Distribution Cumulée (le cas discret)

Définition (les effectifs cumulés croissants (Fréquences)

- L'effectif cumulé croissant noté $N_i^{\nearrow}$ est la somme des effectifs correspondants aux valeurs du caractère inférieur ou égale à x_i

d'où $N_i^{\nearrow} = \sum_{p=1}^{i} n_p$

$F_i^{\nearrow}$: La fréquence cumulée croissante Tq :

$$F_i^{\nearrow} = \sum_{p=1}^{i} f_p$$

Définition : (les effectifs cumulées décroissants)

- L'effectif cumulé décroissant $N_i^{\searrow}$ est la somme des effectifs correspondants aux valeurs du caractère supérieures ou égale à x_i

d'où $N_i^{\searrow} = \sum_{p=i}^{k} n_p \quad 1 \leq i \leq k$

$F_i^{\searrow}$: la fréquence cumulée décroissante Tq :

$$F_i^{\searrow} = \sum_{p=i}^{k} f_p .$$

Exemple

x_i	n_i	f_i	$N_i^{\nearrow}$	$F_i^{\nearrow}$	$N_i^{\searrow}$	$F_i^{\searrow}$
0	16	0,25	16	0,25	64 = n	1
1	18	0,291	34	0,541	48	0,75
2	14	0,218	48	0,759	30	0,459
3	11	0,172	59	0,931	16	0,241
4	3	0,047	62	0,978	5	0,069
5	2	0,031	64 = n	1	2	0,022
Σ	64					

$N_i^{\nearrow} = \sum_{p=1}^{i} n_p$

$N_1 = n_1 = 16$

$N_2 = \sum_{p=1}^{2} (n_1 + n_2) = 16 + 18 = 34$

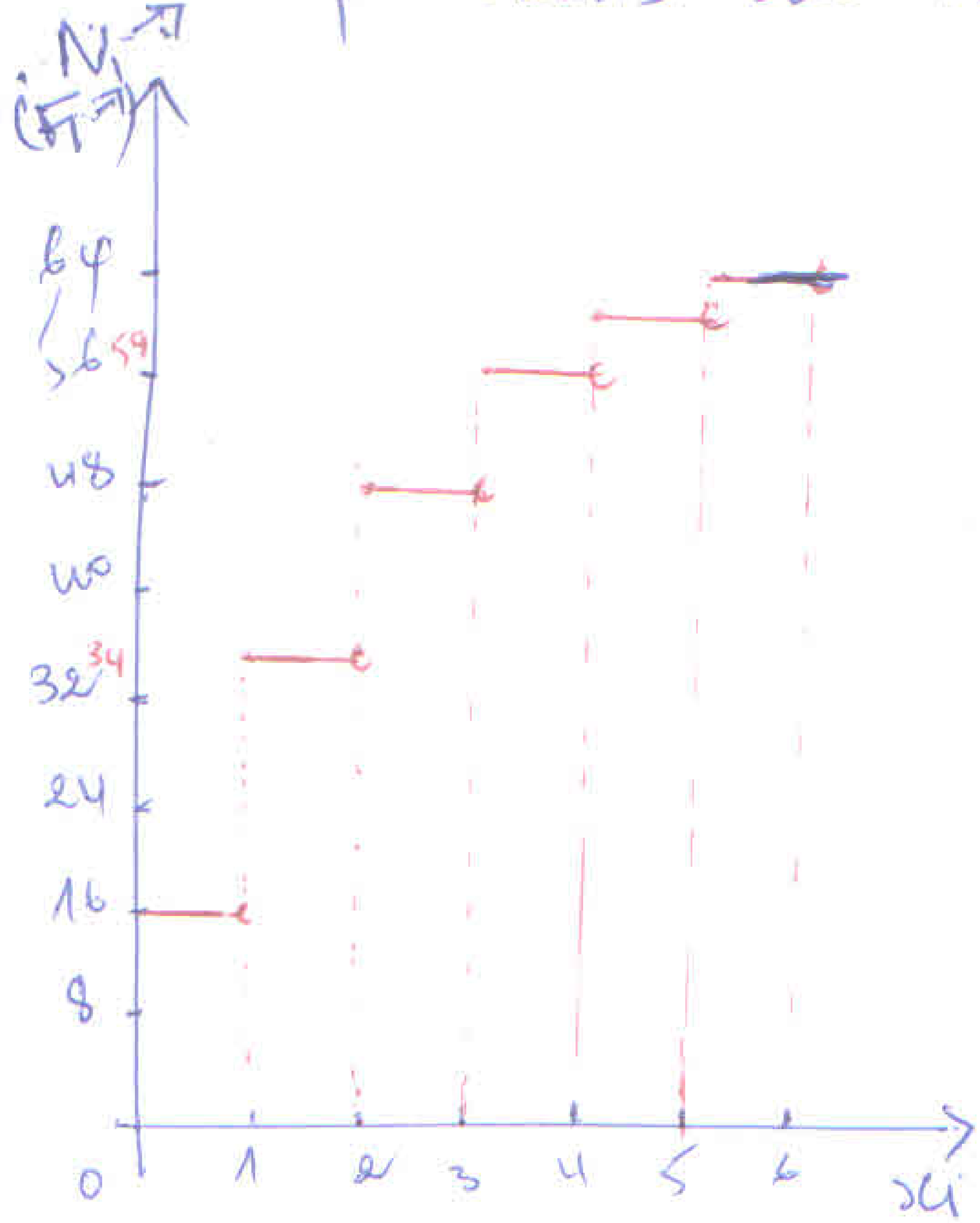
$N_i^{\searrow} = \sum_{p=i}^{k=6} n_p$

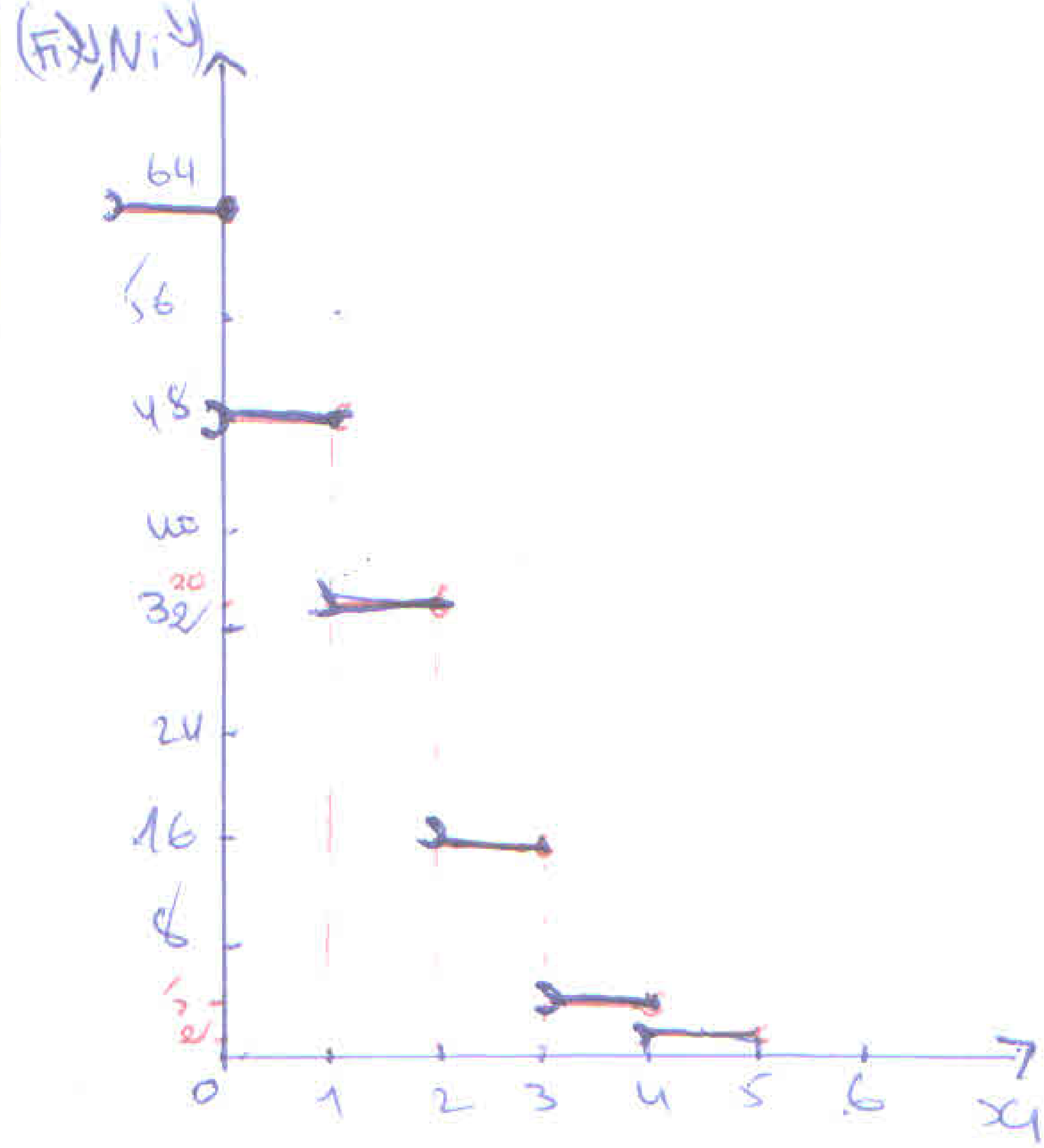
$N_1^{\searrow} = \sum_{p=1}^{6} (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6) = 64$

$N_2^{\searrow} = \sum_{2}^{6} (n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6) = 48$

La même chose pour $F_i^{\searrow}$

- Représentation graphique des $(N_i^{\nearrow}, N_i^{\searrow}, F_i^{\nearrow}, F_i^{\searrow})$ c'est un graphe en escalier dont les marches correspondants au valeurs possibles du caractère x_i



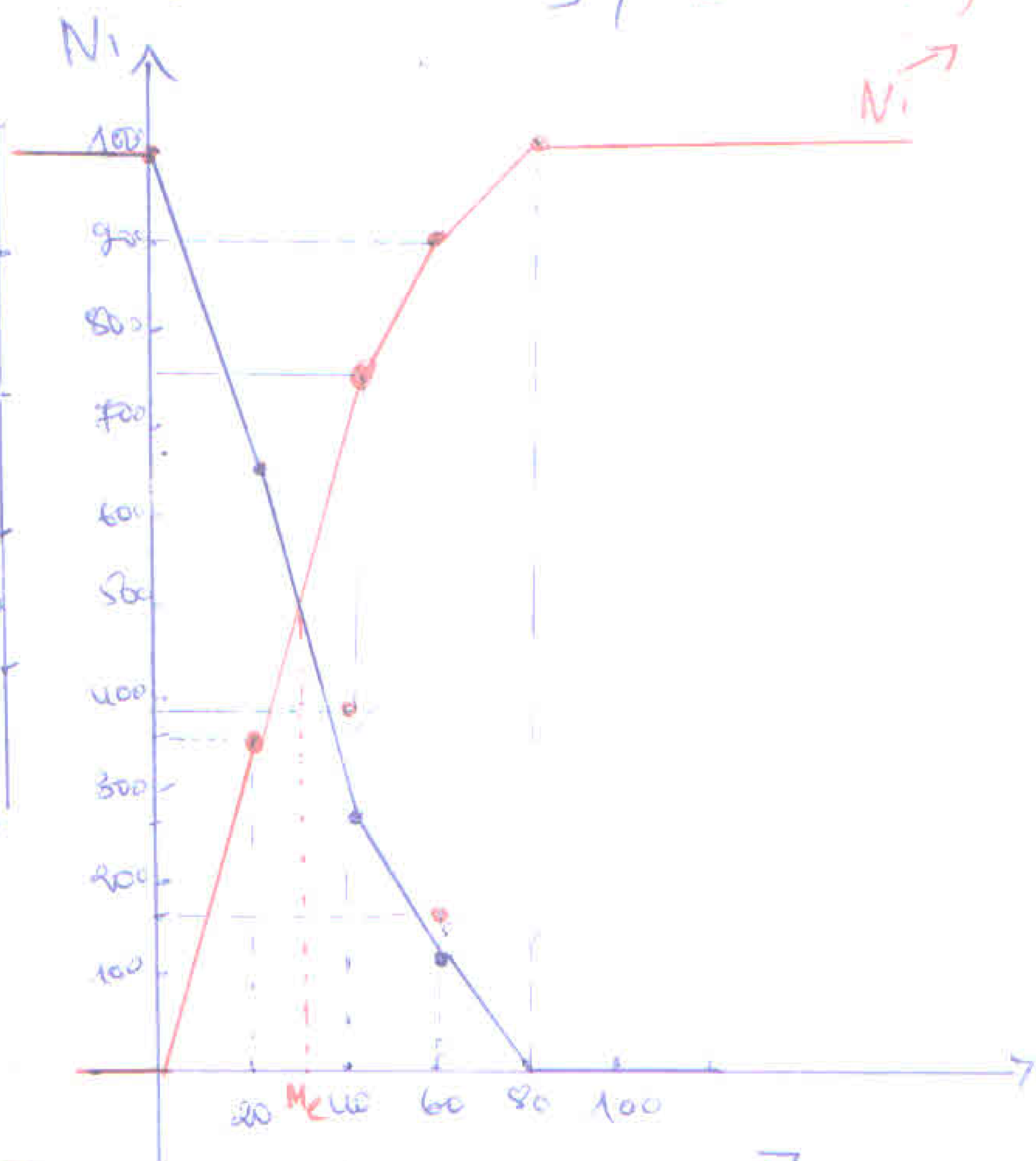


Remarque : Dans le cas continu, on définit d'une manière analogue les effectifs ou fréquences cumulés croissant en prenant à la places de x_i la borne supérieur de classe $[e_i, e_{i+1}[$

· Pour les effectifs ou fréquences cumulés décroissants en prenant à la place de x_i la borne inferieur de la ~~to~~ classe $[e_i, e_{i+1}[$.

Exemple : Représentation graphique ~~des~~ effectifs cumulés croissants et décroissants (cas continu)

classe	n_i	$N_i \nearrow$	$N_i \searrow$	f_i
$[0, 20[$	360	360	1000	0,36
$[20, 40[$	380	740	640	0,38
$[40, 60[$	160	900	260	0,16
$[60, 80[$	100	1000	100	0,1



courbe cumulées des effectifs croissants et décroissants

$[0, \underline{20}[$ $N_i \nearrow$

$[\underline{0}, 20[$ $N_i \searrow$

Paramètres caractéristiques : pour l'étude d'un caractère quantitatif on s'intéresse à deux types de paramètres :

a) Les caractéristiques de tendance centrale ou de position : sont des valeurs qu'on retrouve au centre des observations.

b) Les caractéristiques de dispersion : indiquent la disposition des observations autour de la moyenne.

a) Les caractéristique de Position :

1) Le mode :

1.1 cas discret : c'est la valeur du caractère quantitatif discret qui a l'effectif « ou fréquence » le plus élevé et on le note par M_o.

Exemple :

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	16	18	14	11	3	2

. Le mode : $M_o = 1$, $n_{i\,max} = 18$.

1.2 Cas continu : dans ce cas, on estime M_o par la classe modale « ayant l'effectif le plus élevé.

Exemple :

classe	[0,20[	[20,40[	[40,60[	[60,80[
n_i	360	380	160	100

La classe modale est [20,40[car $n_{i_{max}} = 380$

- On peut appeler M_o (mode) le centre de classe modale i.e $M_o = \frac{20+40}{2} = 30$.
- Pour un calcul approché, on utilise la formule suivante : Soit la classe modale $[e_{i-1} - e_i[$

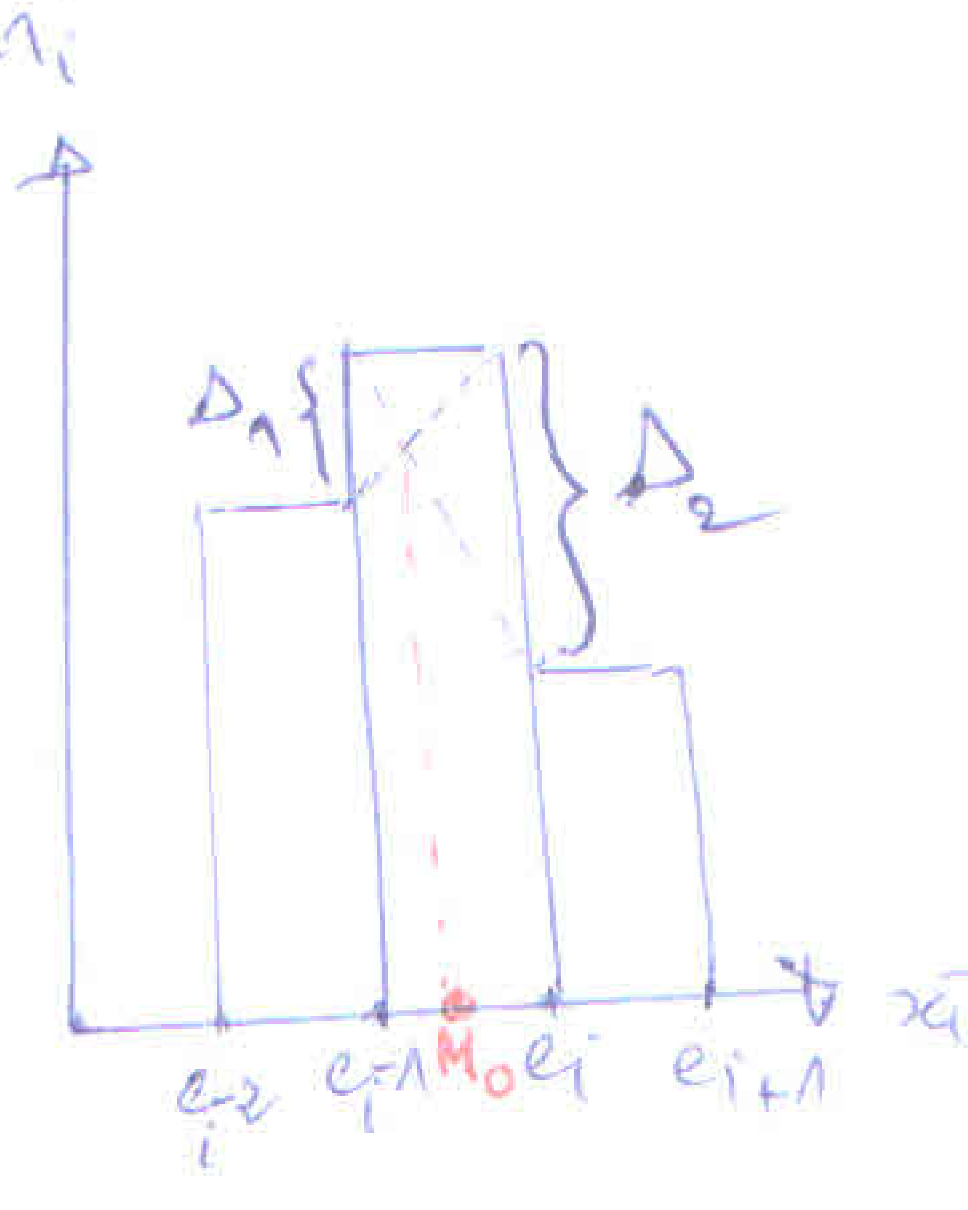
On a $M_o \in [e_{i-1}, e_i[$.

$$\boxed{M_o = e_{i-1} + a_i \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}}$$ avec :

a_i : l'amplitude de la classe $[e_{i-1} - e_i[$

Δ_1 : l'excès de la classe modale par rapport à la classe précédente

Δ_2 : " " " " " suivante.



Remarques : on peut avoir un seul mode ou plusieurs modes alors la série est multimode.

exemple : $M_o = 20 + 20 . \frac{380 - 360}{20 + 220}$

$M_o = 21,66$

2) La Médiane :

2.1 Cas discret : Considérons la série quantitative discrète dont les valeurs sont ordonnés dans le sens croissant $x_1, x_2, \dots x_n$.

La Médiane notée M_e est la valeur qui divise la série originale en deux séries partielles égales.

On distingue deux cas :

a) si n impair $\quad M_e = x\left(\frac{n+1}{2}\right)$

b) si n pair $\quad M_e = \dfrac{x\left(\frac{n}{2}\right) + x\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}$

Exemple : soit la série suivante :

$2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9 \qquad n = 13$

n est impair $\Rightarrow M_e = x\left(\frac{n+1}{2}\right) = x_7 = 5$

$\boxed{M_e = 5}$

. Soit la série suivante :

$2, 2, 3, 3, 3, 4, \underset{x_7}{5}, \underset{x_8}{6}, 6, 7, 8, 8, 9, 9 \qquad n = 14$

n est pair $\Rightarrow M_e = \dfrac{x\left(\frac{n}{2}\right) + x\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2} = \dfrac{x_7 + x_8}{2} = 5{,}5$

Exemple :

$\underbrace{0, 0 \dots 0}_{16}, \underbrace{1, 1 \dots 1}_{18}, \underbrace{2, 2, \dots 2}_{14}, \underbrace{3, 3 \dots 3}_{11}, \underbrace{4, 4 \dots 4}_{13}, \underbrace{5, 5 \dots 5}_{2} \qquad \boxed{n = 64}$

$n = 64$ pair $\Rightarrow M_e = \dfrac{x\left(\frac{n}{2}\right) + x\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2} = \dfrac{x_{32} + x_{33}}{2}$

$= \dfrac{1+1}{2} = 1$

$\boxed{M_e = 1}$

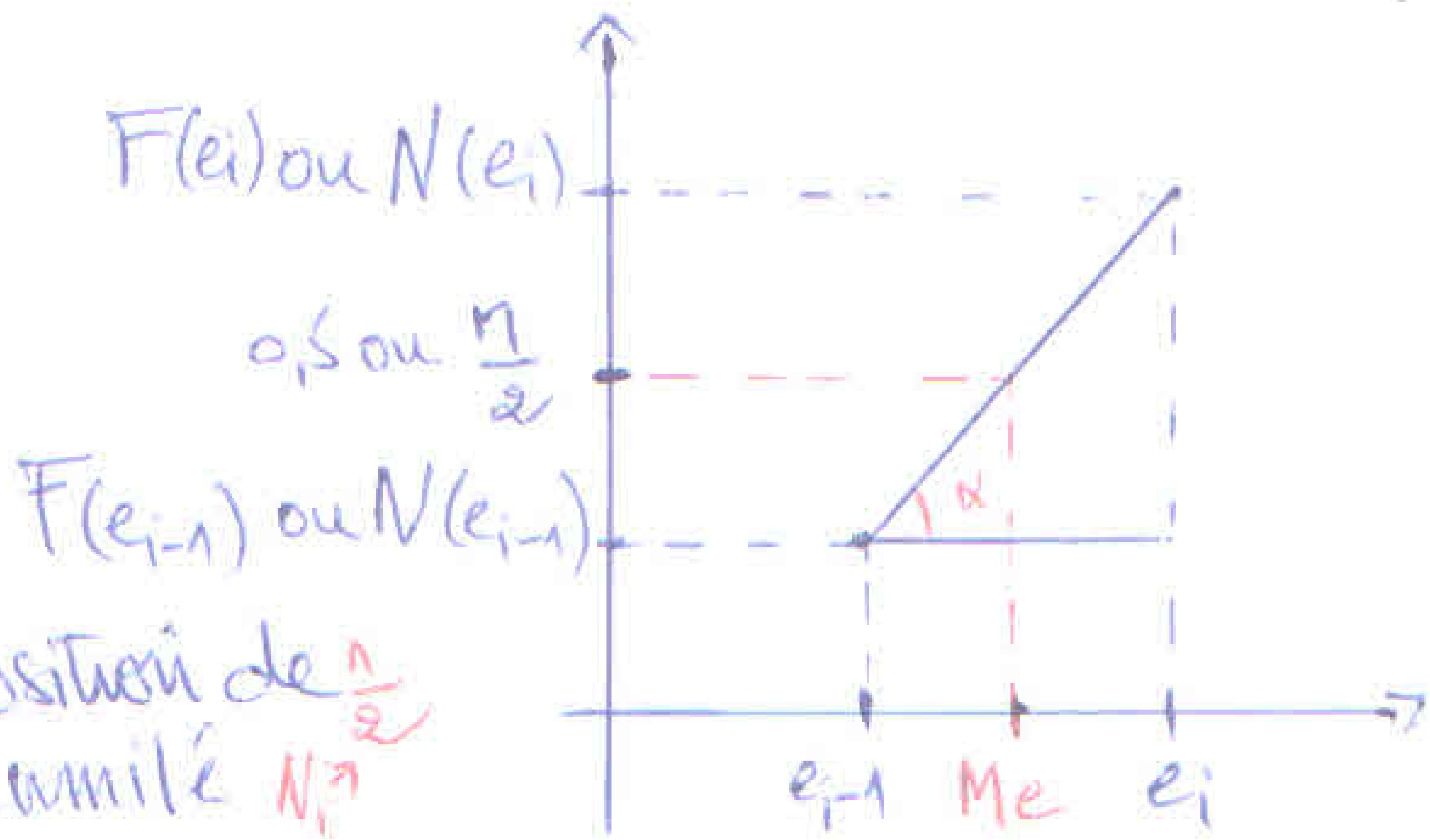
Remarque :

Peut être $M_e \notin$ aux valeurs de la série (n'appartient pas)

- On peut utiliser une autre méthode pour déterminer M_e, On calcul les $N_i \nearrow$ ou $F_i \nearrow$ et on cherche les deux valeurs qui encadrent $\frac{n}{2}$ ou 0,5, x_i qui correspond à la plus grande valeur d'entre eux nous donne Me.

2.2 Cas Continu:

- Géométriquement, la médiane est la projection du point de l'interssection de deux courbes Cumulatives croissante et décroissante des effectifs (ou fréquences) sur l'axe (ox).
- Pour déterminer la Médiane M_e, on utilise la Méthode d'interpolation linéaire :



- On determine la classe qui contient M_e, on cherche la position de $\frac{n}{2}$ par rapport aux effectifs cumilé $N_i \nearrow$ et la plus grand valeur.

$$tg\alpha = \frac{\frac{n}{2} - N(e_{i-1})}{M_e - e_{i-1}} = \frac{N(e_i) - N(e_{i-1})}{e_i - e_{i-1}}$$

$$M_e = e_{i-1} + \frac{e_i - e_{i+1}}{N(e_i) - N(e_{i+1})}\left(\frac{n}{2} - N(e_{i-1})\right)$$

$$\boxed{M_e = e_{i-1} + a_i \frac{\frac{n}{2} - N(e_{i-1})}{n_i}}$$

a_i: amplitude
n_i: effectif de la classe médiane

Exemple :

classe	n_i	$N_i\nearrow$	f_i	$F_i\nearrow$
[0,20[	360	360	0,36	
[20,40[	380	740	0,38	
[40,60[	160	900	0,16	
[60,80[	100	1000	0,1	

$n = 1000$

$\frac{n}{2} = 500$

$360 < 500 < 740$

$740 \rightarrow M_e \in [20,40[$

$e_{i-1} = 20$

$e_i = 40$

$N(e_i) = 740$

$N(e_{i-1}) = 360$

D'après la formule

$$M_e = e_{i-1} + a_i \frac{\frac{n}{2} - N(e_{i-1})}{N(e_i) - N(e_{i-1})}$$

$$= 20 + 20 \frac{(500 - 360)}{740 - 360} \simeq 27,37$$

$$M_e = 27,37 \in [20,40[$$

$$M_e = e_{i-1} + a_i \frac{0,5 - F(e_{i-1})}{F(e_i) - F(e_{i-1})}$$

3. La Moyenne :

3.1 La Moyenne arithmétique simple :

$$\text{Moyenne arithmétique simple} = \frac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$$

Exemple : si les notes d'un étudiant sont de : 10, 15, 8, alors la moyenne arithmétique simple est de : $\frac{10+15+8}{3} = 11$.

3.2 La Moyenne arithmétique pondérée :

Si les notes au Baccalauréat d'un élève sont de 11/20 en français (coefficient 5), de 13/20 en histoire (coefficient 3) et de 10/20 en Maths (coefficient 7), sa moyenne arithmétique pondérée est de : $\bar{X} = \frac{(11\times5)+(13\times3)+(10\times7)}{(5+3+7)} = 10,93$.

donc $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$ ou $\bar{X} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$

Rq : ① Dans le cas continu en prenant les x_i comme centre des classes.

Exemple :

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum n_i x_i$

$= \frac{101}{64} = 1,58$

x_i	n_i	$n_i x_i$
0	16	0
1	18	18
2	14	28
3	11	33
4	3	12
5	2	10
Σ.	64	101

3.3 La Moyenne quadratique :

La Moyenne quadratique MQ d'une série de n valeurs $x_1, x_2 \dots x_n$, correspondent respectivement les effectifs $n_1, n_2 \dots n_k$ est égale :

$$\boxed{MQ = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}}$$

Exemple :

La moyenne quadratique MQ des valeurs :

$-2, 5, -8, 9, -4$ est

$$MQ = \sqrt{\frac{1}{5}\left((-2)^2+(5)^2+(-8)^2+(9)^2+(-4)^2\right)} = 6,16$$

3.4 La moyenne géométrique : est la racine nième défini comme suit.

$$\boxed{\overline{G} = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \dots x_n}}$$

3.5 La moyenne harmonique :

$$\boxed{H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{1}^{k}\frac{n_i}{x_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{x_i}}}$$

Exemple : H des. 1, 4, 8, 10, 12. est

$$H = \frac{5}{\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}} = 3,2$$

Remarque : On a la relation suivante entre ces différentes moyennes.

$$\boxed{H \leq G \leq \overline{x} \leq MQ}$$

4. Les Quartiles : sont les valeurs qui divisent une série discrète ordonnée dans le sens croissant en 4 partie égales avec :

Q_1 : est la valeur dont l'indice est le plus petit entier supérieur à $\left(\frac{n}{4}\right)$

$Q_2 = Me$

Q_3 : est la valeur dont l'indice est le plus petit entier supérieur à $\left(\frac{3n}{4}\right)$

. L'écart interquartile est donné par : $Q_3 - Q_1$

Exemples : $\underset{16}{0 - 0}$ $\underset{18}{1 - 1}$ $\underset{14}{2 - 2}$ $\underset{11}{3 - 3}$ $\underset{3}{4 - 4}$ $\underset{2}{\leq 5}$. $n = 64$

$Q_2 = Me$, $Q_1 = \cancel{x\left(\frac{n}{4}\right)} = ?!$ $\frac{n}{4} = 16 \Rightarrow Q_1 = x_{(17)} = 1$

$Q_3 = ?!$ $\frac{3n}{4} = 48 \Rightarrow Q_3 = x(49) = 3$.

. Les déciles : qui divisent la série discrète ordonnée dans le sens croissant en 10 partie :

D_1 : est la valeur dont l'indice est le plus petit entier supérieur à $\frac{n}{10}$

D_2 : ——— $\frac{2n}{10}$

⋮

D_9 : ——— $\frac{9n}{10}$

. Les centiles :

C_1 ——— $\frac{n}{100}$

C_2 ——— $\frac{2n}{100}$

⋮

C_{99} ——— $\frac{99n}{100}$

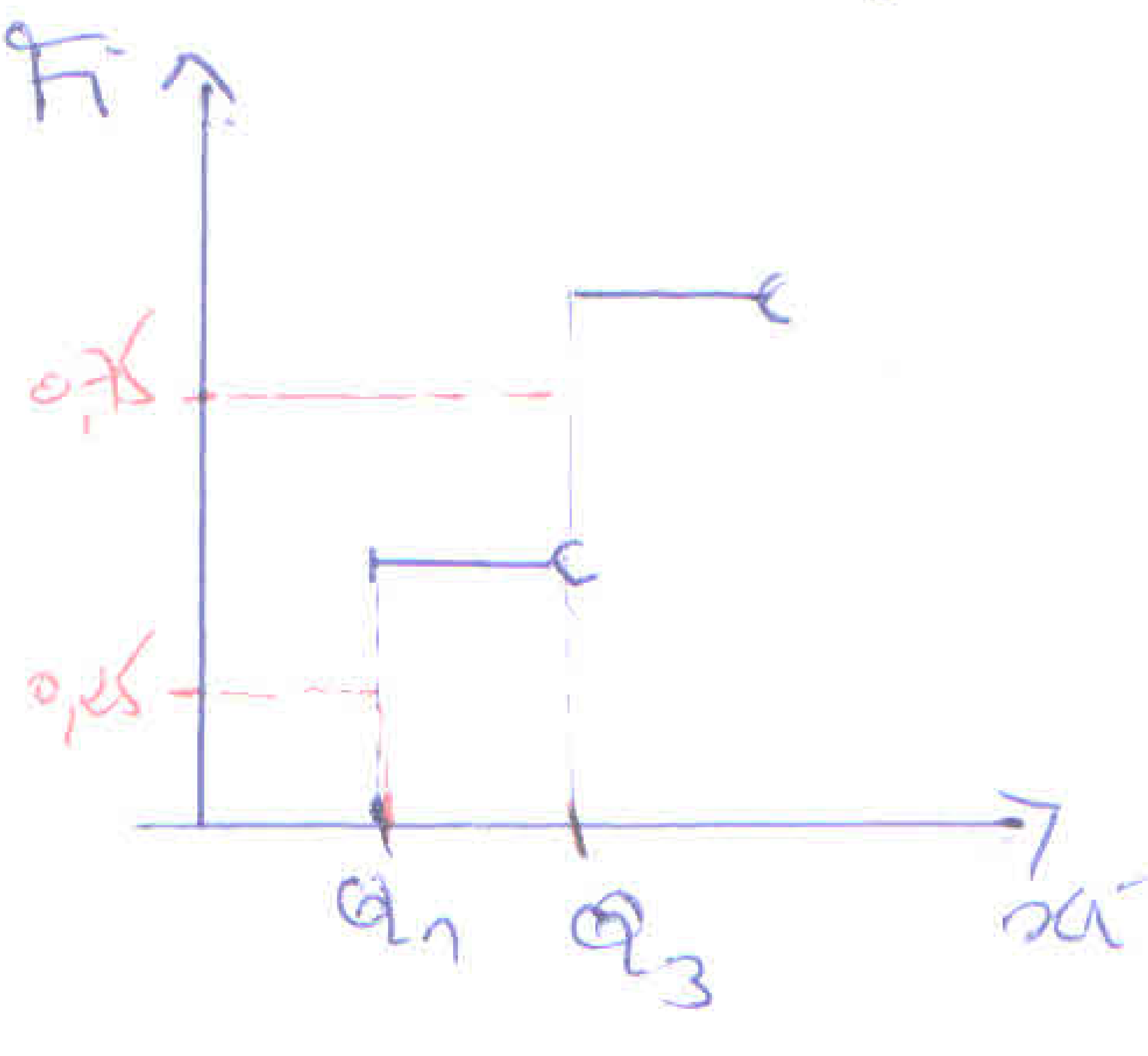
Détermination des quartiles:

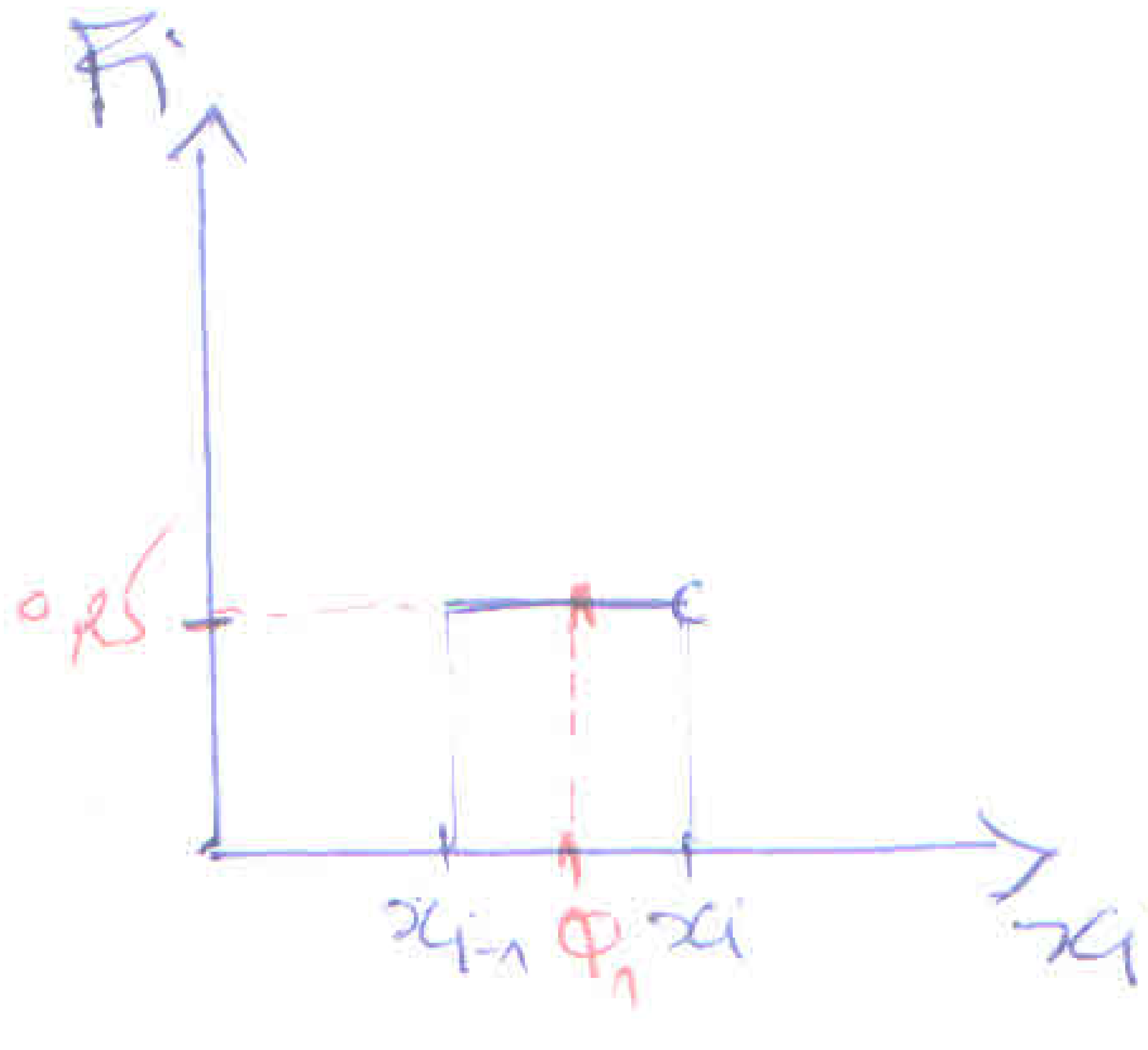
Cas continu: pour déterminer les quartiles, on (décile) utilise la même méthode d'interpolation linéaire pour la médiane : (on détermine la classe de Q_1, Q_2, Q_3

- $Q_1 = e_{i-1} + (e_i - e_{i-1}) \dfrac{\frac{n}{4} - N(e_{i-1})}{N(e_i) - N(e_{i-1})}$
- $Q_2 = M_e = e_{i-1} + (e_i - e_{i-1}) \dfrac{\frac{n}{2} - N(e_{i-1})}{N(e_i) - N(e_{i-1})}$
- $Q_3 = e_{i-1} + (e_i - e_{i-1}) \dfrac{\frac{3n}{4} - N(e_{i-1})}{N(e_i) - N(e_{i-1})}$

- Géométriquement Q_1, Q_3 est la projection du point $\frac{n}{4}, \frac{3n}{4}$ respectivement de courbe cumulative croissante sur l'axe (ox).

Cas discret : (graphiquement)





$\cancel{Q_1 = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}}$

Caracteristiques de dispersion :

Soient les deux séries suivantes :

95	97	100	103	105
50	75	100	125	150

On remarque que les deux séries ont la même médiane $M_e = 100$, la moyenne arithmétique $\bar{x} = 100$ mais il existe une grande difference entre elles.
En effet les valeurs de 2ième série sont plus dispersées que la 1ière, donc il est très important de déterminer les paramètres de dispersion, car les paramètres de position ne donne pas des informations suffisantes sur la série.

a) L'étendue : E est définie par la difference entre la valeur maximale et la valeur minimale de la série : $E = X_{max} - X_{min}$.

Exemple : $E = 5 - 0 = 5$

Exemple (cas continu) Calculons le centre de l'intervalle

$E = 70 - 10 = 60$ ou bien $80 - 0 = 80$.

b) La variance soit la serie $x_1, x_2 \ldots x_n$
$n_1, n_2 \ldots n_k$.

La variance est donné par

$$V(x) = \frac{1}{n} \sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum n_i (x_i - \bar{x})^2$$

c) L'écart type : noté $\sigma(x)$ est la racine carrée positive de $V(x)$: $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$.

R1 : Dans le cas continu on prend le centre de classe c_i

Exemple :

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
0	16	0	0
1	18	18	18
2	14	28	56
3	11	33	99
4	3	12	48
5	2	10	50
	64	101	271

$$V(x) = \frac{1}{n} \sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$= \frac{271}{64} - (1{,}58)^2$$

$$= 1{,}73$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

$$= \sqrt{1{,}73} = 1{,}31$$

Exemple :

classe	n_i	$n_i c_i^2$	c_i
[0,20[	360	36000	10
[20,40[	380	342 000	30
[40,60[	160	400 000	50
[60,80[	100	490000	70
	1000	1268000	

$$V(x) = \frac{1}{n} \sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$= \frac{1268000}{1000} - 30^2$$

$$= 368$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = 19{,}18.$$