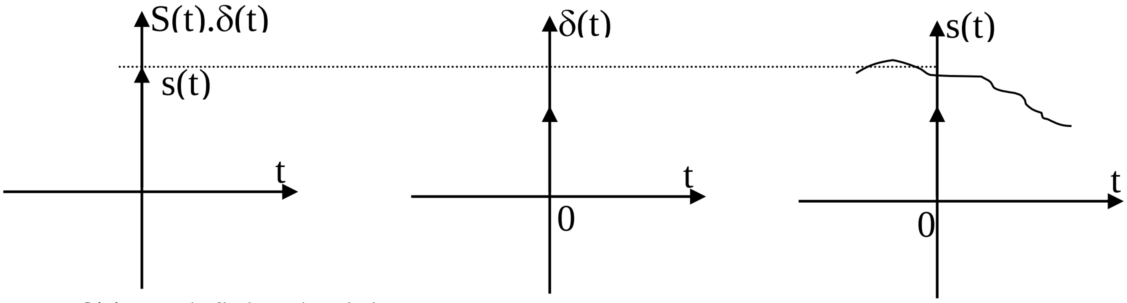


Propriétés de l'impulsion de Dirac $\boldsymbol{\delta(t)}$

I=$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t).\delta(t)dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} s(0).\delta(t)dt$

$=s(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = s(0) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\delta(t)dt = 1}$



Mais $\delta(t)$ est définie à l'origine

D'où : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

D'où on tire la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{\delta(t)dt = e\,(t) \Rightarrow \delta(t) = \frac{de(t)}{dt}}$$

Produit d'une fonction par une impulsion de Dirac

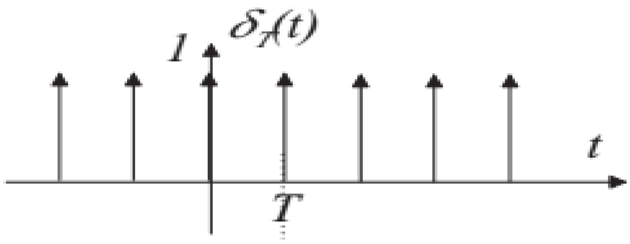
Le produit d'une fonction $\boldsymbol{x(t)}$ par une distribution de Dirac $\boldsymbol{\delta(t-t_0)}$ s'écrit :

$\boldsymbol{x(t)\delta(t-t_0)} = \boldsymbol{x(t_0)\delta(t-t_0)}$, Car la distribution est nulle partout sauf en $t = t_0$. Ce produit permet donc de prélever une valeur (échantillon) de la fonction $\boldsymbol{x(t)}$, plus précisément la valeur $\boldsymbol{x(t_0)}$ en $\boldsymbol{t = t_0}$.

8- Fonction peigne de Dirac

C'est une fonction périodique de l'impulsion de Dirac définie comme suit :

$$\boldsymbol{\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0),} \qquad \text{Avec} \qquad \boldsymbol{n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots\ldots}$$



Propriétés de distribution de Dirac

Définition : $\begin{cases} \boldsymbol{\delta(t) = \infty,} & \boldsymbol{si \;\; t = 0} \\ \boldsymbol{\delta(t) = 0,} & \boldsymbol{si \;\; t \neq 0} \end{cases}$

Mais pour simplifier les calculs, on prend :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\delta(t) = 1,} & \boldsymbol{si \;\; t = 0} \\ \boldsymbol{\delta(t) = 0,} & \boldsymbol{si \;\; t \neq 0} \end{cases}$$

Intégration **:** $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1}$

Produit : $\boldsymbol{x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)}$,

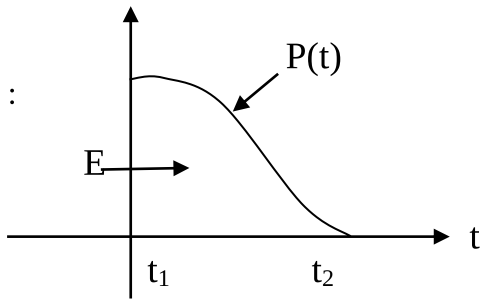
Produit de convolution : $\boldsymbol{x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)}$

Domaine d'application

- Télécommunication et la télésurveillance,
- Reconnaissance des formes, Traitement d'image, de la parole…
- Analyse biomédicale,
- La biométrie,
- Surveillance des processus industriels.

L'énergie et la puissance d'un signal : (classification énergétique)

1-Puissance instantanée



On appelle la puissance instantanée d'un signal $\boldsymbol{x(t)}$, le produit :

$\boldsymbol{P(t) = x(t) \times x^*(t) = |x(t)|^2}$

Si le signal est réel⇒ $\boldsymbol{P(t) = x(t) \times x(t) = x^2(t)}$

2-Energie du signal

L'énergie normalisée d'un signal $\boldsymbol{x(t)}$ dans l'intervalle [t_1, t_2] est définie comme étant l'aire décrite par sa puissance instantanée :

$$\boldsymbol{E = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt} \qquad (1)$$

Remarque : on appelle un signal à <u>**énergie finie non nulle**</u> si $(\boldsymbol{0 < E < \infty})$

Un signal pour lequel l'intégrale de l'équation (1) reste finie quel que soit les bornes d'intégration.

$$\forall\ (t_1, t_2) \to \infty, \Rightarrow\ 0 < \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{x^2(t)dt} < \infty \qquad (2)$$

2-Puissance du signal

La puissance d'un signal $\boldsymbol{x(t)}$ dans l'intervalle $[t_1, t_2]$ est définie par :

$$\boldsymbol{P(t_2, t_1) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt} \qquad (3)$$

La valeur efficace du signal $\boldsymbol{x(t)}$ est égal à : $\boldsymbol{\sqrt{P(t_2, t_1)}}$.

Remarque : la puissance moyenne totale d'un signal $\boldsymbol{x(t)}$ est obtenue on considerant un intervalle qui tend sur tout l'axe réel (du temps) c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{(T)} |x(t)|^2 dt} \qquad (4)$$

La valeur efficace du signal $\boldsymbol{x(t)}$ est égal à $\boldsymbol{\sqrt{P}}$.

Si $\boldsymbol{P} < \infty \Rightarrow$ $\boldsymbol{x(t)}$ est un signal à ***puissance moyenne finie.***

Etude énergétique des signaux

Il existe deux sortes de classes énergétiques :

1- Les signaux à énergie finie

Exemple : les signaux transitoires déterminés de facon aléatoire.

2- Les signaux à puissance moyenne finie non nulle

Exemple : signaux périodiques, signaux quasi périodiques, signaux aléatoires permanents (bruit blanc).

Remarque : il existe certains signaux qui n'appartiennent à aucune de deux classes.

Définitions

1- L'énergie d'un signal réel $x(t)$ sur un intervalle $[t_1, t_2]$ est la valeur quadratique définie par :

$$\boldsymbol{E_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt}$$

2- La puissance moyenne d'un signal réel $x(t)$ sur un intervalle $[t_1, t_2]$ est la valeur quadratique moyenne définie par :

$$\boldsymbol{P_x(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt}$$

3- L'énergie totale d'un signal $x(t)$ est définie comme étant : $\boldsymbol{E_x = \int_{-\infty}^{-\infty} x^2(t)dt}$

4- La puissance totale d'un signal est définie : $\boldsymbol{P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt}$

Remarque : pour les signaux périodiques, la puissance moyenne totale est égale à la puissance moyenne sur une période.

$$\boldsymbol{P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt = X_{eff}^2}$$

1) Signaux à énergie finie

Les signaux à énergie finie sont ceux pour lesquels l'intégrale suivante est bornée :

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|x^2(t)\right| dt < \infty}$$

Donc la puissance moyenne totale est nulle.

Exemple : le signal $x(t) = rect(t/T)$ est un signal à énergie finie :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = T.$$

Sa puissance moyenne $\boldsymbol{P_x}$ est donc **nulle**.

Conséquence : *le signal à énergie finie a une puissance moyenne nulle.*

2) Signaux à puissance moyenne finie non nulle

Ce sont les signaux qui vérifient la condition **:**

$$\mathbf{0} < \lim_{T\to\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})|^2 \boldsymbol{dt} < \infty$$

Exemple : le signal $\boldsymbol{x(t) = sin(\omega t)}$ est un signal à puissance moyenne finie sur ℝ. En effet $|\boldsymbol{x(t)}|^2 = \boldsymbol{sin^2(\omega t)} = \frac{(1-\cos(2\omega t))}{2}$, et en intégrant :

$$\boldsymbol{P_x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\boldsymbol{x(t)}|^2 \boldsymbol{dt} = \frac{1}{2T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} (1 - \boldsymbol{cos}(2\omega t))\boldsymbol{dt} = \frac{1}{2}$$

En revanche, l'intégrale de E_x diverge : *le signal n'est pas donc à énergie finie.*

Remarques importantes

1. ***les signaux à puissance moyenne finie non nulle possèdent une énergie infinie. Et les signaux à énergie finie possèdent une puissance moyenne nulle. Seuls ces deux derniers sont physiquement réalisables.***
2. ***Les signaux périodiques et les signaux à durée ilimité sont des signaux à puissance moyenne non nulle.***
3. ***Les signaux à support borné (signaux transitoires) sont des signaux à énergie finie.***

L'énergie sur un intervalle $[t_1, t_2]$: $\boldsymbol{E_x} = \int_{t1}^{t2} |\boldsymbol{x^2(t)}| \boldsymbol{dt}$

La puissance moyenne sur un intervalle$[t_1, t_2]$: $\boldsymbol{P_x(t_1, t_2)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\boldsymbol{x^2(t)}| \boldsymbol{dt}$

L'énergie totale : $\boldsymbol{E_x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x^2(t)dt}$

La puissance moyenne totale : $\boldsymbol{P_x} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |\boldsymbol{x^2(t)}| \boldsymbol{dt}$

La puissance moyenne totale (**cas périodique**) : $\forall\, \boldsymbol{t_0} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{P_x} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |\boldsymbol{x^2(t)}| \boldsymbol{dt}$

La valeur efficace **:** $\boldsymbol{X_{eff}^2 = P_x} \Rightarrow \boldsymbol{X_{eff}} = \sqrt{\boldsymbol{P_x}}$

Récapitulatif

Propriétés de l'impulsion de Dirac

- $\delta(t) = \begin{cases} +\infty & si\ t = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$
- $x(t).\delta(t-t_0) = x(t_0).\delta(t-t_0)$
- $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$
- $x(t-t_1) * \delta(t-t_2) = x(t-t_1-t_2)$
- $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$
- $\int_{t_1}^{t_2} x(t).\delta^{(n)}(t-t_0)dt = (-1)^n.x^{(n)}(t_0),\quad tel\ que:\ t_1 < t_0 < t_2$

Période de somme de deux signaux :

Soit : $\boldsymbol{x(t) = x_1(t) + x_2(t)},$

$x_1(t)$ est périodique de période T_1

$x_2(t)$ est périodique de période T_2

$\boldsymbol{x(t)}$ est périodique si : $\frac{T_1}{T_2} = \boldsymbol{\frac{n}{m}}$, et $\boldsymbol{T = nT_2 = mT_1}$

Sinon : $\frac{T_1}{T_2} \neq \frac{n}{m}$, (par exemple $\sqrt{2}$), il n'est pas périodique

Période de produit de deux signaux :

Soit : $\boldsymbol{x(t) = x_1(t).x_2(t)},$

$x_1(t)$ est périodique de période T_1

$x_2(t)$ est périodique de période T_2

$\boldsymbol{x(t)}$ est périodique de période : $\boldsymbol{T}$= le plus petit multiple de (T_1, T_2)

Energie, puissance, valeur moyenne et valeur efficace (dommaine temporel)

Signal	***Energie totale***	***Puissance totale***
Signal réel	• $\boldsymbol{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t))^2 dt}$	• $\boldsymbol{P_x} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \boldsymbol{(x(t))^2 dt}$
Signal complexe	• $\boldsymbol{E_x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert \boldsymbol{x(t)} \rvert^2 \boldsymbol{dt}$	• $\boldsymbol{P_x} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \lvert \boldsymbol{x(t)} \rvert^2 \boldsymbol{dt}$
Valeur moyenne	• $\boldsymbol{\bar{x} = \lim_{T \to +\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt}$	
Valeur efficace	• $\boldsymbol{X_{eff} = \sqrt{P_x}}$	

Chapitre 2 : Analyse de Fourier

I. Introduction

L'analyse harmonique ou fréquentielle est l'instrument majeur de la théorie des signaux. Le développement de la série de Fourier et plus généralement, la transformation de Fourier permet d'obtenir une représentation spectrale des signaux déterministes. Celle-ci exprime la répartition de l'amplitude, de la phase, de l'énergie ou de la puissance des signaux considérés en fonction de la fréquence.

Le temps et la fréquence sont deux bases servant à la description des signaux. Ce sont deux points de vue différents d'une même réalité ; ils sont complémentaires. Il est important de bien comprendre les relations qui existent entre ces deux bases. Dans la théorie du signal, deux représentations sont souvent envisagées :

- La représentation **temporelle**, ou la variable indépendante est le temps *t(s)* : signal en fonction du temps : *x(t)*.
- La représentation **fréquentielle** (ou **spectrale**), où la variable indépendante est la fréquence dont la dimension est l'inverse du temps $f = \frac{1}{t}$, $f(Hz)$.

Une grandeur sinusoïdale est décrite par l'équation : $\boldsymbol{x(t) = A.cos(2\pi f_0 t + \alpha) = A\,.\cos(wt + \alpha)}$. Son évolution est contenue dans le mot ***cos :*** dès lors, on sait que le signal $x(t)$ ondule avec une forme précise fixée par la fonction cosinus. L'amplitude A, la phase α et la fréquence f_0 sont des informations supplémentaires fournies par la représentation fréquentielle ou spectrale. Donc, un signal est caractérisé par la durée, la période, la phase et la fréquence (ou la bande des fréquences Bf).

II. L'analyse de Fourier

1. La série de Fourier

L'élément fondamental de l'analyse de Fourier est constitué par le faite qu'un signal périodique peut être décomposé en une somme d'ondes sinusoïdales

1-1Serie de Fourier trigonométrique

Soit un signal $x(t)$ continu partiellement, ce signal est une fonction périodique de période T_0 c'est-à-dire : $x(t) = x(t + T_0)$; alors $x(t)$ peut être représenté comme une somme infinie des signaux sinusoïdaux et cosinusoïdaux, cette sommation est appelée la série de Fourier et définie comme suit :

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)}}$$

Tel que: $f_0 = \frac{1}{T_0}$ est la fréquence fondamentale du signal, a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourrier (n : entier), avec :

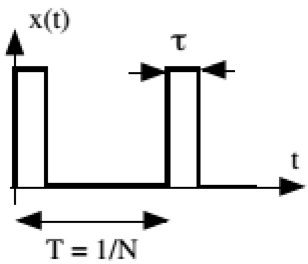
$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt \quad , \quad a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t).\cos(2\pi n f_0 t)dt \quad , \quad b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t).\sin(\,2\pi n f_0 t)dt}$$

Remarque

- $\boldsymbol{a_0}$ représente la valeur **moyenne,** elle est dite la **composante continue** du signal $x(t)$.
- Si $x(t)$ est **paire** alors, $\boldsymbol{b_n = 0}$
- Si $x(t)$ est **impaire** alors, $a_n = 0$

Exemple 1 : décomposer en série de Fourier le signal $x(t)$ représenté par la figure suivante :

Solution :



$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{\tau} 1.dt = \frac{1}{T}.t/_0^{\tau}$$

$$= \frac{1}{T}(\tau - 0) \rightarrow \boldsymbol{a_0 = \frac{\tau}{T}}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(2\pi n f_0 t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{\tau} x(t)\cos(2\pi n f_0 t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{\tau} 1.\cos(2\pi n f_0 t)dt$$

$$= \frac{2}{T}.\frac{1}{2\pi n f_0}\sin(2\pi n f_0 t)\,/$$

$$= \frac{1}{n\pi}(\sin(2\pi n f_0 \tau) - \sin(0))$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{\sin(2\pi n f_0 \tau)}{2n\pi f_0 \tau}.2f_0\tau \quad , \quad a_n = 2f_0\tau\,.\,sinc(2\pi n f_0 \tau)}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(2\pi n f_0 t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{\tau} \sin(2\pi n f_0 t)dt$$

$$= \frac{2}{T\ \ 2\pi n f_0}[-\cos(2\pi n f_0 t)/\ ]$$

$$= \frac{1}{\pi n}[-\cos(2\pi n f_0 \tau) + \cos(0)], \qquad \boldsymbol{b_n = \frac{1}{\pi n}[1 - \cos(2\pi n f_0 \tau)]}$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = \frac{\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty}(2f_0\tau\,.\,sinc(2\pi n f_0 \tau)).\cos(2\pi n f_0 t) + \frac{1}{\pi n}[1 - \cos(2\pi n f_0 \tau)].\sin(2\pi n f_0 t)}}$$

1.2 Série de Fourier complexe

L'utilisation des relations d'Euler :

$$cos(t) = \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}, \qquad sin(t) = \frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}$$

montre aisément que la série de Fourier trigonométrique peut être transformée en une série de Fourier complexe définie par :

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}}}$$

Tel que :

$$\boxed{\boldsymbol{X_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi f_0 n t} dt}}$$

$$\boldsymbol{X_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)}, \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{a_n = 2\, Réel(X_n)}, \quad \boldsymbol{b_n = -2\, Im(X_n)}$$

En posant $X(nf_0)) = X_n$, on obtient le spectre de fréquence qui est une grandeur en générale complexe, ce spectre peut se décomposer en :

- ***Un spectre d'amplitude :*** $|X(f_0)|$
- Et ***un spectre de phase :*** $\varphi(nf_0)$

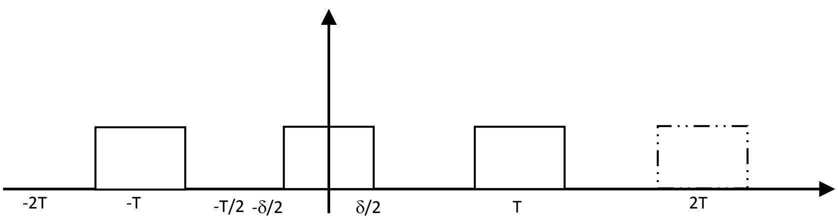
Ce spectre est composé de raies, il s'agit d'un spectre discret.

$$\boldsymbol{X(nf_0) = |X(f_0)|e^{j\varphi(nf_0)}}$$

Exemple 2 : soit le signal périodique $x(t)$ définit par :

$$x(t) = \begin{cases} 1 \quad pour\ |t| < \frac{\tau}{2} \quad dans\ \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 \qquad\qquad\qquad ailleurs \end{cases}$$

Solution :



$x(t)$ est un train d'impulsion rectangulaire. La série de Fourier complexe est :

$$X(nf_0) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{-T}\frac{e^{-j2\pi n f_0 t}}{j2\pi n f_0}\Big/_{-\tau/2}^{\tau/2} \cdots \qquad = \frac{1}{T}\frac{e^{j\pi n f_0 \tau} - e^{-j\pi n f_0 \tau}}{j2\pi n f_0}$$

$$s(nf_0) = \frac{\tau}{T}\frac{\sin(\pi n f_0 \tau)}{\pi n f_0 \tau} = \frac{\tau}{T}\operatorname{sinc}(\pi n f_0 \tau)$$

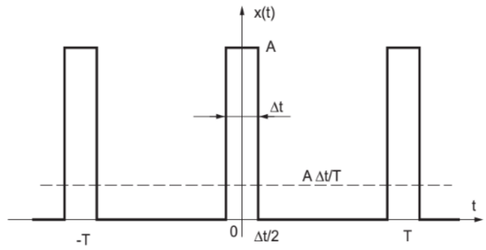
$$\boldsymbol{S(nf_0) = \frac{\tau}{T} sinc(\pi n f_0 \tau)}$$

Donc, la série de Fourier complexe est donnée par :

$$\boxed{\boldsymbol{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(nf_0) e^{+j2\pi n f_0 t} = \frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(\pi n f_0 \tau) e^{j2\pi n f_0 t}}}$$

Exemple 3 : Suite d'impulsions rectangulaires

Calculer la série de Fourier complexe du signal $\boldsymbol{x}(t)$ représenté dans la figure ci-contre :



Solution :

Par définition des coefficients complexes $X(n)$, on a :

$$X(n) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).e^{j2\pi n f_0 t} dt, \quad avec\ f_0 = \frac{1}{T}$$

En tenant compte de la définition de signal :

$$x(t) = \begin{cases} A & si\ -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Il vient :

$$X(n) = \frac{A}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{j2\pi n f_0 t} dt$$

$$= \frac{-A}{T}.\frac{1}{j2\pi n f_0}(e^{-j2\pi n f_0 \frac{\tau}{2}} - e^{+j2\pi n f_0 \frac{\tau}{2}})$$

Les relations d'Euler permettent de passer de la différence des exponentielles à un sinus et décrire ces coefficients sous la forme :

$$\boldsymbol{X(n) = A\frac{\tau}{T}.\frac{\sin(\pi n f_0 \tau)}{\pi n f_0 \tau} = \frac{A\tau}{T}.sinc(\pi n f_0 \tau)}$$

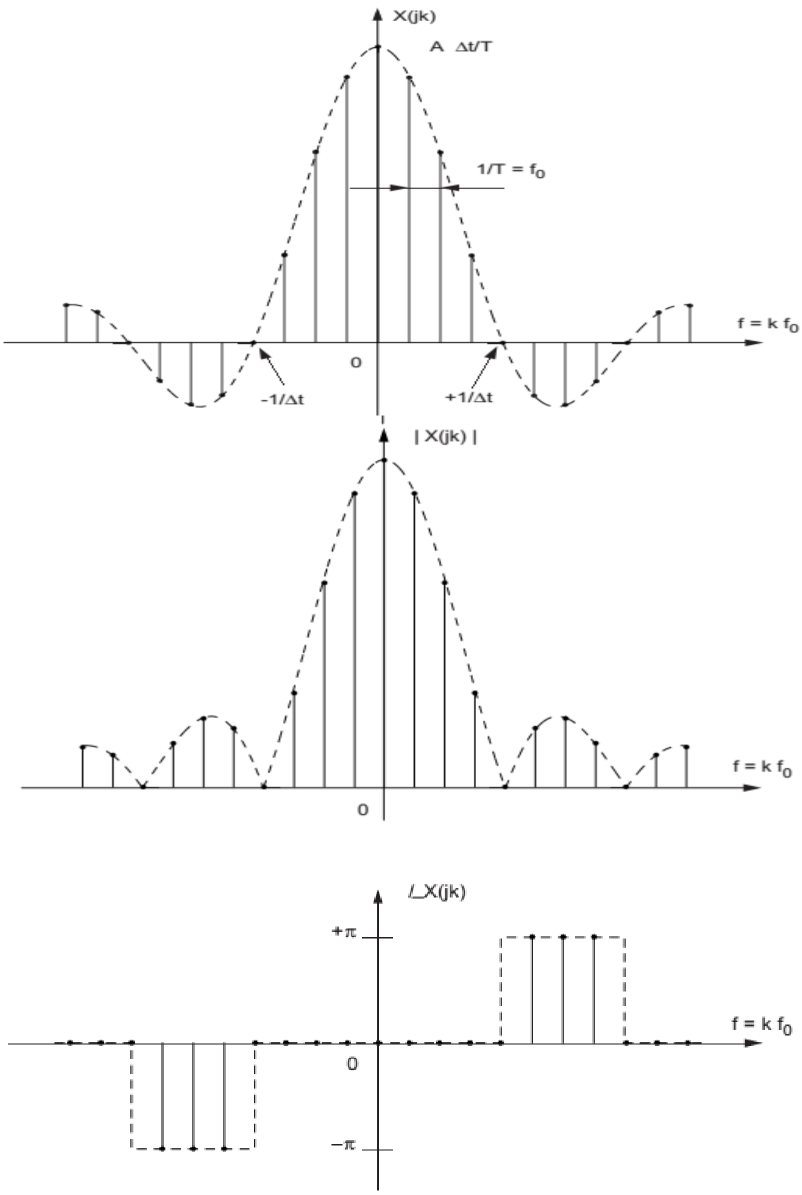


Figure : Spectre complexe ; Spectre d'amplitude et de phase
(ici purement réel car le signal est pair)

<u>Remarques</u> : ***La série de Fourier***

- f_0 est appelée la fréquence fondamentale, et les multiples de f_0 les harmoniques : $(nf0)$.
- En pratique, seul un nombre fini de coefficients harmoniques sont numériquement non nuls.
- Connaitre la valeur de ces coefficients harmoniques ; donne des indications sur la nature du signal.
- Sin-------- fondamental.
- Carrée -------les harmoniques.

2. La transformée de Fourier

Introduction

Tout signal **continu** et **périodique** de période T présente un **spectre discret** dont les raies sont espacées par des multiples de f_0. Plus la période est grande, plus l'espace fréquentiel (entre deux raies) est réduit.

Lorsque le signal n'est pas périodique, on peut supposer qu'il est périodique à l'infini, dans ce cas la période est infinie et donc $f_0=0$.

Si le signal n'est pas périodique (ou périodique à l'infini), le spectre est **continu.**

La transformée de Fourier s'obtient de manière équivalente à la série de Fourier, mais en faisant tendre la période T vers l'infini et la sommation devient intégrale.

Ainsi on obtient :

$$X(f) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t).e^{-j2\pi ft}dt$$

Définition : soit $x(t)$ un signal à temps continu. La transformée de Fourier de $x(t)$ est la fonction complexe $X(f)$ donnée par :

$$\boxed{\boldsymbol{X(f) = TF\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j2\pi ft}dt}}$$

Condition d'existence :

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{x(t)}|\boldsymbol{dt} < \infty$ Ou (condition satisfaisante mais pas nécessaire : Exemple $x(t) = e(t)$, echelon).

$\int |x(t)|^2\, dt < \infty$ Signal à énergie finie

La transformée de Fourier nous permet de passer du domaine temporel $\boldsymbol{x(t)}$ au domaine fréquentiel $\boldsymbol{X(f)}$**.**

Propriété immédiate : $X(-f) = X(f) \Rightarrow |X(-f)| = |X(f)|$

La transformée inverse de Fourier est donnée par :

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = TF^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{j2\pi ft}df}}$$

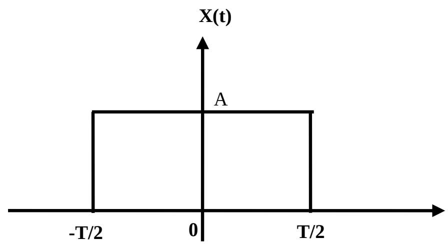
Qui nous permet de passer du domaine fréquentiel au domaine temporel à partir de la transformée de Fourier.

On écrit :

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \Rightarrow \begin{cases} x(t) \xrightarrow{TF} X(f) \\ X(f) \xrightarrow{TF^{-1}} x(t) \end{cases}$$

$X(f) = |X(f)|e^{\varphi(f)}$, et $\varphi(f) = arctg\,\frac{I_m(X(f)}{R_e(X(f))}$

Exemple 4 : Calculer la TF du signal représenter dans la figure ci-contre.



Solution :

$x(t) = A.rect\left(\frac{t}{T}\right)$: un signal rectangulaire de largeur T.

$$x(t) = \begin{cases} A & si \quad t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A.rect({}^{t}/_{T})e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} A.e^{-j2\pi ft}dt = -\frac{A}{j2\pi f}[e^{-j2\pi ft}]_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{-A}{j2\pi f}\left(e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}\right) = \frac{AT}{\pi fT}\left(\frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{2j}\right)$$

$$= \frac{A}{\pi f}\sin(\pi fT) = A.T.\frac{sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = A.rect({}^{t}/_{T}) \leftrightarrow X(f) = A.T.sinc(\pi fT)}}$$

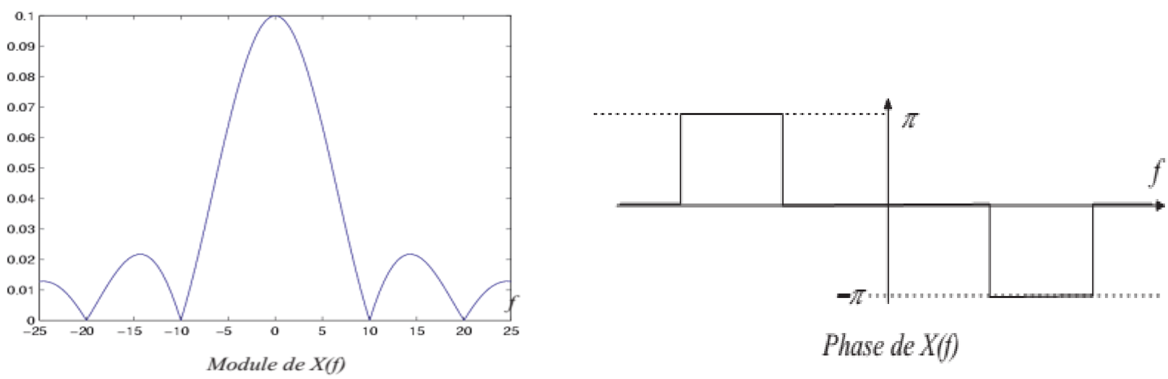


Figure : Spectre d'amplitude et spectre de phase de la TF de la fonction $x(t) = rect({}^{t}/_{T})$, T=0.1 s.

<u>Propriété de la TF</u>

1. **Linéarité** : $a.x(t) + b.y(t) \leftrightarrow a.X(f) + b.Y(f),$ a et b des constantes
2. **Translation temporelle** : $x(t - t_0) \rightarrow X(f).e^{-j2\pi ft_0}$
3. **Translation fréquentielle** : $x(t)e^{j2\pi ft_0} \leftrightarrow X(f - f_0)$, tel que $f_0 = 1/t_0$
4. **Similitude** : $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X({}^{f}/_{a})$

5. **Convolution** :
   - $x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f).Y(f)$
   - $x(t).y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$
6. **Intégration** : $TF\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau =\right\} = \frac{1}{j2\pi f}.X(f)$, si $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau = 0$
7. **Dérivation p/r à t** : $TF\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = (j2\pi f)^n.X(f)$

8. **Dérivation en fréquence** :
   - $\frac{dX(f)}{df} \leftrightarrow (-j2\pi f).x(t)$
   - $\frac{d^n}{df^n}X(f) \leftrightarrow (-j2\pi f)^n.x(t)$
9. **Parité** : la TF conserve la parité

$x(t)$	$X(f)$
Réelle paire	Réelle paire
Imaginair paire	Imaginaire paire
Réelle impaire	Imaginaire impaire
Imaginaire impaire	Réelle paire

Théorème de Perceval

L'énergie d'un signal est : $E = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).x^*(t)dt$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[x^*(t)\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df\right]dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[X(f)\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{j2\pi ft}dt\right]df = \int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\, dt$$

Ce théorème indique que l'énergie est conservée dans les représentations en temps et en fréquence.

L'énergie dans le domaine fréquentiel ou temporel est la même.

Récapitulatif

la série de Fourier (SF)

Tout signal périodique $\boldsymbol{x(t)}$ de période T peut se décomposer en une somme infinie de fonctions sinus et cosinus (**la série de Fourier trigonométrique**) :

$$\boldsymbol{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(2\pi n f_0 t) + b_n\sin(2\pi n f_0 t)}$$

avec : $\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt}$, $\boldsymbol{a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t).\cos(2\pi n f_0 t)dt}$, $\boldsymbol{b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t).\sin(2\pi n f_0 t)dt}$

Tel que: $f_0 = \frac{1}{T_0}$ fréquence fondamentale, a_n et b_n les **coefficients de la série de fourrier** (n : entier),

- $\boldsymbol{a_0}$ représente la **moyenne** ou la **composante continue** (DC) du signal.
- Si $x(t)$ est **paire** alors, $\boldsymbol{b_n = 0}$
- Si $x(t)$ est **impaire** alors, $a_n = \boldsymbol{0}$

Tout signal périodique $\boldsymbol{x(t)}$ de période $\boldsymbol{T_0}$ peut se décomposer en une somme infinie d'exponentiels complexes (**la série de Fourier complexe**) :

$$\boldsymbol{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}} \quad , \quad \textbf{avec} \quad X_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-j2\pi f_0 n t}dt \quad \text{, et} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$\boldsymbol{X_n}$: Sont **les coefficients complexes de la série Fourier**, $\boldsymbol{X_0}$ représente la **moyenne** ou la **composante continue** (DC) du signal.

$$\boldsymbol{X_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)} \;, \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{a_n = 2\, R\acute{e}el(X_n)} \quad , \quad \boldsymbol{b_n = -2\, Im(X_n)}$$

La transformée de Fourier (TF)

Si le signal n'est pas périodique, alors on utilise **la transformée de Fourier** pour calculer le spectre du signal : on peut ainsi obtenir le domaine fréquentiel $X(f)$ à partir de la représentation temporelle $x(t)$.

$$\boldsymbol{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}dt}$$

On peut aussi passer du domaine fréquentiel au domaine temporel par **la transformée de Fourier inverse** connaissant $\boldsymbol{X(f)}$:

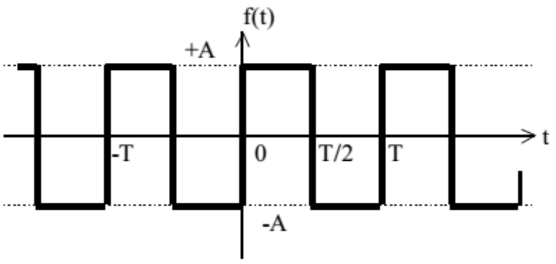
$$\boldsymbol{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{+j2\pi f t}df}$$

Théorème de Perceval : ***L'énergie temporelle égale à l'énergie fréquentielle.***

$$\boldsymbol{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df}$$

Exemples de décomposition en série de Fourier (SF)

1. <u>Signal carré</u>

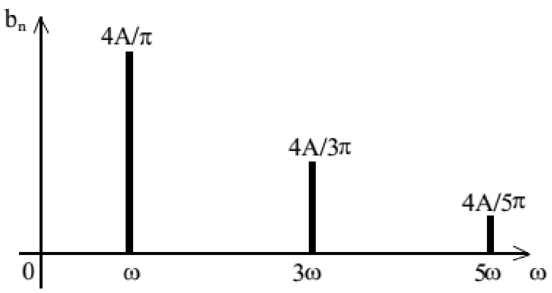


On considère le signal de la figure ci-contre . La fonction f(t) est impaire et sa décomposition ne contiendra que des termes en sinus. On peut calculer :

$$a_0 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega t dt = \frac{2A}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2A}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

Par conséquent, la décomposition ne comprend que des harmoniques d'ordre impair :



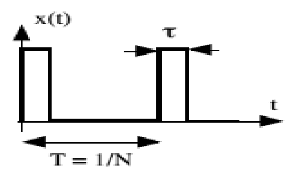
$$f(t) = \frac{4A}{\pi}\left[\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + ...\right]$$

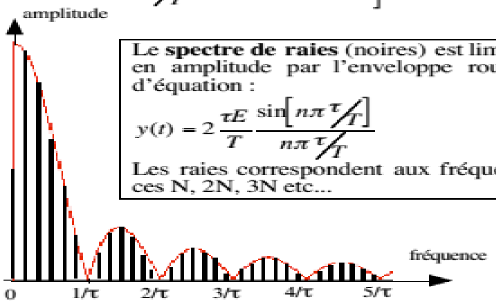
Son spectre est donné sur la figure ci-contre.

2. <u>Train d'impulsions</u>

<u>Décomposition de Fourier et spectre de fréquences d'une impulsion rectangulaire périodique (train d'impulsions ininterrompu)</u>

$$x(t) = \frac{\tau E}{T}\left[1 + \frac{2\sin\left[\pi \tau/T\right]}{\pi \tau/T}\cos[2\pi N t] + ...+ \frac{2\sin\left[n\pi \tau/T\right]}{n\pi \tau/T}\cos[2\pi(nN)t]..\right]$$





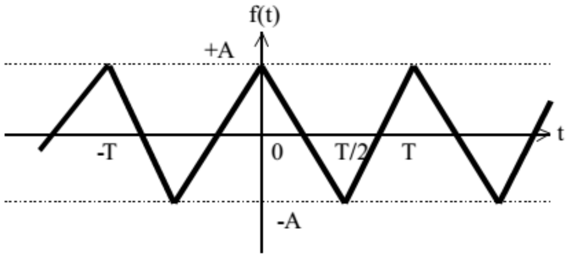
Le **spectre de raies** (noires) est limité en amplitude par l'enveloppe rouge d'équation :

$$y(t) = 2\frac{\tau E}{T}\frac{\sin\left[n\pi \tau/T\right]}{n\pi \tau/T}$$

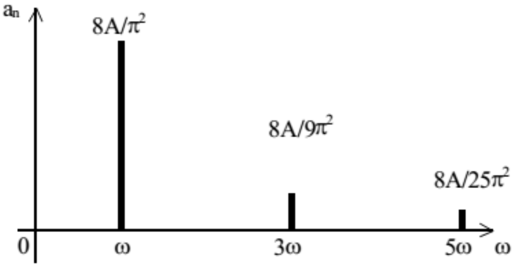
Les raies correspondent aux fréquences N, 2N, 3N etc...

3. Signal triangulaire paire

On considère le signal triangulaire donné ci-dessous (la fonction f(t) est paire). La décomposition en séries de Fourier s'écrit alors :



Signal triangulaire



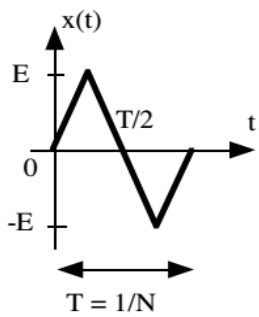
Spectre en fréquences

$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2}\left[\cos\omega t + \frac{1}{3^2}\cos 3\omega t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega t + ...\right]$$

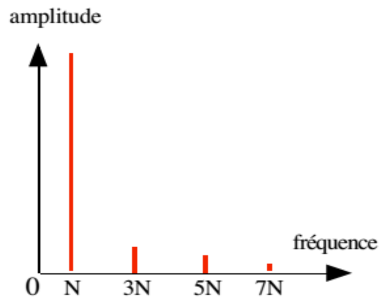
4. Signal triangulaire impaire

Décomposition de Fourier et spectre de fréquences d'un signal triangulaire périodique ininterrompu

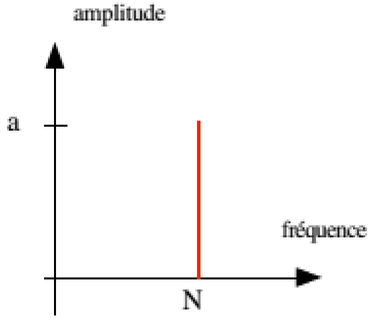
$$x(t) = \frac{8E}{\pi^2}\left[\sin[2\pi Nt] - \frac{\sin[2\pi(3N)t]}{3^2} + \frac{\sin[2\pi(5N)t]}{5^2} + ...\right]$$



Spectre amplitude - fréquence (sur le dessin, on se limite à l'harmonique 7N)

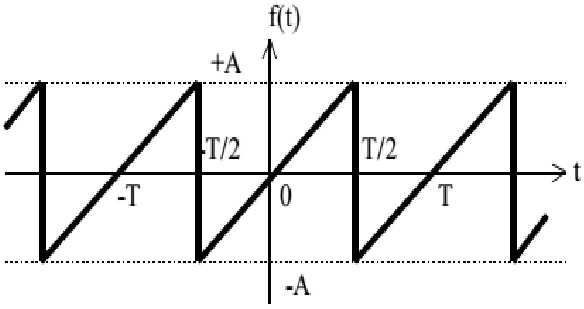


5. Signal sinus : $x(t) = a\ sin(wt + \varphi)$



$$x(t) = a\sin(2\pi Nt + \phi)$$

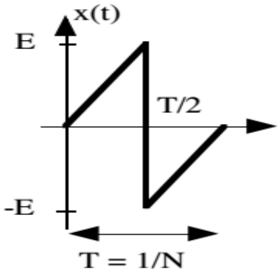
6. Signal dents de scie



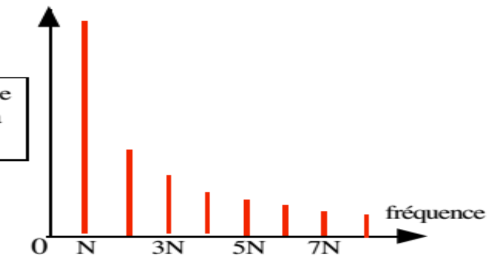
$$f(t) = \frac{2A}{\pi}\left[\sin\omega t - \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t - \frac{1}{4}\sin 4\omega t + \ldots\right]$$

Décomposition de Fourier et spectre de fréquences d'un signal périodique en "dents de scie" ininterrompu

$$x(t) = \frac{2E}{\pi}\left[\sin[2\pi N t] - \frac{\sin[2\pi(2N)t]}{2} + \frac{\sin[2\pi(3N)t]}{3} + \ldots\right]$$

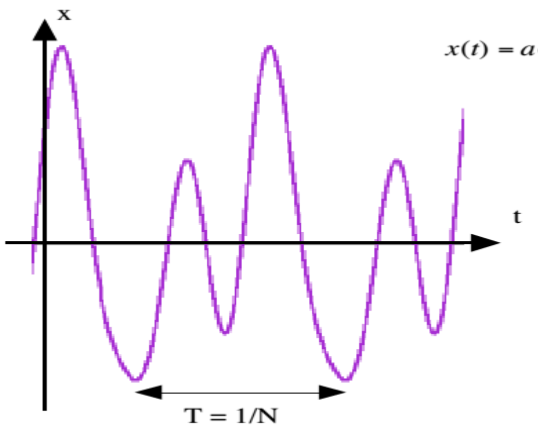


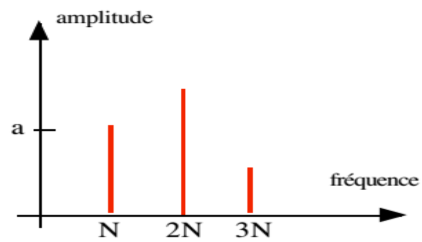
Spectre amplitude - fréquence (sur le dessin, on se limite à l'harmonique 8N)



Exemple de spectre de fréquences d'un signal composé périodique ininterrompu

$$x(t) = a\cos[2\pi N t] + 1{,}5\,a\sin[2\pi(2N)t] + \frac{a}{2}\sin[2\pi(3N)t]$$

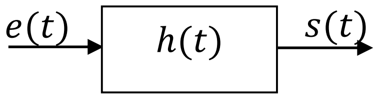




Chapitre 3 : Convolution et Corrélation

I. La convolution

La convolution est très courante et joue un rôle très important dans le domaine d'étude des systèmes, elle nous informe sur la nature du système et son degré (la réponse impulsionnelle).



$S(t) = e(t) * h(t)$

$$\boldsymbol{S(t) = e(t) * h(t)}$$

Si $\boldsymbol{e(t) = \delta(t)}$**,** $S(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$

Si $\boldsymbol{e(t) = \delta(t - t_0)}$**,** $S(t) = e(t) * h(t) = \delta(t - t_0) * h(t) = h(t - t_0)$

La réponse impulsionnelle du système (l'entré est impulsion de Dirac $\boldsymbol{\delta(t)}$) nous donne le type (l'ordre ou degré) du système.

La réponse indicielle est la réponse sur une entrée échelon.

Définition : le produit de convolution entre deux fonctions $x(t)$ et $h(t)$, noté par le symbole *****, est définie par l'intégrale :

$$\boxed{\boldsymbol{y(t) = x(t) * h(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t - \tau)d\tau}}$$

$$\boldsymbol{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau = (h * x)(t)}$$

<u>Exemple 1</u>

Soit à calculé le produit de convolution du signal rectangulaire unitaire de durée (T) avec une rampe unitaire :

$$\boldsymbol{g(t) = x(t) * y(t) == \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).y(t - \tau)d\tau}$$

$$\boldsymbol{g(t) = rect(t/T) * r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(\tau/T).r(t - \tau)d\tau}$$

- Si $\boldsymbol{t < -T/2}$ **: le produit** $\boldsymbol{rect\left(\frac{\tau}{T}\right).r(t - \tau) = 0 \rightarrow g(t) = 0}$
- **Si** $\boldsymbol{-T/2 < t < T/2}$ **:**

$$\boldsymbol{g(t) = rect(t/T) * r(t) = \int_{-T/2}^{t} (t - \tau)d\tau}$$

$$g(t) = rect(t/T) * r(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{t} (t-\tau)d\tau = \int_{-\frac{T}{2}}^{t} t d\tau - \int_{-\frac{T}{2}}^{t} \tau d\tau = t\tau - \frac{1}{2}\tau^2$$

$$g(t) = rect(t/T) * r(t) = t^2 + \tau\frac{T}{2} - \frac{1}{2}(t^2 - \frac{T^2}{4})$$

- **Si $t > T/2$**

$$g(t) = rect(t/T) * r(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (t-\tau)d\tau = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t d\tau - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tau d\tau = t\tau - \frac{1}{2}\tau^2$$

$$g(t) = rect(t/T) * r(t) = tT$$

Donc le resultat de la convolution est :

$$\boxed{g(t) = \begin{cases} o & si \quad t < -T/2 \\ t^2 + \tau\frac{T}{2} - \frac{1}{2}\left(t^2 - \frac{T^2}{4}\right) & si \quad -T/2 < t < T/2 \\ tT & si \quad t > T/2 \end{cases}}$$

Propriétés de la convolution

A partir de la définition du produit de convolution, on montre facilement les propriétées suivantes :

- ***Commutatif*** : $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
- ***Associatif*** : $x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t)) = (x_1(t) * x_2(t)) * x_3(t)$
- ***Distributif*** par rapport à l'addition :

$$x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t)) = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$$

L'élément neutre (l'identité) : $\delta(t) * x(t) = (\delta * x)(t) = x(t)$

$$\delta(t) * 1 = 1$$

Translation d'une fonction : $x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)$

$$x(t-b) * \delta(t-a) = x(t-a-b)$$

Translation d'un produit de convolution :

$$x(t) * y(t-a) = x(t-a) * y(t)$$

Dérivation : $(\boldsymbol{x} * y)' = x' * y = x * y'$

Intégration : $\int (x * y)(t) = \int x(t)dt \,.\int y(t)dt$

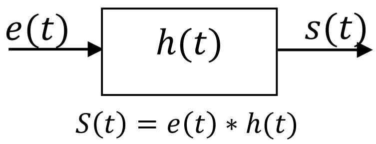
- ***La transformée de Laplace*** : $x_1(t) * x_2(t) \ \leftrightarrow X_1(p).X_2(p)$
- ***La transformée de Fourier*** : $x_1(t) * x_2(t) \ \leftrightarrow X_1(f).X_2(f)$

- On retiendra, que le produit de convolution est commutatif.

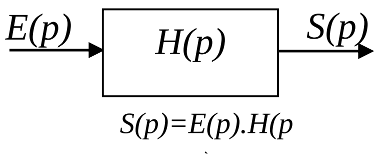
$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

- Si $\boldsymbol{e(t) = \delta(t)}$ **,** la distribution de Dirac, alors on a : (analyse temporelle)

$s(t) = x(t) * h(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$



Représentation temporelle



Représentation fréquencielle

- Si l'entré : $\boldsymbol{e(t) = \delta(t)}$ **,** la distribution de Dirac, on a alors (analyse fréquentielle)

$$\boldsymbol{E(p) = 1,} \text{ donc } \boldsymbol{S(p) = E(p).H(p) = H(p)}$$

D'où, $\boldsymbol{s(t) = h(t)}$, $\boldsymbol{s(t)}$ est la ***réponse impulsionnelle du système***.

$\delta'(t) * 1 = \delta(t) * (1)' = 0$

$(\delta'(t) * 1) * x(t) = 0$

$1 * (\delta'(t) * x(t)) = 1 * x'(t) = x'(t)$

(*) n'est pas distributif

Convolution d'un signal de duré finie par une peigne de Dirac $\boldsymbol{\delta_T(t)}$

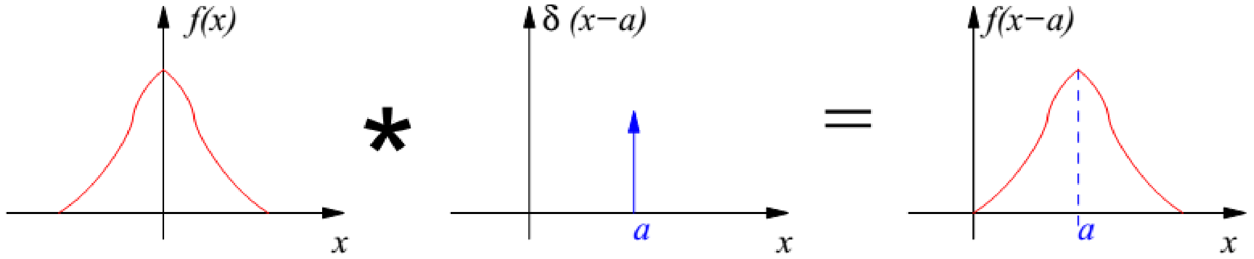
Il s'agit d'une propriété importante en théorie du signal. Ainsi en utilisant la propriété de décalage, on peut écrire :

$$x(t) * \delta(t) = (x * \delta)(t) = x(t)$$

$$x(t) * \delta(t-a) = (x * \delta)(t-a) = x(t-a)$$

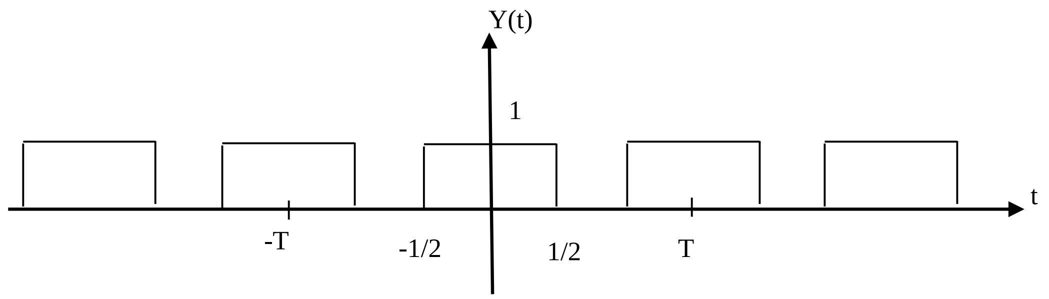
Et on obtient un résultat intéressant : pour translater une fonction d'une quantité « a », on la convolue par un pic de Dirac $\boldsymbol{\delta(t-a)}$, on écrira souvent :

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)}}$$

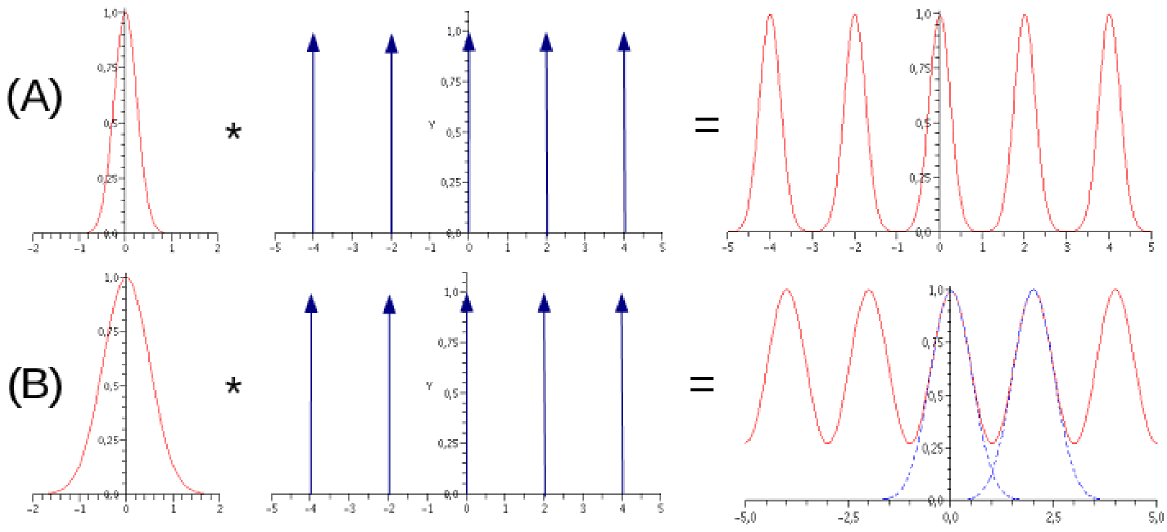


Exemple 2 Soit : $\boldsymbol{x(t) = rect(t)}$

$$\boldsymbol{y(t) = x(t) * \delta_T(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(t-kT)}$$

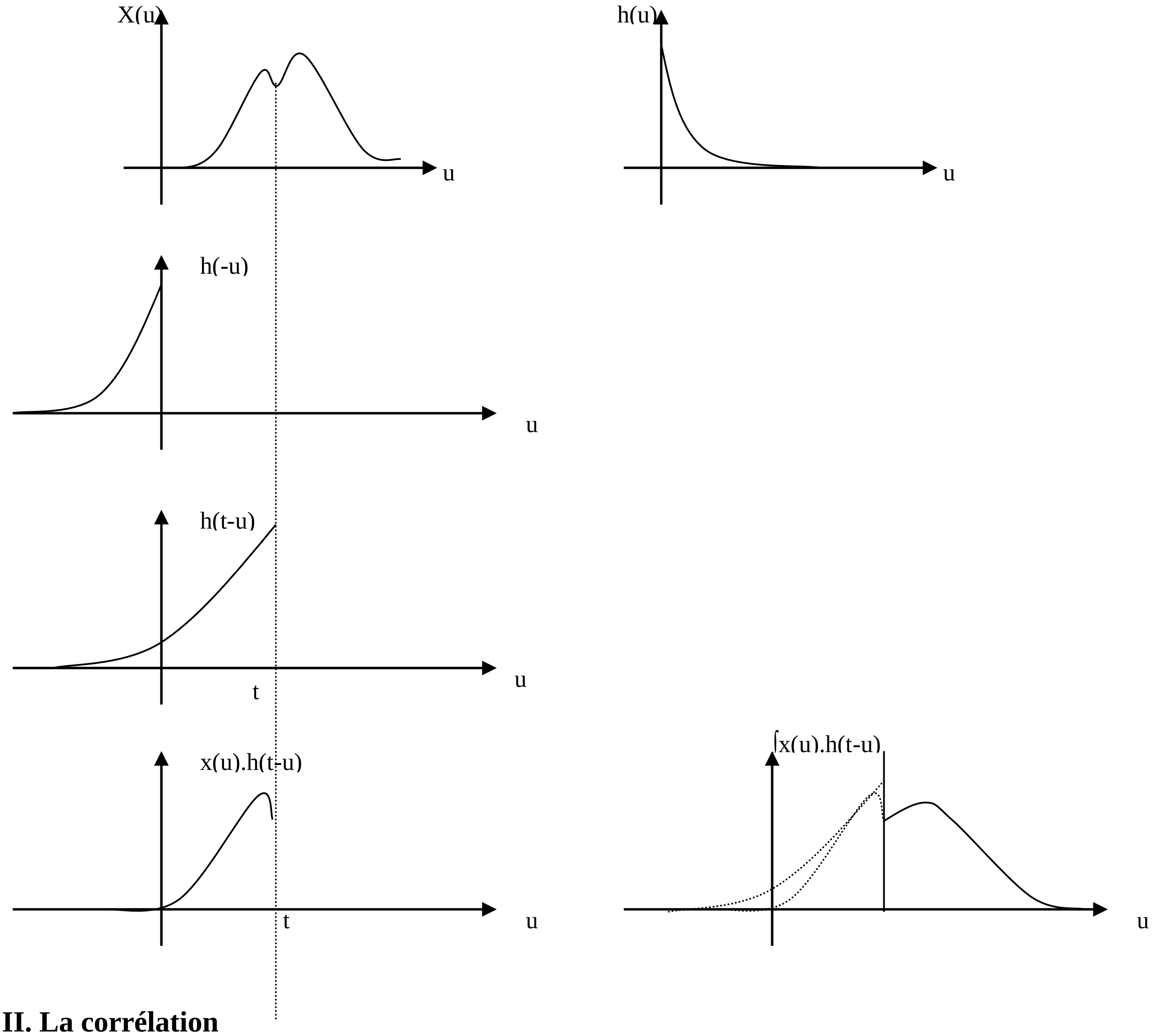


Exemple 3



L'utilisation de la propriétée de décalage dans la convolution d'une fonction (ou d'un signal) $\boldsymbol{x(t)}$ par une peigne de Dirac c'est périodiser $\boldsymbol{x(t)}$, c'est-à-dire créer une fonction périodique à partir d'une infinité de répliques $\boldsymbol{x(t)}$ centrées sur les dents du peigne, et faire la somme de toutes ces répliques.

La convolution graphique d'un signal quelconque



II. La corrélation

On parle de corrélation entre signaux si on veut faire une comparaison, elle est utilisée pour l'extraction de l'information, son rôle est l'étude à quel point deux signaux peuvent ressemblés dans le temps.

On distingue l'auto-corrélation (**ACF**) et l'inter-corrélation (**CCF**).

L'auto-corrélation consiste à comparer un signal x(t) avec lui-même dont l'un est décalé d'une certaine valeur « τ », on définit la fonction d'auto-corrélation (**ACF**) par :

$$\boxed{\boldsymbol{C_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau).\, x(t+\tau)\, d\tau}}$$

On constate que à $t = 0$;

$$\boxed{C_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(\tau))^2 d\tau = w_x = E_x}$$; C'est l'**énergie du signal**

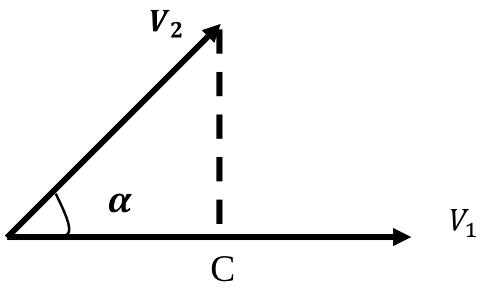
L'inter-corrélation (CCF) consiste à comparer deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ dont l'un est décalé de l'autre par une certaine valeur « τ », on définit la fonction d'inter-corrélation (**CCF**) par :

$$\boxed{C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau).\, y(t+\tau) d\tau}$$

Interprétation : Le produit scalaire

Le produit scalaire des signaux exprime la proportionnalité de la projection de l'un sur l'autre. Ce produit est nul lorsque les signaux sont orthogonaux et est maximal quand les signaux sont paralèlles.

$$s = \langle V_1 | V_2 \rangle = V_1 . V_2 = |V_1| . |V_2| cos(\alpha)$$



Remarque

Si les signaux sont **orthogonaux**, alors ils sont **non corrélés** (ou on dit **décolérées**) et pour chaque valeur de t on aura $C_{xy}(t) = 0$

Si $x(t)$ **et** $y(t)$ sont **ortogonaux,** alors : $c_{xy}(t) = 0$

Relation entre convolution et corrélation

$$C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).\, y(t+\tau) d\tau$$

Soit $\tau = -\tau'$ donc $d\tau = -d\tau'$

Alors

$$C_{xy}(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau').\, y(t-\tau') d\tau'$$

Si $x(t)$ est pair donc $\boldsymbol{x(\tau) = x(-\tau)}$

$$\boldsymbol{C_{xy}(t) = +\int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau).\,y(t-\tau)d\tau}$$

$$\boxed{\boldsymbol{C_{xy}(t) = x(-t) * y(t)}}$$

Dans le cas où $\boldsymbol{x(t)}$ est ***pair.***

<u>Exemple (TD)</u>

Calculer la convolution $(x(t) * y(t))$ et l'intercorrelation $Cxy(t)$ sachant que : $x(t) = e^{-at}.e(t)$, et $y(t) = e^{-2at}.e(t)$, avec $e(t)$ est l'echelon unitaire.

Densité spectrale d'énergie DSE

On définit la densité spectrale d'énergie $\boldsymbol{E_x(f)}$ par la transformée de Fourier de la corrélation :

$$\boldsymbol{E_x(f) = TF\{C_x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} C_x(t).\,e^{-j2\pi ft}dt}$$

$\boldsymbol{C_x(t) = x^*(-t) * x(t)}$

$E_x(f) = TF\{C_x(t)\} = TF\{x^*(-t) * x(t)\} = X^*(f).X(f) \rightarrow \quad \boldsymbol{E_x(f) = |X(f)|^2}$

$$\boxed{\boldsymbol{E_x(f) = TF\{C_x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} C_x(t).\,e^{-j2\pi ft}dt = |X(f)|^2}}$$

$$\boldsymbol{C_x(t) = TF^{-1}\{E_x(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f).\,e^{j2\pi ft}df}$$

Pour $t = 0$;

$$\boldsymbol{C_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df}$$

Et d'après l'identité de Parseval :

$\boldsymbol{C_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt}$, Alors $\boldsymbol{w_x = C_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f)df}$ **,** l'énergie du signal, c'est pour cette raison qu'on définit $\boldsymbol{E_x(f)}$ par la densité spectrale d'énergie (DSE).

Propriétés de la DSE

- Indépendante du spectre de la phase $\boldsymbol{E_x(f) = |X(f)|^2}$
- Fonction réel non négative.

Densité inter-spectrale d'énergie

On la définie par :

$$\boldsymbol{E_{xy}(f) = TF\{C_{xy}(t)\} = TF\{x^*(-t) * y(t)\} = X^*(f).Y(f)}$$

$$\boldsymbol{E_{xy}(f) = X^*(f).Y(f),}\ \textbf{fonction complexe non symétrique}$$

<u>**Exemple (TD)**</u>

$$x(t) = A.rect(t/T)$$

$$y(t) = B.[rect((t + T/4)/T/2) - rect((t - T/4)/T/2)]$$

<u>Récapitulation</u>

- ***La convolution***

$$\boldsymbol{y(t) = x(t) * h(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau)d\tau}$$

$$\boldsymbol{y(t) = x(t) * h(t) = (x * h)(t) = (h * x)(t)}$$

- **La corrélation**

L'auto-corrélation : *entre le signal et lui-même*

$$\boldsymbol{C_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau).x(t+\tau)d\tau}$$

L'inter-corrélation : *entre deux signaux différents*

$$\boldsymbol{C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau).y(t+\tau)d\tau}$$

- **Relation entre convolution et corrélation**

$\boldsymbol{C_{xy}(t) = x(-t) * y(t)}$ **,** dans le cas où $x(t)$ est ***pair***

- **Densité spectrale et inter-spectrale d'énergie DSE**

DSE

$$\boldsymbol{E_x(f) = TF\{C_x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} C_x(t).e^{-j2\pi ft}dt}$$

Inter

$$\boldsymbol{E_{xy}(f) = TF\{C_{xy}(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xy}(t).e^{-j2\pi ft}dt}$$

- **Si au moins l'un des signaux $\boldsymbol{x(t)}$ ou $\boldsymbol{y(t)}$ est pair, alors :**
  - $\boldsymbol{E_x(f) = |X(f)|^2}$**,** *fonction symétrique*
  - $\boldsymbol{E_{xy}(f) = X^*(f).Y(f)}$ **,** *fonction complexe*

Chapitre 4 : La Transformée de Laplace

Définition

La transformée de Laplace (TL) est un outil essentiel dans la représentation des systèmes continus, elle trouve son application dans la représentation des fonctions des systèmes sous le nom de fonction de transfert, elle est définie par la relation :

Soit une fonction $f(t)$, fonction réelle de la variable t, $t \geq 0$

$$TL\{f(t)\} = F(P) = \lim_{T\to+\infty}\int_{\varepsilon}^{T} f(t).e^{-Pt}dt = \int_{0}^{+\infty} f(t).e^{-Pt}dt$$

Tel que : $P = \sigma + jw, \quad P \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\boldsymbol{TL\{f(t)\} = F(P) = \int_{0}^{+\infty} f(t).e^{-Pt}dt}}$$

Exemple 1: Trouver la transformée de Laplace (TL) de la fonction $\boldsymbol{f(t) = e^{-at}}$

Solution :

$$F(P) = \int_{0}^{+\infty} f(t).e^{-Pt}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}.e^{-Pt}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(P+a)t}dt$$

$$= \frac{-1}{P+a}e^{-(P+a)t}\Big/_{0}^{+\infty} = \frac{1}{P+a}$$

$$\boxed{\boldsymbol{L\{e^{-at}\} = F(P) = \frac{1}{P+a}}}$$

L'inversion de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace (TL) fait passer le problème du domaine temporel au domaine complexe pour le résoudre, mais après la résolution du problème dans le domaine complexe, on cherche a avoir la solution dans le domaine temporel, d'où la nécessité de la transformée de Laplace inverse :

Soit $F(P) = L\{f(t)\}$

$$\boldsymbol{f(t) = L^{-1}[F(P)] = \frac{1}{j2\pi}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(P).e^{Pt}dP}$$

Remarque : pour trouver la transformée inverse de Laplace, aulieu de faire l'integrale et comme les bornes de cet integral sont complexe, on utilise la table de Laplace, et la décomposition en elements simples selon le cas utilisé.

La TL des fonctions (signaux) usuels

1- **La TL de l'échelon**

$\boldsymbol{e(t) = 1} \quad pour \;\; \boldsymbol{t > 0}$

$$E(P) = \int_0^{+\infty} e(t)e^{-Pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-Pt}dt = \frac{-1}{P}e^{-Pt} = \frac{1}{P}$$

$$\boxed{\boldsymbol{TL[e(t)] = E(P) = \frac{1}{P}}}$$

2- **La TL d'une rampe**

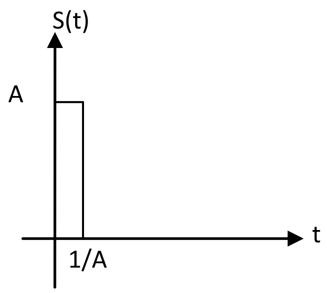
$\boldsymbol{r(t) = t} \quad pour \;\; \boldsymbol{t > 0}$

$$R(P) = \int_0^{+\infty} r(t)e^{-Pt}dt = \int_0^{+\infty} te^{-Pt}dt = \frac{1}{P^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{TL[r(t)] = R(P) = \frac{1}{P^2}}}$$

3- **La TL de l'impulsion de Dirac $\boldsymbol{\delta(t)}$**

$\delta(t) = \lim\limits_{A\to+\infty} S(t)$



On a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t)dt = x(0)$

$TL\{\delta(t)\} = \delta(P) = \int_0^{+\infty} \delta(t).e^{-Pt}dt = e^0 \;\; = 1$

$$\boxed{\boldsymbol{TL\{\delta(t)\} = \delta(P) = 1}}$$

4- **Exponentielle décroissante**

$\boldsymbol{f(t) = e^{\frac{-1}{T}t}}$

$$F(P) = \int_0^{\infty} f(t).e^{-Pt}dt = \int e^{\frac{-1}{T}t}.e^{-Pt}dt = \int e^{-\left(\frac{1}{T}+P\right)t}dt = \int e^{-\left(\frac{1+TP}{T}\right)t}dt$$

$$= \frac{-T}{1+TP}e^{-t\left(\frac{1+TP}{T}\right)} \quad = \frac{T}{1+TP}$$

$$\boxed{\boldsymbol{TL\left\{f(t) = e^{\frac{-1}{T}t}\right\} = F(P) = \frac{T}{1+TP}}}$$

Propriétés de la TL

La transformée de Laplace (TL) a plusieurs propriétées et parmi ces propriétés, la résolution des équations différentielles à coefficients constants est la plus importante :

1) **Linéarité**

$$L[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(P) + bF_2(P)$$

$$L^{-1}[aF_1(P) + bF_2(P)] = af_1(t) + bf_2(t)$$

Exemple 2 : sachant que : $F_1(P) = L[e^{-t}] = \frac{1}{P+1}$, $F_2(P) = L[e^{-2t}] = \frac{1}{P+2}$

Trouver : $L^{-1}[2F_1(P) - 4F_2(P)] = L^{-1}\left[\frac{2}{P+1} - \frac{4}{P+2}\right] = 2e^{-t} - 4e^{-2t} = 2f_1(t) - 4f_2(t)$

2) **Dérivée**

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = P.F(P) - f(0) \qquad , \qquad f(0) = f(t) \quad /t = 0$$

Et plus généralement (pour la dérivé $n^{ième}$) :

$$\boldsymbol{L\left[\frac{df^n(t)}{dt^n}\right] = P^nF(P) - P^{(n-1)}f(0^+) - P^{(n-2)}f^{(1)}(0^+) - \cdots\ldots - Pf^{(n-1)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)}$$

3) **L'intégrale** : $L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(P)}{P}$

4) **La valeur initiale** : $f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{P\to +\infty} PF(P)$

5) **La valeur finale** : $f(+\infty) = \lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{P\to 0} PF(P)$

6) **Modification d'échelle :** $L\left[f(\frac{t}{a})\right] = a.F(aP)$

7) **Décalage temporelle (Retard)** : $L[f(t-T)] = e^{-PT}F(P)$

8) $L^{-1}\left[F(\frac{P}{a})\right] = a.f(at)$

9) **Produit temporel** :

$$L[f_1(t).f_2(t)] = \frac{1}{j2\pi}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(w).F_2(P-w)dw = F_1(P) * F_2(P)$$

10) **Convolution temporelle :**

- $\boldsymbol{L^{-1}[F_1(P).F_2(P)]} = \int_0^t f_1(\tau).f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_2(\tau).f_1(t-\tau)d\tau$

$$= f_1(t) * f_2(t) \to \boldsymbol{L\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(P).F_2(P)}$$

11) **Convolution complexe :**

- $[\boldsymbol{F_1(P).F_2(P)}] = \int_0^t f_1(\tau).f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_2(\tau).f_1(t-\tau)d\tau$
  $= f_1(t) * f_2(t) \to \boldsymbol{L\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(P).F_2(P)}$

12) Translation dans le domaine complexe

$$L\{e^{-at}f(t)\} = F(P+a) \quad , \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

Exemple 3 : $\boldsymbol{L\{e^{-at}.e(t)\} = L\{e^{-at}\} = \frac{1}{P+a} = E(P+a)}$

13) $\boldsymbol{L\left\{\frac{t^n}{n}e(t)\right\} = \frac{1}{P^{n+1}}}$

14) Théorème de retard temporel

$$L\{f(t-t_0).e^{(t-t_0)}\} = e^{-t_0P}.F(P)$$

Exemple 4 : calculer la TL de la fonction :

$f(t) = e^{-4t} + \sin(t-2) + te^{-2t}$

Propriété de décalage :

$L[\sin(t-2)] = \frac{1}{P^2+1}e^{-2P}$

$L[e^{-4t}] = \frac{1}{P+4}$, $L[\sin(t)] = \frac{1}{P^2+1}$,

$L[te^{-2t}] = \frac{1}{(P+2)^2}$

$\boldsymbol{f_1(t) = e^{-4t} + \sin(t-2) + te^{-2t}}$, $\boldsymbol{F_1(P) = \frac{1}{P+4} + \frac{1}{P^2+1}e^{-2P} + \frac{1}{(P+2)^2}}$

Exemple 5 : calculer la TL^{-1} de la fonction

$$\boldsymbol{F_2(P) = \frac{P+2}{P^2+4}e^{-P}}$$

Par décomposition :

$$F_2(P) = \left(\frac{P}{P^2+4} + \frac{2}{P^2+4}\right)e^{-P} = \frac{Pe^{-P}}{P^2+4} + \frac{2e^{-P}}{P^2+4}$$

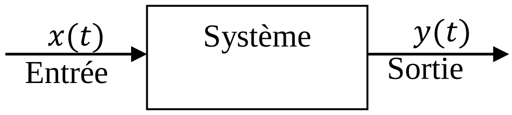
$$L^{-1}\left[\frac{Pe^{-P}}{P^2+4}\right] = \cos 2(t-1)$$

$$L^{-1}\left[\frac{2e^{-P}}{P^2+4}\right] = \sin 2(t-1)$$

Alors : $\boldsymbol{f_2(t) = \cos 2(t-1) + \sin 2(t-1)}$, $\boldsymbol{pour\ t} > 1$

Application de la TL à la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants

1) $\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{a_i} \frac{\boldsymbol{d^i y(t)}}{\boldsymbol{dt^i}} = \boldsymbol{x(t)}$ (1)



Avec les conditions initiales à $t = 0$

$$\frac{d^k y(t)}{dt^k} = y_0^{(k)} \quad , \quad k = 0, 1, \dots n-1$$

Alors la TL de l'équation **(1)** est

$\sum_{i=0}^{n} a_i \left[P^i Y(p) - \sum_{k=0}^{i-1} P^{i-1-k} y_0^{(k)}\right] = X(P), \quad k = 0 \dots n-1,$ TL de l'équation différentielle

$$\boldsymbol{Y(P) = \frac{X(P)}{\sum_{i=0}^{n} a_i P^i} + \frac{\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} a_i P^{i-1-k} y_0^{(k)}}{\sum_{i=0}^{n} a_i P^i}}$$

On définit le **polynôme caractéristique** de cette équation par : $\boldsymbol{\sum_{i=0}^{n} a_i P^i}$

$$\boldsymbol{y(t) = L^{-1}[Y(P)] = L^{-1}\left[\frac{X(P)}{\sum_{i=0}^{n} a_i P^i}\right] + L^{-1} \frac{\sum\sum a_i P^{i-1-k} y_0^{(k)}}{\sum \ a_i P^i}}$$

Exemple 6 : trouver la TL de l'équation différentielle suivante puis Y(P) :

$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 1 = x(t) \quad ; sachant\ que : y(0) = -1 \qquad \frac{dy(t)}{dt} = y_0^{(1)} = y_0' = 2$

$$\boldsymbol{a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 1}$$

Solution :

$L\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] = P^2Y(P) - Py(0) - y'(0)$

$L\left[3\frac{dy(t)}{dt}\right] = 3(PY(P) - y(0)) = 3PY(P) - 3y(0)$

$L[2y(t)] = 2Y(P) \quad , \quad L[1 = x(t) = e(t)] = \frac{1}{P}$

On aura :

$P^2Y(P) - Py(0) - y'(0) + 3PY(P) - 3y(0) + 2Y(P) = \frac{1}{P}$

$Y(P)[P^2 + 3P + 2] = P\,y(0) + y'(0) + 3y(0) + \frac{1}{P}$

$$= -P + 2 - 3 + \frac{1}{P} = -P + \frac{1}{P} - 1 = \frac{-P^2 - P + 1}{P}$$

$$\boldsymbol{Y(P)} = \frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{P}} \cdot \frac{\boldsymbol{P^2 + P - 1}}{\boldsymbol{(P^2 + 3P + 2)}} \quad , \qquad L^{-1}\big(Y(P)\big) = y(t)$$

Le polynôme caractéristique : (**P²+3P+2**)

$$\textbf{2)}\ \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{a_i} \frac{\boldsymbol{d^i y(t)}}{\boldsymbol{dt}} = \sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{b_i} \frac{\boldsymbol{dx^i(t)}}{\boldsymbol{dt}}$$

Avec les conditions initiales à : $t = 0$,

$$\frac{d^k y(t)}{dt^k} = y_0^{(k)} \ , \frac{d^k x(t)}{dt^k} = x_0^{(k)} \qquad , k = 0,1 \dots \dots n-1$$

La TL

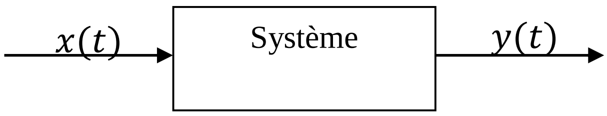
$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left[p^i Y(P) - \sum_{k=0}^{i-1} P^{i-1-k} . y_0^{(k)} \right] = \sum_{i=0}^{m} b_i \left[P^i X(P) - \sum_{k=0}^{i-1} P^{i-1-k} x_0^{(k)} \right]$$

$$\boldsymbol{Y(P)} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{b_i P^i}}{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_i P^i}} \right] \boldsymbol{X(P)} - \frac{\sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{i-1} \boldsymbol{b_i P^{i-1-k} x_0^{(k)}}}{\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{a_i P^i}} + \frac{\sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{i-1} \boldsymbol{a_i P^{i-1-k} y_0^{(k)}}}{\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{a_i P^i}}$$

Expemple 7 : Soit le système suivant définit par l'equation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

Trouver la réponse du système pour une entrée $x(t) = 10\, e(t)$, avec les conditions initiales :
$y(0) = 2, \ y'(0) = -10$



Solution : La TL de l'équation du système

$$P^2 Y(P) - P\, y(0) - y'(0) + 3PY(P) - 3y(0) + 2Y(P) = 10E(P)$$

$$P^2 Y(P) - 2P + 10 + 3PY(P) - 6 + 2Y(P) = \frac{10}{P}$$

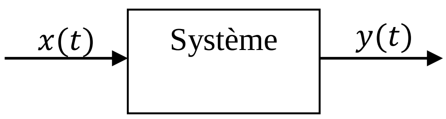
$$(P^2 + 3P + 2)Y(P) - 2P + 4 = \frac{10}{P}$$

$$(\mathrm{P}^2 + 3\mathrm{P} + 2)\mathrm{Y(P)} = \frac{10}{P} + 2P - 4 \ \rightarrow \boldsymbol{Y(P)} = \frac{\frac{\boldsymbol{10}}{\boldsymbol{P}} \boldsymbol{+ 2P - 4}}{\boldsymbol{P^2 + 3P + 2}}$$

La fonction transfert (FT)

Si on suppose que le système n'a aucune énergie emmagasinée c'est-à-dire, conditions initiales nulles, alors on définit la fonction de transfert du système par la relation :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{dx^i(t)}{dt^i}$$



La TL de l'équation : avec les **condition initiles nulles :**

$$\sum_{i=0}^{n} P^i a_i Y(P) = \sum_{i=0}^{m} b_i P^i X(P)$$

$$Y(P) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i P^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i P^i} X(P) = \frac{b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \cdots + a_0} X(P)$$

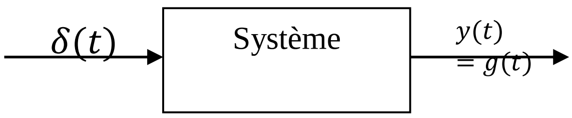
La fonction de transfert est définie par le rapport entre la sortie et l'entrée.

$$\boldsymbol{G(P) = \frac{Y(P)}{X(P)}}$$

$$\boldsymbol{F(P) = G(P) = \frac{Y(P)}{X(P)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i P^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i P^i} = \frac{b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{Num(P)}{Den(P)}}$$

$G(P) = \frac{Y(P)}{X(P)} \qquad \rightarrow \boldsymbol{Y(P) = G(P).X(P)}$

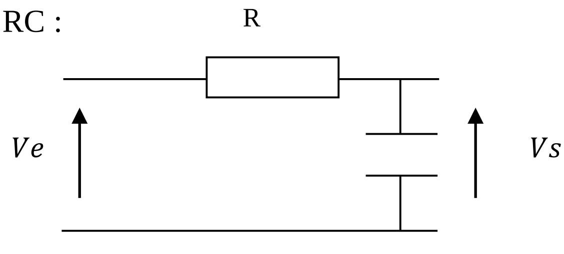
- Si $\boldsymbol{x(t)} = \boldsymbol{\delta(t)}$ ------------------ $X(P) = 1$



$G(P) = \frac{Y(P)}{X(P)} \qquad \rightarrow \boldsymbol{Y(P) = G(P).X(P) = G(P)}$

$L^{-1}[G(P)] = g(t)$, C'est la **réponse impulsionnelle du système**.

Exemple 8 : Soit le système suivant représenté par le circuit RC :



$V_e(t) = R.i(t) + V_S(t)$

$V_e(t) = R.i(t) + \frac{1}{c}\int i(t)dt$

$V_s(t) = \frac{1}{c}\int i(t)dt \quad \rightarrow i(t) = c\frac{dV_s(t)}{dt}$

$$V_e(t) = RC\frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t)$$

L'équation différentielle : $$\frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V_s(t) = \frac{1}{RC}V_e(t)$$

La TL de l'équation différentielle avec **avec les conditions initiales nulles :**

$$TL\left\{\frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V_s(t) = \frac{1}{RC}V_e(t)\right\} = PV_s(P) + \frac{1}{RC}V_s(P) = \frac{1}{RC}V_e(P)$$

$$\left(P + \frac{1}{RC}\right)V_s(P) = \frac{1}{RC}V_e(P) \rightarrow G(P) = \frac{V_s(P)}{V_e(P)} = \frac{{}^1/_{RC}}{P + {}^1/_{RC}} = \frac{1}{1 + RCP}$$

<u>La réponse impulsionnelle du système</u> **est la réponse pour une entrée impulsion de Dirac :**

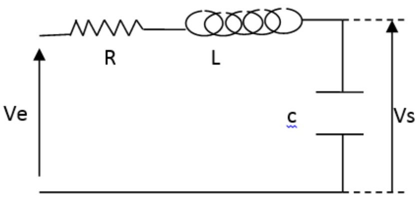
$v_e(t) = \delta(t) \quad \longrightarrow \quad V_e(P) = 1,$ donc : $G(P) = V_s(P) = \frac{1}{1+RCP}$

La *réponse impulsionnelle* du système : $g(t) = L^{-1}[G(P)] \rightarrow \mathbf{g}(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$

L'equation différentielle du circuit RC est de l'ordre 1 : le circuit RC est un système d'ordre 1 :

l'ordre de l'equation différentielle nous donne l'ordre du système.

Exemple 9: soit le circuit RLC suivant :



$V_e(t) = R.i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + V_S(t)$

$V_S(t) = \frac{1}{c}\int i(t)dt \quad \rightarrow i(t) = c\frac{dV_S(t)}{dt} \rightarrow \frac{di(t)}{dt} = C\frac{d^2V_S(t)}{dt^2}$

$V_e(t) = RC\frac{dV_S(t)}{dt} + LC\frac{d^2V_S(t)}{dt^2} + V_S(t)$

$V_e(t) = RC\frac{dV_S(t)}{dt} + LC\frac{d^2V_S(t)}{dt^2} + V_S(t) \quad \rightarrow \frac{d^2V_s(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}.\frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{1}{LC}V_s(t) = \frac{1}{LC}V_e(t)$

La TL :

$$P^2.V_S(P) + \frac{R}{L}P.V_S(P) + \frac{1}{LC}V_S(P) = \frac{1}{LC}V_e(P)$$

$$\left(P^2 + \frac{R}{L}P + \frac{1}{LC}\right)V_S(P) = \frac{1}{LC}V_e(P) \rightarrow$$

$$G(P)=\frac{V_s(P)}{V_e(P)}=\frac{1/_{LC}}{P^2+\frac{R}{L}P+\frac{1}{LC}}=\frac{1}{LCP^2+RCP+1}$$

L'equation différentielle du circuit RLC est de l'ordre 2 : le circuit RLC est un système d'ordre 2.

Les pôles et les zéros

Les zéros : les racines du numérateur de la FT sont appelées les zéros.

Les pôles : les racines du dénominateur de la FT sont appelées les pôles.

$$G(P)=\frac{Num(P)}{Den(P)}=\frac{N(P)}{D(P)}\ ,$$

Les racines de : $N(P)=Zéros.$

Les racines de : $D(P)=Pôles.$

La TL^{-1} d'une fonction

1er cas : les pôles de la fonction à décomposer sont **réels et (simple) distincts** :

$$F(P)=\frac{K}{(P+P_1)(P+P_2)\ldots\ldots(P+P_n)}=\frac{a_1}{P+P_1}+\frac{a_2}{P+P_2}+\cdots+\frac{a_n}{P+P_n}$$

Tel que les ai peuvent calculés de la façon suivante :

$$a_i=\lim_{P\to -P_i}[F(P).(P+P_i)]\quad ,\ i=1\ldots\ldots n$$

2eme cas : **les pôles sont réels et multiples :**

$$F(P)=\frac{N(P)}{(P+P_1)^k(P+P_2)\ldots\ldots(P+P_n)\ldots}=\frac{a_1}{P+P_1}+\frac{a_2}{(P+P_1)^2}+\cdots+\frac{a_k}{(P+P_1)^k}+\frac{a_{k+1}}{P+P_2}+\cdots+\frac{a_{k+n-1}}{P+P_n}\ ,$$

Les a_{k+1} ... a_{k+n-1} sont calculés de la même manière que le cas précédent, mais les a_i associées aux **pôles multiple** sont calculés de la manière suivante :

$$a_i=\lim_{P\to -P_i}\left[\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dP^{i-1}}\left[F(P).(P+P_i)^k\right]\right]\quad ,\ i=1\ldots\ldots k$$

Conclusion :

1. ***l'ordre de l'equation différentielle nous donne l'ordre du système. (temporel)***
2. ***L'ordre du dénominateur de la fonction de transfert est l'ordre du système. (complexe, ou frequencielle)***

<u>Récapitulation</u>

Propriétées de la transformée de Laplace (TL)

$f(t)\ ,\ t \geq 0$	$F(P)$
$f(t)$	$F(P) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-Pt}dt$
$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(P) + bF_2(P)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$PF(P) - f(0)$
$\frac{df^2(t)}{dt^2}$	$P^2F(P) - Pf(0) - f'(0)$
$\frac{df^n(t)}{dt^n}$	$P^nF(P) - P^{(n-1)}f(0) - P^{(n-2)}f^{(1)}(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(P)}{P}$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{P}{a}\right)$
$tf(t)$	$-\frac{dF(P)}{dP}$
$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{dF^n(P)}{dP^n}$
$e^{-at}.f(t)$	$F(P+a)$
$\int_0^t f_1(\tau).f_2(t-\tau)d\tau$	$F_1(P)F_2(P)$
$f(t-a)$	$e^{-aP}F(P)$

<u>Valeur initiale :</u> $f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{P\to+\infty} PF(P)$

<u>Valeur finale :</u> $f(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{P\to 0} PF(P)$

La décomposition de F(P) en éléments simples

Remarque 1

Le cas des pôles de la fonction à décomposer sont **réels et (simple) distincts** :

$$F(P) = \frac{K}{(P+P_1)(P+P_2)\ldots\ldots(P+P_n)} = \frac{a_1}{P+P_1} + \frac{a_2}{P+P_2} + \cdots + \frac{a_n}{P+P_n}$$

Tel que les $\boldsymbol{ai}$ peuvent calculés de la façon suivante :

$$\boldsymbol{a_i = \lim_{P \to -P_i} [F(P).(P+P_i)] \quad , \quad i = 1 \ldots\ldots n}$$

Remarque 2

Le cas de**s pôles sont réels et multiples :**

$$\boldsymbol{F(P) = \frac{N(P)}{(P+P_1)^k(P+P_2)\ldots\ldots(P+P_n)\ldots} = \frac{a_1}{P+P_1} + \frac{a_2}{(P+P_1)^2} + \cdots + \frac{a_k}{(P+P_1)^k} + \frac{a_{k+1}}{P+P_2} + \cdots + \frac{a_{k+n-1}}{P+P_n}},$$

Les $\boldsymbol{a_i}$ associées aux **pôles multiple** sont calculés de la manière suivante :

$$\boldsymbol{a_i = \lim_{P \to -P_i} \left[\frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dP^{i-1}} \left[F(P).(P+P_i)^k \right] \right] \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, k}$$

Table des transformées de Laplace

$f(t)\ ,\ t \geq 0$	$F(P)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-a)$	e^{-aP}
1 ou $e(t)$	$\frac{1}{P}$
$e(t-a)$	$\frac{1}{P}e^{-aP}$
t ou $r(t)$	$\frac{1}{P^2}$
t^n	$\frac{n!}{P^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{P+a}$
$\frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{1}{P(P+a)}$
$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{P(1+\tau P)}$
$t.e^{-at}$	$\frac{1}{(P+a)^2}$
$\frac{t}{\tau^2}.e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{(1+\tau P)^2}$
$sin(wt)$	$\frac{w}{P^2+w^2}$
$cos(wt)$	$\frac{P}{P^2+w^2}$
$e^{-at}sin(wt)$	$\frac{w}{(P+a)^2+w^2}$
$e^{-at}cos(wt)$	$\frac{P+a}{(P+a)^2+w^2}$
$t.sin(wt)$	$\frac{2wP}{(P^2+w^2)^2}$
$t.cos(wt)$	$\frac{P^2-w^2}{(P^2+w^2)^2}$

Bibliographie

[1] Jean-Pierre DELMAS, *“Elements de la théorie du signal : les signaux deterministes*’’, Collection Pédagogique de Télécommunication, Edition Ellipses, 1991.

[2] F. de Coulon, *“Théorie et traitement des signaux“*, Edition PPUR.

[3] F. AUGER, *“Introduction à la théorie du signal et de l’information- cours et exercices’’* Collection Sciences et Techniques, Editions Technip, Paris 1999.

[4] M. Benidir, *“Théorie et Traitement du signal, tome 1 : Représentation des signaux et des systèmes -Cours et exercices corrigés’’*, Dunod, 2004.

[5] M. Benidir, *“Théorie et Traitement du signal, tome 2 : Méthodes de base pour l’analyse et le traitement du signal - Cours et exercices corrigés’’*, Dunod, 2004.