

Chapitre 3 : Ondes de Choc

I. Ondes de choc normales (droites)

Une onde de choc est une variation très rapide et irréversible des caractéristiques de l'écoulement (masse volumique, pression, température, vitesse) sur une distance extrêmement courte (environ $0.2 \mu\text{m}$) de telle sorte que l'onde de choc apparait comme une discontinuité séparant des écoulements continus en amont et en aval.

Rq.: Les ondes de choc se produisent dans les écoulements supersoniques (internes ou externes). Les ondes de choc normales sont perpendiculaires à l'écoulement.

I.1. Équations de base

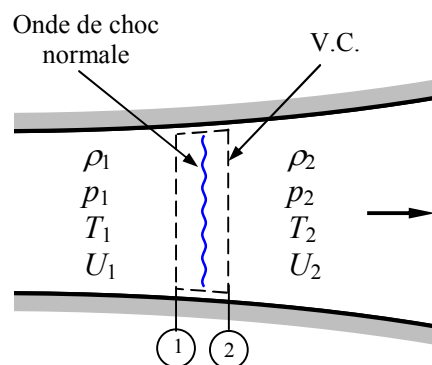
On considère l'écoulement unidimensionnel représenté dans la figure ci-dessous. En supposant que l'onde de choc est stationnaire (immobile) et que le volume de contrôle incluant cette onde de choc est infinitésimal de sorte que $A_1 \approx A_2 \approx A$, $F_{\text{paroi}/x} \approx 0$ et $\dot{Q} \approx 0$, cela conduit au système d'équations suivant:

$$\rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 = \frac{\dot{m}}{A} \quad (\text{continuité}) \quad (1)$$

$$p_1 + \rho_1 U_1^2 = p_2 + \rho_2 U_2^2 \quad (\text{quantité de mouvement}) \quad (2)$$

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2} = h_2 + \frac{U_2^2}{2} = h_0 \quad (\text{énergie}) \quad (3)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) > 0 \quad (2^{\text{nd}} \text{ principe de la thermodynamique}) \quad (4)$$



Après élimination de vitesses U_1 et U_2 des équations (1)-(3) on obtient la relation de Rankine-Hugoniot:

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) \quad (5)$$

Pour un gaz parfait de chaleurs spécifiques constantes, $h = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$, l'équation (5) peut se réécrire après réarrangement comme suit:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{p_2}{\rho_1} - 1}{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) - \frac{p_2}{\rho_1}} \quad (6)$$

ou

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{p_2}{\rho_1} + 1}{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) + \frac{p_2}{\rho_1}} \quad (7)$$

De l'équation de continuité (1), nous avons:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) + \frac{p_2}{\rho_1}}{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{p_2}{\rho_1} + 1} \quad (8)$$

Et de l'équation d'état d'un gaz parfait $T = \frac{p}{R\rho}$, nous avons:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) + \frac{p_2}{\rho_1}}{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) + \frac{p_1}{\rho_2}} \quad (9)$$

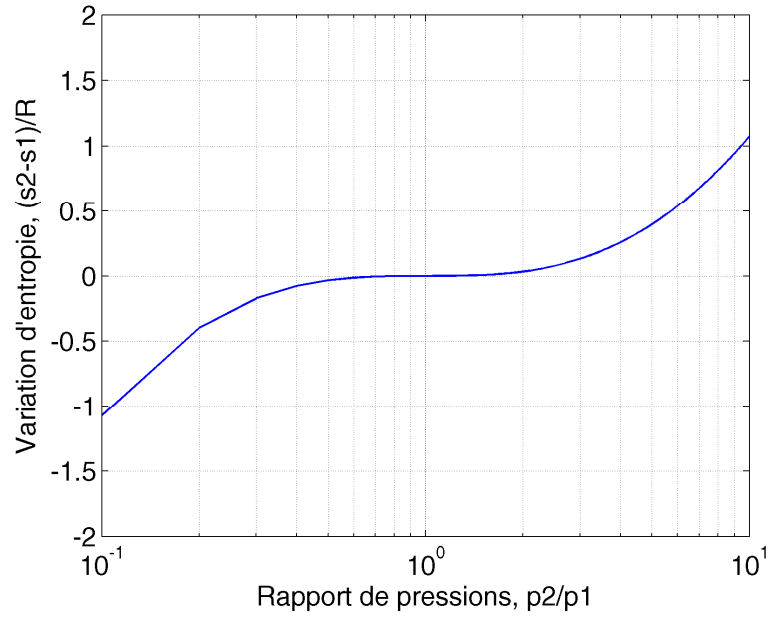
Rq.: les relations (7)-(9) sont appelées souvent relations d'onde de choc normal de Rankine-Hugoniot.

Le 2nd principe de la thermodynamique (4) exige que:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{p_2}{\rho_1} + 1}{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) + \frac{p_2}{\rho_1}} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right) > 0 \quad (10)$$

Le 2nd principe de la thermodynamique est satisfait (pour $\gamma > 1$) seulement si $\frac{p_2}{p_1} > 1$

comme le montre la figure ci-dessous, ce qui signifie qu'une onde de choc doit toujours être compressive (i.e. la pression doit augmenter). Donc à partir des équation (7)-(9), la masse volumique augmente, la vitesse diminue et la température augmente à travers une onde de choc.



I.2. Relations de l'onde de choc normale en fonction du nombre de Mach

Pour un gaz parfait, les rapports précédents peuvent être exprimés également en fonction de γ et du nombre de Mach en amont Ma_1 . A partir de l'équation de Qt. de Mvt. (2), on a:

$$p_1 + \frac{p_1}{RT_1} U_1^2 = p_2 + \frac{p_2}{RT_2} U_2^2 \quad \text{ou} \quad p_1 \left(1 + \gamma \frac{U_1^2}{\gamma RT_1} \right) = p_2 \left(1 + \gamma \frac{U_2^2}{\gamma RT_2} \right)$$

et par conséquent:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma Ma_1^2}{1 + \gamma Ma_2^2} \quad (11)$$

De même l'équation d'énergie (3) s'écrit:

$$c_p T_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{U_1^2}{\gamma RT_1} \right) = c_p T_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{U_2^2}{\gamma RT_2} \right)$$

ce qui conduit à:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_2^2} \quad (12)$$

La loi des gaz parfaits donne:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{1 + \gamma Ma_1^2}{1 + \gamma Ma_2^2} \right) \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2} \right) \quad (13)$$

A partir de l'équation de continuité (1), on a:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{\text{Ma}_1}{\text{Ma}_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \frac{\text{Ma}_1}{\text{Ma}_2} \sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}_2^2} \quad (14)$$

En égalisant les équations (13) et (14) et résolvant pour Ma_2 en fonction de Ma_1 , on obtient les deux solutions suivantes:

$$\text{Ma}_2 = \text{Ma}_1 \quad (\text{pas de choc à travers le volume de contrôle})$$

$$\text{Ma}_2^2 = \frac{(\gamma-1)\text{Ma}_1^2 + 2}{2\gamma\text{Ma}_1^2 - (\gamma-1)} \quad (15)$$

Etant donné que l'écoulement en amont est supersonique ($\text{Ma}_1 > 1$), la relation (15) montre que, pour $\gamma > 1$, l'écoulement en aval doit être subsonique ($\text{Ma}_2 < 1$).

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)\text{Ma}_1^2 - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \quad (16)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2 + (\gamma-1)\text{Ma}_1^2)(2\gamma\text{Ma}_1^2 - (\gamma-1))}{(\gamma+1)^2 \text{Ma}_1^2} \quad (17)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)\text{Ma}_1^2}{2 + (\gamma-1)\text{Ma}_1^2} \quad (18)$$

Des équations (1) et (2), on tire:

$$U_1 - U_2 = \frac{a_2^2}{\gamma U_2} - \frac{a_1^2}{\gamma U_1} \quad (19)$$

Et à partir de l'équation (3), la vitesse locale du son peut s'exprimer par:

$$a^2 = \frac{\gamma+1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma-1}{2} U^2 \quad (20)$$

En combinant les équations (19) et (20), on obtient la relation de Prandtl reliant les vitesses en amont et en aval du choc:

$$U_1 U_2 = a^{*2} \quad (21)$$

I.3. Cas limites : ondes de choc faibles, ondes de choc fortes

Si Ma_1 tend vers l'unité (< 1.1 environ), on dit que l'onde de choc est faible; dans ce cas l'écoulement peut être considéré comme isentropique et les relations dérivées dans le chapitre précédent peuvent être utilisées.

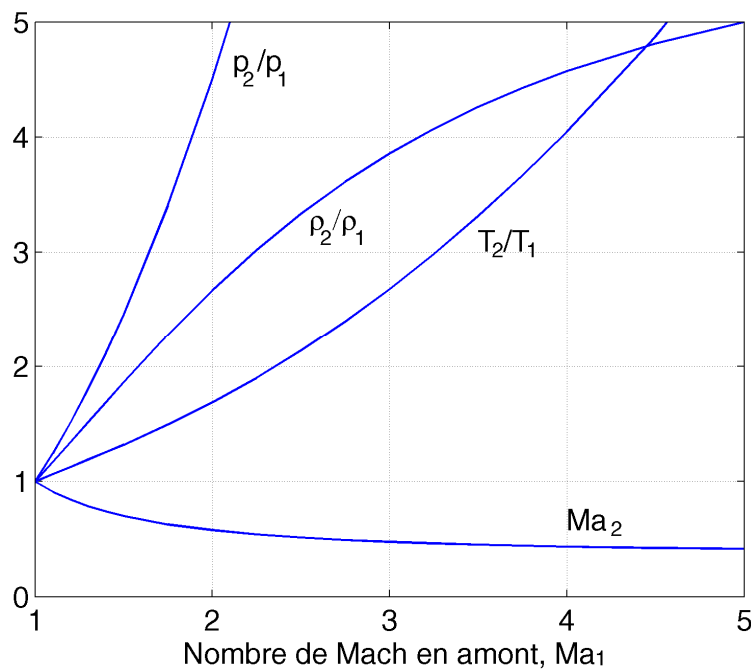
Si Ma_1 est très grand ($\gg 1$), on dit que l'onde de choc est forte et les relations (16)-(18) et (15) s'écrivent dans ce cas:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right) \text{Ma}_1^2 \quad (22)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \text{Ma}_1^2 \quad (23)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) \quad (24)$$

$$\text{Ma}_2^2 = \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right) \quad (25)$$



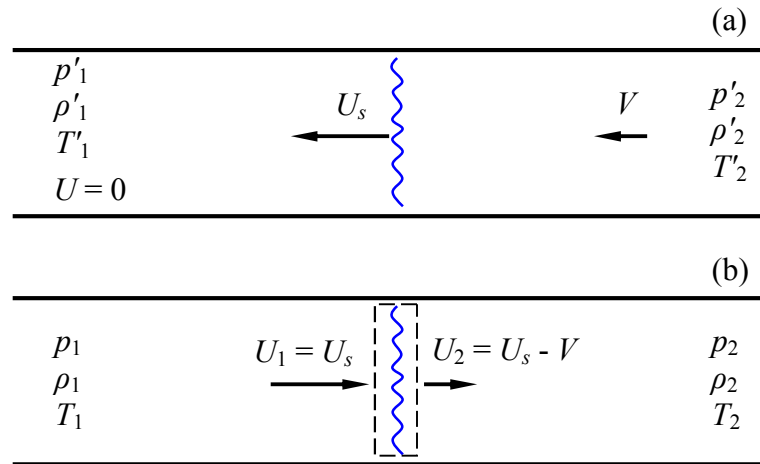
Rq.: lorsque $\text{Ma}_1 = 1$, l'équation (15) donne $\text{Ma}_2 = 1$, et les équations (11)-(13) montrent que $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1$ ce qui correspond à une onde de choc acoustique (sonore) à travers laquelle, par définition, les changements des propriétés du fluide sont infinitésimaux.

I.4. Onde de choc normale mobile

On considère le cas d'une onde de choc mobile avec une vitesse uniforme U_s dans un milieu initialement au repos (Fig. (a)). Si l'on se place maintenant dans un référentiel mobile avec l'onde de choc, de sorte que cette dernière semble être stationnaire (Fig. (b)). Dans ce cas, les relations obtenues précédemment pour une onde de choc normale fixe sont applicables en notant que:

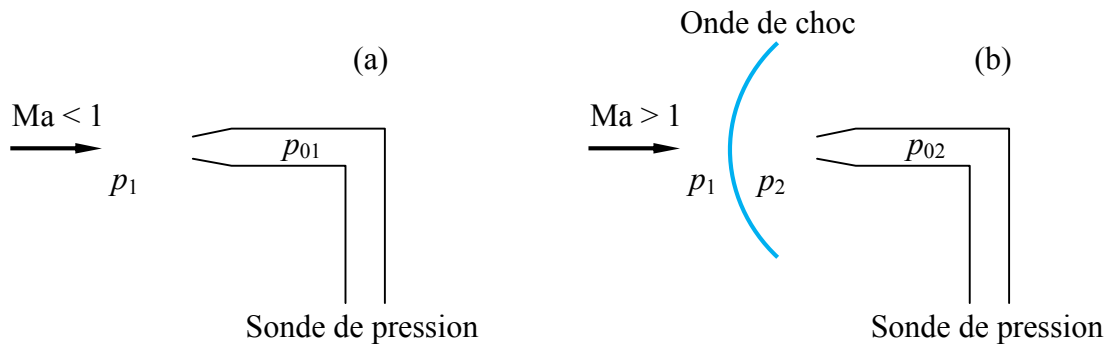
$$\text{Ma}_1 = \frac{U_s}{a_1} = \text{Ma}_s \quad (\text{Ma}_s \text{ nombre de Mach du choc}) \quad (26)$$

$$\text{Ma}_2 = \frac{U_s - V}{a_2} = \frac{U_s}{a_1} \frac{a_1}{a_2} - \frac{V}{a_2} = \text{Ma}_s \left(\frac{a_1}{a_2} \right) - \text{Ma}'_2 \quad (27)$$



I.5. Tube de Pitot en supersonique

Lorsqu'on effectue des mesures de pression en écoulement supersonique avec un tube de Pitot, une onde de choc droite se forme en amont de la sonde (Fig. (b)).



Le tube de Pitot mesure dans ce cas la pression d'arrêt isentropique après le choc, désignée par p_{02} . Le rapport de la pression d'arrêt isentropique p_{02} et la pression statique p_1 peut être déterminé comme suit:

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \quad (28)$$

le rapport $\frac{p_{02}}{p_2}$ est donné par la relation isentropique:

$$\frac{p_{02}}{p_2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}_2^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

et le rapport $\frac{p_2}{p_1}$ est déterminé en fonction de Ma_1 par la relation (16). En remplaçant ensuite Ma_2 dans la relation précédente par son expression (15), on obtient éventuellement:

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \text{Ma}_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} \text{Ma}_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \quad (29)$$

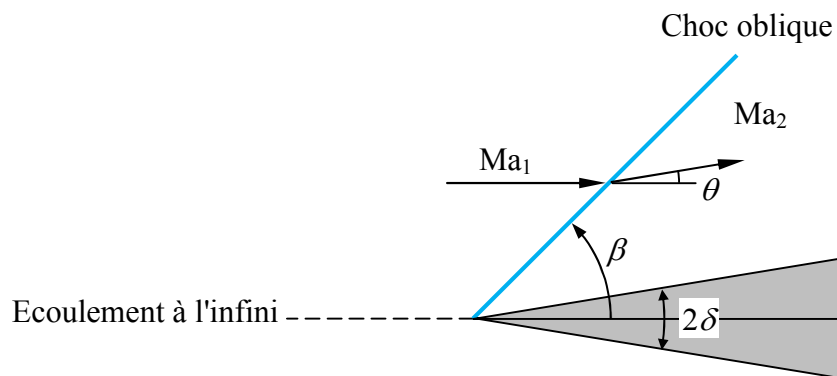
Un autre rapport utile est celui des pressions d'arrêt isentropiques en aval et en amont du choc, tel que:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}} = \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2} \text{Ma}_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} \text{Ma}_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \quad (30)$$

II. Ondes de Choc Obliques (Inclinées)

II.1. Notion sur les ondes de choc obliques

Une onde de choc oblique est une onde de compression inclinée avec un angle β appelé angle de choc (ou angle d'onde) par rapport à la direction de l'écoulement à l'infini (en provenance). Elle produit un changement de direction de l'écoulement en aval d'un angle θ appelé angle de déflexion (Fig.1).

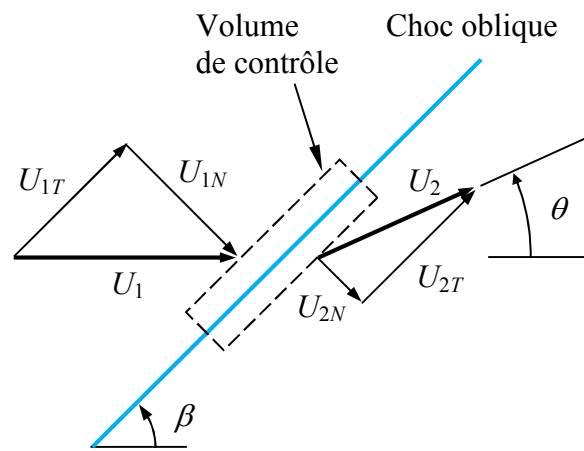


Si on considère un écoulement supersonique (idéal) dépassant symétriquement un coin de demi-angle δ , l'écoulement au-dessus (et au-dessous) du coin doit tourner avec le même angle δ afin d'être parallèle à la surface du coin; et une onde de choc oblique attachée se produit.

Rq.: l'écoulement amont est toujours supersonique, mais le nombre de Mach en aval Ma_2 peut être subsonique, sonique ou supersonique, selon les conditions (Ma_1 et β).

II.2. Equations de base

L'analyse de l'écoulement à travers une onde de choc oblique est effectuée en décomposant les vecteurs vitesse en amont et en aval du choc en composantes normales et tangentielles par rapport à l'onde (Fig.2).



Maintenant, le changement à travers l'onde de choc peut être déterminé de la même manière que pour l'onde de choc normale, dont les équations de conservation peuvent s'écrire:

$$\rho_1 U_{1N} = \rho_2 U_{2N} = \frac{\rho_m}{A} \quad (\text{continuité}) \quad (31)$$

$$p_1 + \rho_1 U_{1N}^2 = p_2 + \rho_2 U_{2N}^2 \quad (\text{Qt. de Mvt. suivant la direction normale}) \quad (32)$$

$$\rho_1 U_{1N} U_{1T} = \rho_2 U_{2N} U_{2T} \quad (\text{Qt. de Mvt. suivant la direction parallèle}) \quad (33)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{U_{1N}^2 + U_{1T}^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{U_{2N}^2 + U_{2T}^2}{2} \quad (\text{énergie}) \quad (34)$$

Des équations (31) et (33) on constate qu'il n'y a pas de gradient de vitesse tangentielle à travers le choc oblique $U_{1T} = U_{2T}$, et donc l'équation (34) s'écrit:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{U_{1N}^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{U_{2N}^2}{2} \quad (35)$$

Les équations (31), (32) et (35) sont analogues à celles correspondant à l'onde de choc normale. Donc, les équations (15) - (18) de cette dernière sont applicables dans le cas d'une onde de choc oblique en remplaçant Ma_1 et Ma_2 par Ma_{1N} et Ma_{2N}

respectivement, dont:

$$Ma_{1N} = \frac{U_{1N}}{a_1} = \frac{U_1 \sin \beta}{a_1} = Ma_1 \sin \beta$$

$$Ma_{2N} = \frac{U_{2N}}{a_2} = \frac{U_2 \sin(\beta - \theta)}{a_2} = Ma_2 \sin(\beta - \theta)$$

On obtient alors:

$$Ma_2^2 \sin^2(\beta - \theta) = \frac{(\gamma - 1)Ma_1^2 \sin^2 \beta + 2}{2\gamma Ma_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)} \quad (36)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)Ma_1^2 \sin^2 \beta - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \quad (37)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2 + (\gamma - 1)Ma_1^2 \sin^2 \beta)(2\gamma Ma_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1))}{(\gamma + 1)^2 Ma_1^2 \sin^2 \beta} \quad (38)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)Ma_1^2 \sin^2 \beta}{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2 \sin^2 \beta} \quad (39)$$

L'angle de déflexion θ de l'écoulement passant à travers une onde de choc oblique, peut être déterminé en utilisant les relations suivantes:

$$\tan \beta = \frac{U_{1N}}{U_T} \quad (\text{Fig.2}) \quad (40)$$

$$\tan(\beta - \theta) = \frac{U_{2N}}{U_T} \quad (\text{Fig.2}) \quad (41)$$

De (40), (41) et l'équation de continuité (31), on aura:

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{U_{2N}}{U_{1N}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (42)$$

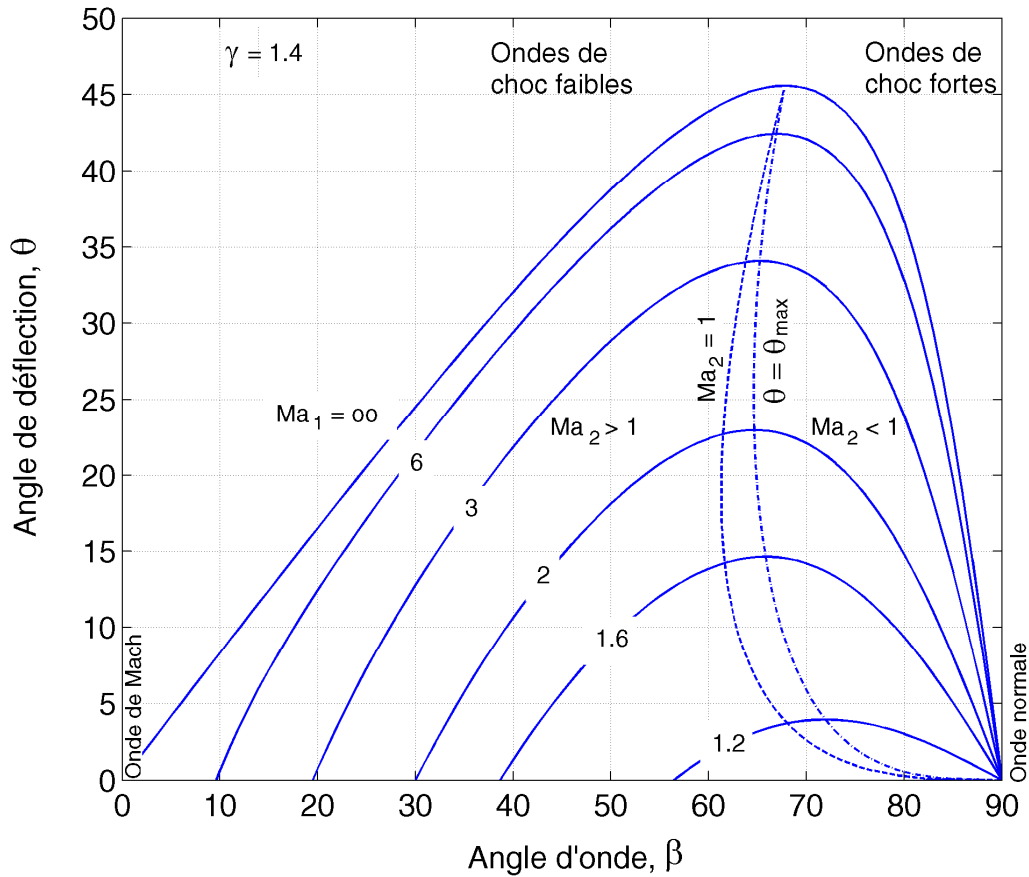
En utilisant les identités trigonométriques, on obtient:

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{1 - \tan \theta / \tan \beta}{1 + \tan \beta \tan \theta} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (43)$$

De (39) et (43), l'angle de déflexion s'exprime par:

$$\tan \theta = \frac{2 \cot \beta (Ma_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{Ma_1^2 (\gamma + \cos(2\beta)) + 2} \quad (44)$$

A partir de l'équation (44), on constate que $\theta = 0$ lorsque $\beta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{Ma_1}\right)$ (onde de Mach), ou $\beta = \frac{\pi}{2}$ (onde de choc normale).



Rq.: Il est intéressant de concevoir l'objet (par exemple un avion) de telle sorte qu'une onde de choc oblique soit préférable par rapport à une onde de choc normale; car les pertes dans le cas oblique sont moindres par rapport à celles du cas normal.

Pour un nombre de Mach Ma_1 donné, l'angle de déflexion maximal θ_{max} peut être déterminé en posant $d\theta/d\beta = 0$; ce qui conduit à:

$$\sin^2 \beta_{max} = \frac{\gamma+1}{4\gamma} - \frac{1}{\gamma Ma_1^2} \left[1 - \sqrt{(\gamma+1) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2 + \frac{\gamma+1}{16} Ma_1^4 \right)} \right] \quad (45)$$

où β_{max} est l'angle de choc associé à l'angle de déflexion maximal qui peut être déterminé par la suite en remplaçant par la valeur de β_{max} dans la relation (44).

Quand un écoulement supersonique s'approche d'un coin de demi-angle supérieur à l'angle de déflexion maximal possible $\delta > \theta_{\max}$ (objet arrondi, corps non profilé...etc.), une onde de choc courbée détachée se produit devant le coin, tournant l'écoulement de manière discontinue avec des angles inférieurs à θ_{\max} (Fig.4). L'écoulement en chaque point du choc courbé satisfait les relations de choc oblique (36)-(39), (44) pour cette valeur particulière de β et pour le nombre de Mach Ma_1 donné.

