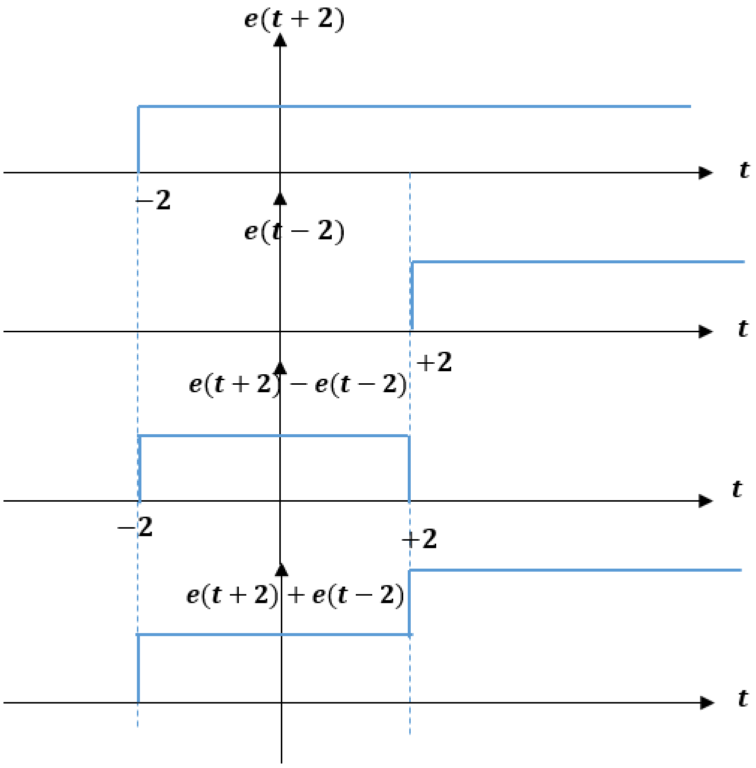
Solution TD 1 : Généralités sur les signaux

Exercice 1

1. La somme et la différences des signaux echelon décalé :

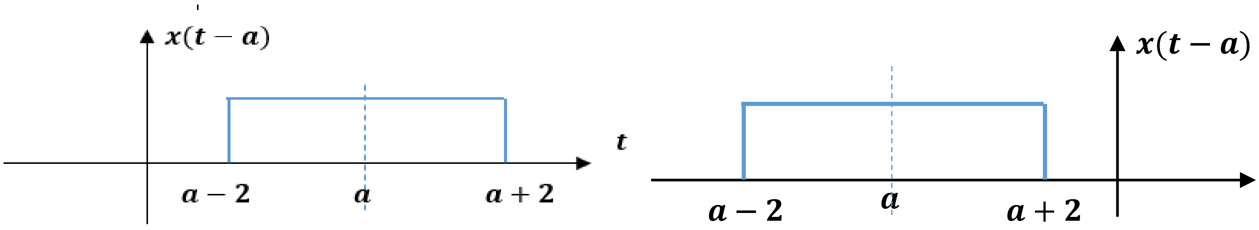


$$x(t) = e(t+2) - e(t-2) = rect(\frac{t}{4})$$

Le signal $x(t)$ est un signal rectangulaire d'amplitude **1** (ou rectangle **unitaire**), centé à l'origine et de duré **4.**

2. Cescaratéristiques : signal deterministe, continu, non périodique et de duré limité.

3. Représentation de $x(t-a)$:



Si a >0 ***Si a <0***

Exercice 3 :

La représentation mathématiquedu signal en fonction des signaux rampe et échelon unité) :

$$x(t) = r(t) - r(t-1) + e(t-1) - e(t-3) - r(t-3) + r(t-4)$$

Representation de : $x(t+1)$, $x(2t-1)$ et $x(-\frac{t}{2}+1)$

Remarque

$$x(t) \rightarrow x(\beta t + \alpha)$$

1- $si\ \alpha < 0\ on\ \ retarde\ \ le\ signal\ avec\ \ |\alpha|$

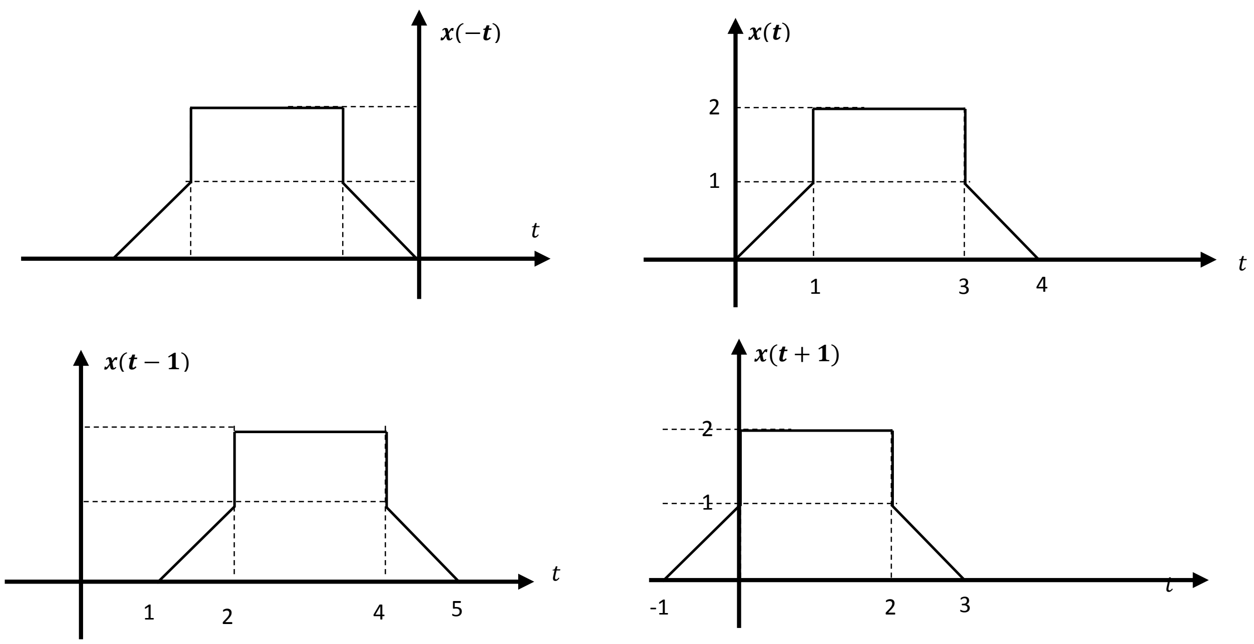
$Si\ \alpha > 0\ \ on\ avance\ le\ signal\ avec\ \ |\alpha|$

2- *Si* $|\beta|>1$ *on compresse le signal avec* $\frac{1}{|\beta|}$

Si $|\beta|<1$ *on dilate le signal avec* $\frac{1}{|\beta|}$

3- *Si* $\beta > 0$ *aucun changement*

Si $\beta < 0$ *on trace la symétri paraport l'axe des x*



Pour représenter : $x(t) \rightarrow x(\beta t + \alpha)$ quelque soit β et α, on fait un chagement de variable :

$$\boxed{t_A = \beta t_N + \alpha \ \rightarrow \ t_N = (t_A - \alpha).\frac{1}{\beta}}$$

Tel que :

t_A: ***l'ancien temps***

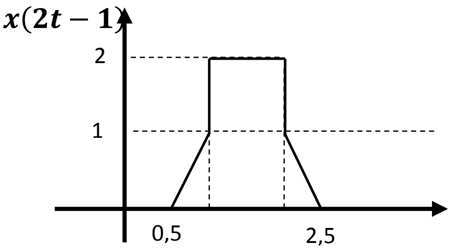
t_N: ***le nouveau temps***

On a : $t_A = [0, 1, 2, 3, 4]$ **: le temp du signal original**

a) Pour représenter : $x(2t-1)$ ***, on a :*** $\beta = 2$, et $\alpha = -1$ ***:***

t_A	t_N
0	*0,5*
1	*1*
2	*1,5*
3	*2*
4	*2,5*

$x(2t-1)$, $|\beta| = 2 > 1$, *on **compresse** le signal avec* $\frac{1}{|\beta|} = \frac{1}{2}$

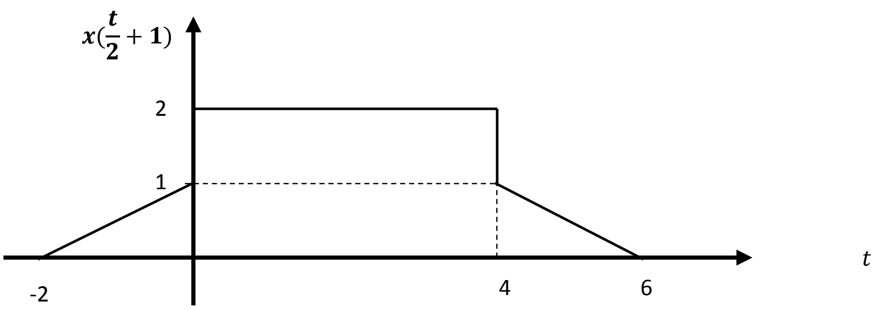


b) Pour représenter : $x(\frac{t}{2}+1)$ ***, on a :*** $\beta = \frac{1}{2}$, et $\alpha = +1$ ***et*** $t_A = \beta t_N + \alpha \rightarrow$

$t_N = (t_A - \alpha).\frac{1}{\beta}$

t_A	t_N
0	*-2*
1	*0*
2	*2*
3	*4*
4	*6*

$x\left(\frac{t}{2}+1\right)$, $|\beta| = \frac{1}{2} < 1$ ***, on dilate le signal avec :*** $\frac{1}{|\beta|} = 2$

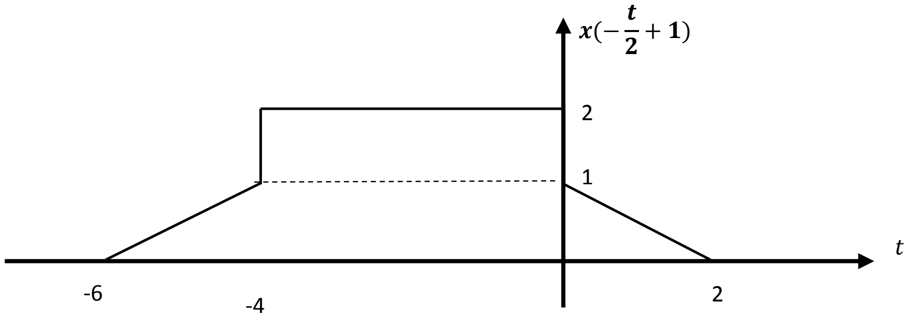


c) Pour représenter : $x(-\frac{t}{2}+1)$ ***, on a :*** $\beta = -\frac{1}{2}$, et $\alpha = +1$ **:**

$$t_A = \beta t_N + \alpha \ \rightarrow \ t_N = -(t_A - 1).2$$

t_A	t_N
0	*2*
1	*0*
2	*-2*
3	*-4*
4	*-6*

$x\left(-\frac{t}{2}+1\right)$, $|\beta| = \frac{1}{2} < 1$ ***on dilate le signal avec :*** $\frac{1}{|\beta|} = 2$



Exercie 4

Evaluer l'integrale suivant pour n= 0, 1, 2, 3, … :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (2t^3 + 5t^2 + 4t - 3)\delta^{(n)}(t)\, dt$$

Tel que $\delta^{(n)}(t)$ est la dérivée inième de $\delta(t)$

On a la propriétée de Dirac suivante :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta^{(n)}(t-t_0)dt = (-1)^n.x^{(n)}(t_0),$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta^{(n)}(t)dt = (-1)^n.x^{(n)}(0),$

On a : $x(t) = 2t^3 + 5t^2 + 4t - 3$

$x'(t) = 6t^2 + 10t + 4,$ **la prémière dérivée**

$x''(t) = 12t + 10,$ **la deuxième dérivée**

$x^{(3)}(t) = 12,$ **la troixième dérivée**

$x^{(4)}(t) = 0\ ,$ **la quatrième dérivée**

Donc :

Pour n= 0 , pas de dérivée alors $I_0 = x(0) = -3$

Pour n=1 , première dérivée alors : $\boldsymbol{I_1 = (-1)x'(O) = -4}$

Pour n=2 , deuxième dérivée alors : $\boldsymbol{I_2 = (-1)^2 x^{(2)}(O) = 10}$

Pour n=3 , trouxième dérivée alors : $\boldsymbol{I_3 = (-1)^3 x^{(3)}(O) = -12}$

Pour $n \geq 4$, $\boldsymbol{x^{(n)}(t) = 0}$, alors : $\boldsymbol{I_n = 0}$

Exercie 5

Déterminer si les signaux suivant sont périodique ou non périodique, dans le cas périodique calculer la période fondamentale du signal.

1. $\boldsymbol{x(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) = 2\sin\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T_2}t\right) = x_1(t).x_2(t)}$

On a :

$\frac{2\pi}{T_1} = \frac{\pi}{4}$ donc ; $\boldsymbol{T_1 = 8}$

$\frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{3}$ donc : $\boldsymbol{T_2 = 3}$

La période du signal global $x(t)$ est le plus multiple des deux périodes T_1 et T_2

$\mathbf{T_1 = 8 = \{8, 16, 24, \ldots\}}$

$\mathbf{T_2 = 3 = \{3, 6, 9, 12, 18, 21, 24, \ldots\}}$

Donc le signal global est un signal période de période : T=24

1. $\boldsymbol{x(t) = \cos\left(\frac{3\pi}{\sqrt{2}}t\right) + 4\sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{T_2}t + \frac{\pi}{6}\right) =}$
$\boldsymbol{x_1(t) + x_2(t)}$

On a :

$\frac{2\pi}{\mathbf{T_1}} = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}$, donc : $\boldsymbol{T_1} = \frac{\mathbf{2\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}$

$\frac{2\pi}{\mathbf{T_2}} = 3\pi$, donc $\mathbf{T_2} = \frac{2}{\mathbf{3}}$

Pour que le signal global soit périodique , il faut que :

$\boldsymbol{\frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m}}$, tel que n et m soit : $\boldsymbol{n\ et\ m\ \in \mathbb{N}\ ou\ \mathbb{Z}}$

$\boldsymbol{\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{2}}$***, donc :*** $\boldsymbol{T = T_2.\sqrt{2} = T_1}$, $\boldsymbol{T_1 \notin \mathbb{N}\ et\ T_1 \notin \mathbb{Z}}$***, donc la signal global n'est pas périodique.***

Exercice 6

On le signal suivant : $\boldsymbol{x(t) = A.rect(t/T)}$

1. Calculer l'énergie $\boldsymbol{E_x}$ et la puissance $\boldsymbol{P_x}$:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (A.rect(t/T))^2 dt = \int_{-T/2}^{+T/2} (A)^2 dt$$

$$E_x = A^2 T \quad \rightarrow \quad P_x = 0$$

L'energie est constante et finie donc la puissance est nulle :

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} (x(t))^2 dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{E_x}{T} = \lim_{T\to+\infty} \frac{cst}{T} \to 0$$

$$\textbf{le signal rectangle est un signal à énergie finie}$$

1- Si E_x est l'énergie d'un signal $x(t)$, calculer celle du signal $7x(9t)$, de meme pour la puissance **:**

On pose : $y(t) = 7x(9t)$

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} (y(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (7x(9t))^2 dt = 49\int_{-\infty}^{+\infty} (x(9t))^2 dt$$

On fait un changement de variable : $u = 9t\ , du = 9dt$ **donc :** $dt = \frac{1}{9}du$

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} (y(t))^2 dt = \frac{49}{9}\int_{-\infty}^{+\infty} (x(u))^2 du = \frac{49}{9}E_x$$

$$E_y = \frac{49}{9}E_x$$

Et tant que l'energie est constante finie donc la puissance est nulle.

2- Conclure une relation générale de l'energie et la puissance pour un signal $A.x(B.t)$

D'après la relation trouver, on peut conclure que si :

$y(t) = A.x(B.t)$ **, alors :** $E_y = \frac{A^2}{B}E_x$ **et** $P_y = A^2 P_x$