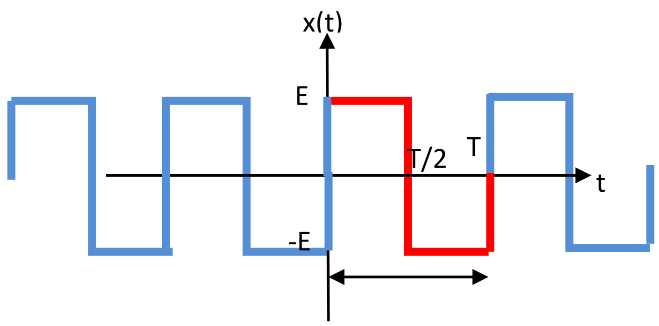
Solution TD 2 : Analyse de Fourier

Exercice 1

$$x(t)=\begin{cases} E & 0<t<T/2 \\ -E & T/2<t<T \end{cases} = x(t+kT)$$



La série de Fourier pour un signal périodique de période T est donc :

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nw_0t)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nw_0t)$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \quad , \quad a_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(nw_0t)dt \quad , \quad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(nw_0t)dt\,, \quad w_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt=\frac{1}{T}\left\{\int_0^{T/2} E.dt+\int_{T/2}^{T}(-E).dt\right\}=\frac{1}{T}\{E(T/2-0)+(-E)(T-T/2)\}=0$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(nw_0t)dt=\frac{2}{T}\left\{\int_0^{T/2} E.\cos(nw_0t)dt+\int_{T/2}^{T}(-E).\cos(nw_0t)dt\right\}=$$

$$\frac{2}{T}\frac{E}{n\frac{2\pi}{T}}\left\{\sin(n\frac{2\pi}{T}t)\Big|_0^{T/2}-\sin(n\frac{2\pi}{T}t)\Big|_{T/2}^{T}\right\}=\frac{E}{n\pi}\left\{\underbrace{\left[\sin(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2})-\sin(0)\right]}_{0}-\left[\underbrace{\sin(n\frac{2\pi}{T}T)-\sin(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2})}_{0}\right]\right\}=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(nw_0t)dt=\frac{2}{T}\left\{\int_0^{T/2} E.\sin(nw_0t)dt+\int_{T/2}^{T}(-E).\sin(nw_0t)dt\right\}=$$

$$\frac{2}{T}\frac{E}{n\frac{2\pi}{T}}\left\{-\cos(n\frac{2\pi}{T}t)\Big|_0^{T/2}-(-\cos(n\frac{2\pi}{T}t)\Big|_{T/2}^{T})\right\}=\frac{E}{\pi n}\{1-(-1)^n+1-(-1)^n\}=\frac{2E}{\pi n}(1-(-1)^n)$$

$$b_n=\begin{cases} 0 & n=pair \\ \frac{4E}{\pi n} & n=impair \end{cases}=\begin{cases} b_{2n}=0 \\ b_{2n+1}=\frac{4E}{\pi(2n+1)} \end{cases}$$

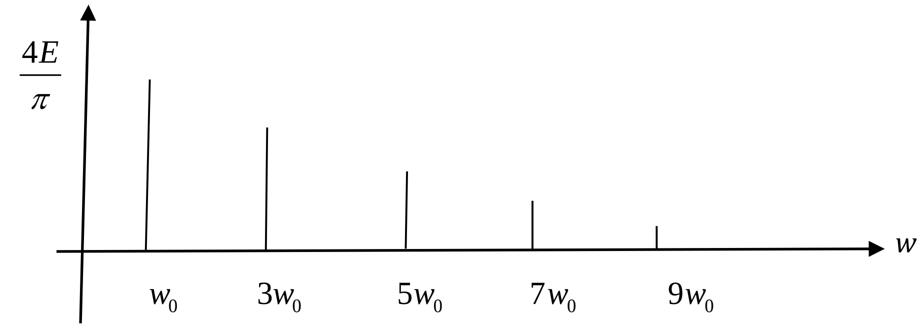
C'est-à-dire on peut écrire le signal par sa série de Fourier comme suit

$$x(t)=\frac{4E}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)w_0t)}{(2n+1)}=\frac{4E}{\pi}\left\{\sin(w_0t)+\frac{1}{3}\sin(3w_0t)+\frac{1}{5}\sin(5w_0t)+\frac{1}{7}\sin(7w_0t)+...........\right\}$$

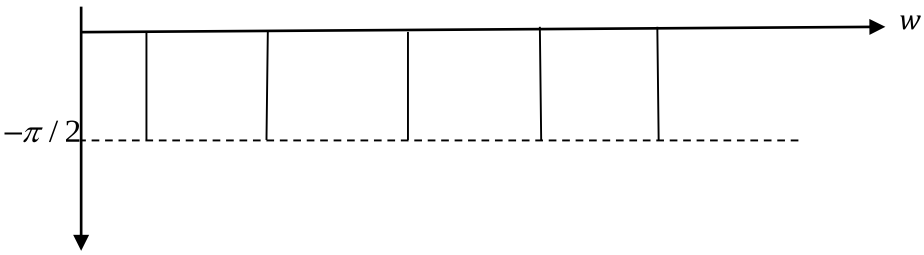
Spectre d'amplitude et de phase : sachant que

$$\cos(wt+\theta) = \cos(wt).\cos(\theta) - \sin(wt).\sin(\theta)$$
$$\theta = -\pi/2$$
$$\cos(wt+(-\pi/2)) = \cos(wt).\underbrace{\cos(-\pi/2)}_{0} - \sin(wt).\underbrace{\sin(-\pi/2)}_{-1} = \sin(wt)$$

Puisque : $\sin(wt) = \cos(wt - \pi/2)$ alors la phase est toujours $(-\pi/2)$



Spectre d'amplitude



Spectre de phase

L'identité de Parseval : la puissance du signal temporel est la somme des puissances qui se trouvent dans ses composantes de Fourier

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\, dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{16E^2}{2\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = E^2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

D'où la puissance dans ces 4 composantes est dans $w_0 \ldots w_4$

$$P_4 = \frac{1}{2}(b_1^2 + \cancelto{0}{b_2^2} + b_3^2 + \cancelto{0}{b_4^2}) = \frac{1}{2}\frac{16E^2}{\pi^2}\left\{1 + \frac{1}{9}\right\} = \frac{1}{2}\frac{16E^2}{\pi^2}\frac{10}{9} = \frac{80}{9\pi^2}E^2$$

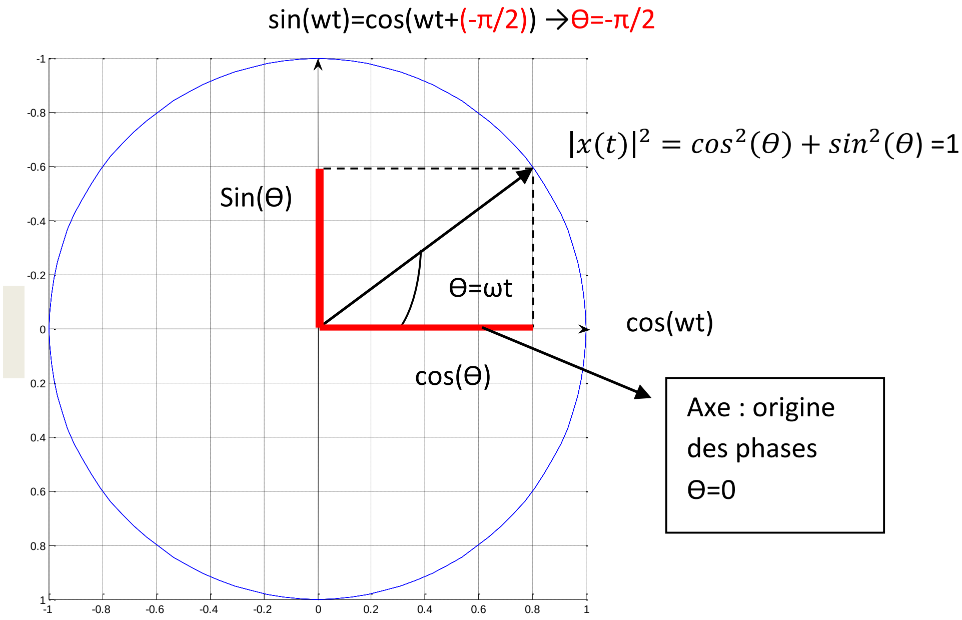
La puissance totale du signal est $P_x = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\, dt = E^2$

Donc le pourcentage de puissance qui se trouve dans les 4 premières composantes est :

$$P_4 / P_x = \frac{80}{9\pi^2}E^2 / E^2 = \frac{80}{9\pi^2} \approx 90\%$$

Et avec l'identité de Parseval on peut calculer la série

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\,dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{16E^2}{2\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = E^2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$



Exercice 2

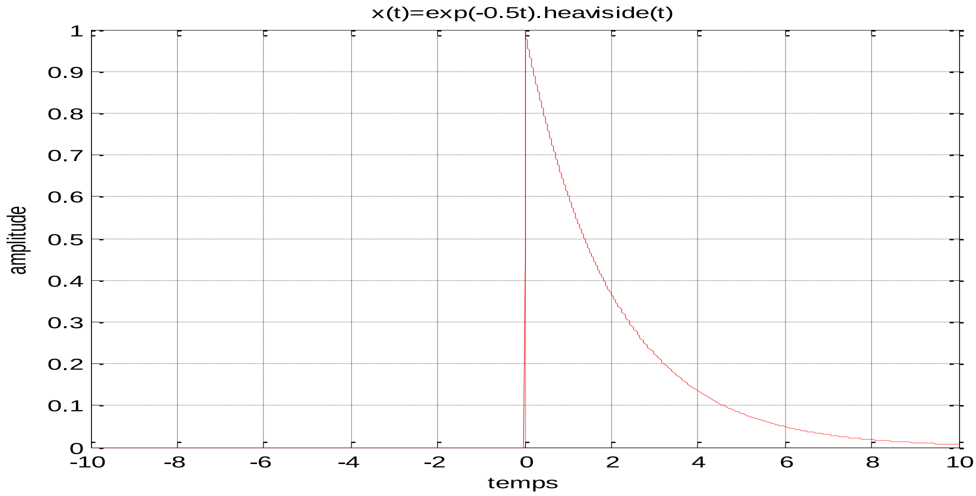
$$x(t) = e^{-at}\varepsilon(t) \quad \text{Pour} \quad \varepsilon(t) \text{ fonction Heaviside}$$
$$a > 0$$

Représentation du signal $x(t)$

Soit par exemple **a=0.5** et l'intervalle temporel de **[-10..10]** ; par **Matlab**, on peut faire ce programme pour tracer ce signal

```
t=-10:.001:10;
a=0.5;
x=exp(-a*t).*heaviside(t);
plot(t,x,'r'); xlabel('temps'); ylabel('amplitude'); title('x(t)=exp(-
0.5t).heaviside(t)');grid;
```

Le graphe correspondant est donc :



Calcule de $X(f)$

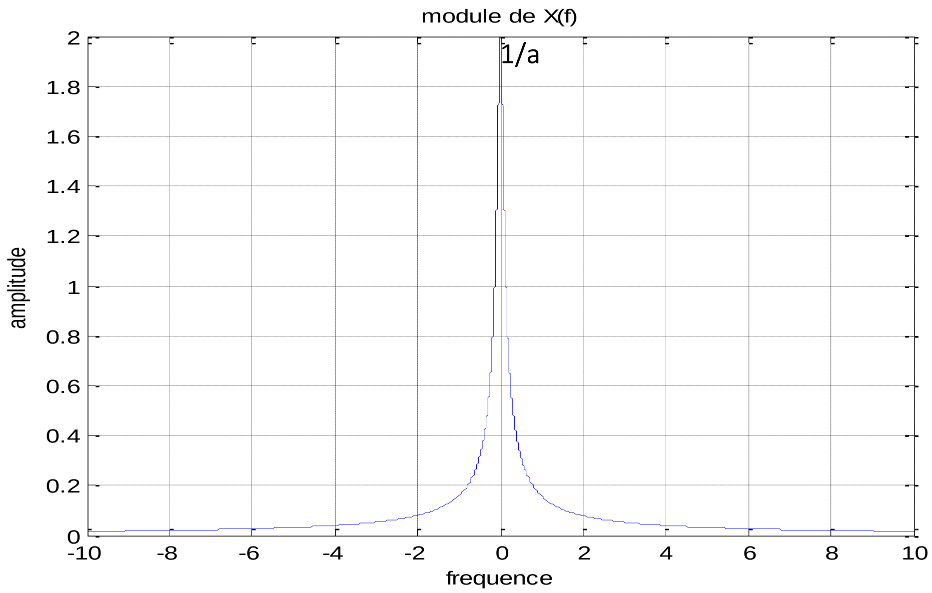
$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j2\pi ft}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}dt=\frac{-1}{a+j2\pi f}e^{-(a+j2\pi f)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{-1}{a+j2\pi f}(0-1)=\frac{1}{a+j2\pi f}$$

$$X(f)=\frac{1}{a+j2\pi f}$$

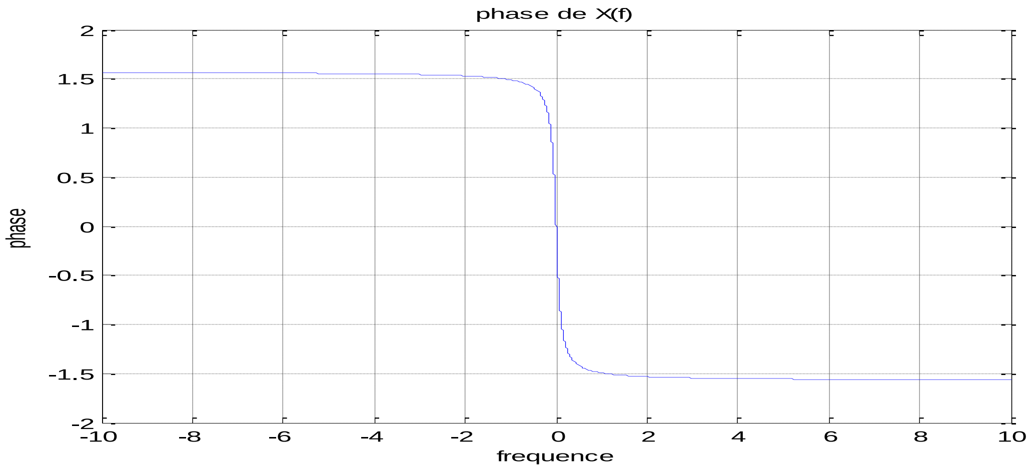
Spectre d'amplitude : $|X(f)|$

$$|X(f)|=\frac{1}{\sqrt{a^2+(2\pi f)^2}}$$

Pour $a=0.5$ le spectre d'amplitude est tracé dans l'intervalle fréquentiel [-10..10] comme suit :

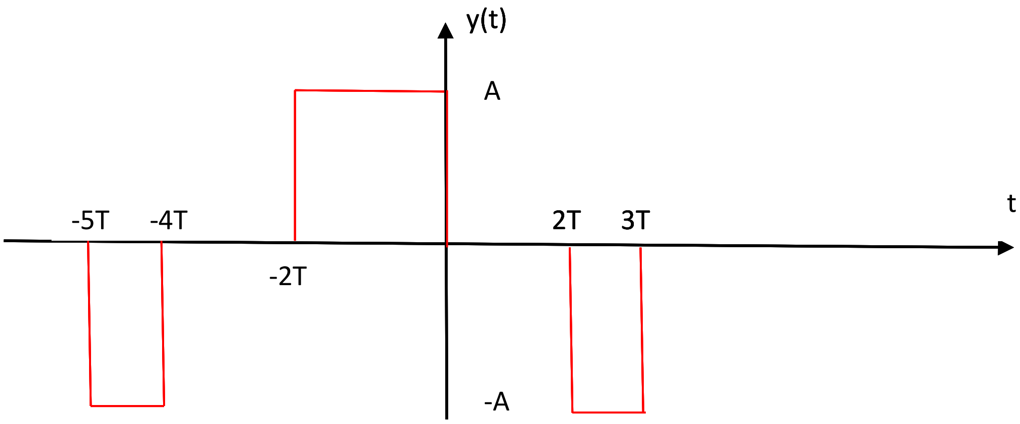


Spectre de phase : La phase de (X(f)) : $\boldsymbol{\theta = -\arctan\left(\frac{2\pi f}{a}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\pi f}{a}\right)}$



<u>Exercice 3</u> : Prenons le cas d'un signal composé de plusieurs signaux rectangulaires décalés :

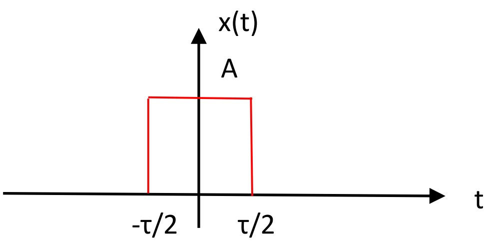
Soit le signal selon la figure ci-dessous



On voit que ce signal est composé de plusieurs fenêtres rectangulaires décalées et de différentes durées.

Prenons le cas d'une fenêtre rectangulaire centrée à l'origine.

Soit la figure ci-contre



La durée de cette fenêtre centrée à l'origine est égale à **τ** et d'amplitude égale à **A**

On peut écrire donc ce signal sous le modèle mathématique par :

$$x(t) = \begin{Bmatrix} A & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{Bmatrix}$$

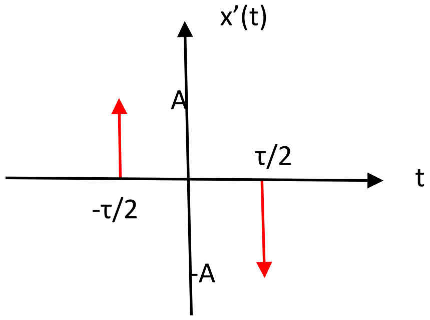
Par application de la propriété de la transformée de Fourier du signal dérivé, on peut écrire

$$X(f) = TF\{x(t)\} = \frac{X^{'}(f) = TF\{x'(t)\}}{j2\pi f}$$

Calculons donc la dérivé du signal $x(t)$

$$x'(t) = A.\delta(t+\tau/2) - A.\delta(t-\tau/2)$$

Donc la transformée de Fourier du signal dérivé est :



$$X'(f) = TF\{x'(t)\} = A\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+\tau/2).e^{-j2\pi ft}dt - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau/2)e^{-j2\pi ft}dt\right\} = A\{e^{-j2\pi f(-\tau/2)} - e^{-j2\pi f(\tau/2)}\}$$

$$X'(f) = TF\{x'(t)\} = A\{2j.\sin(\pi f\tau)\}$$

D'où

$$X(f) = TF\{x(t)\} = \frac{X^{'}(f) = TF\{x'(t)\}}{j2\pi f} = \frac{A\{2j.\sin(\pi f\tau)\}}{j2\pi f} = \frac{A.\tau\sin(\pi f\tau)}{(\pi f\tau)}$$

Il existe deux définitions du sinus-cardinal

1. $\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} = \sin c(\alpha)$ Pour lequel s'annule pour $\alpha = \pm 1, \pm 2 ....\pm k$ pour $k \in \mathbb{N}$
2. $\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = \sin c(\alpha)$ Pour lequel s'annule pour $\alpha = \pm k\pi$ pour $k \in \mathbb{N}$

On choisit par exemple la première définition qui est utilisée par Matlab, donc

$$X(f) = TF\{x(t)\} = \frac{X^{'}(f) = TF\{x'(t)\}}{j2\pi f} = \frac{A\{2j.\sin(\pi f\tau)\}}{j2\pi f} = \frac{A.\tau\sin(\pi f\tau)}{(\pi f\tau)} = A.\tau\sin c(f\tau)$$

$$Amplitude.durée.\sin c(f.durée)$$

$X(f)$ S'annule pour $f\tau = \pm k \Leftrightarrow f = \pm k/\tau$

On peut écrire donc le signal

$$y(t) = -A.x\left(\frac{t+4.5T}{T}\right) + A.x\left(\frac{t+T}{2T}\right) - A.x\left(\frac{t-2.5T}{T}\right)$$

En utilisant la propriété du **décalage** pour la transformée de Fourier

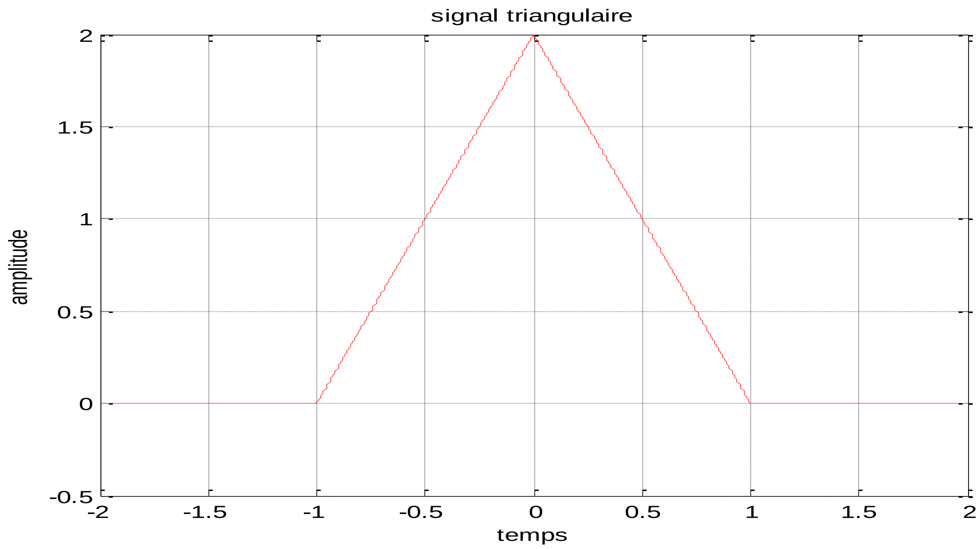
$$X(f) = TF\{x(t)\} \Leftrightarrow TF\{x(t-to)\} = X(f).e^{-j2\pi fto}$$

Donc on aura la transformée de Fourier du signal composé de fenêtres rectangulaires **décalées** par

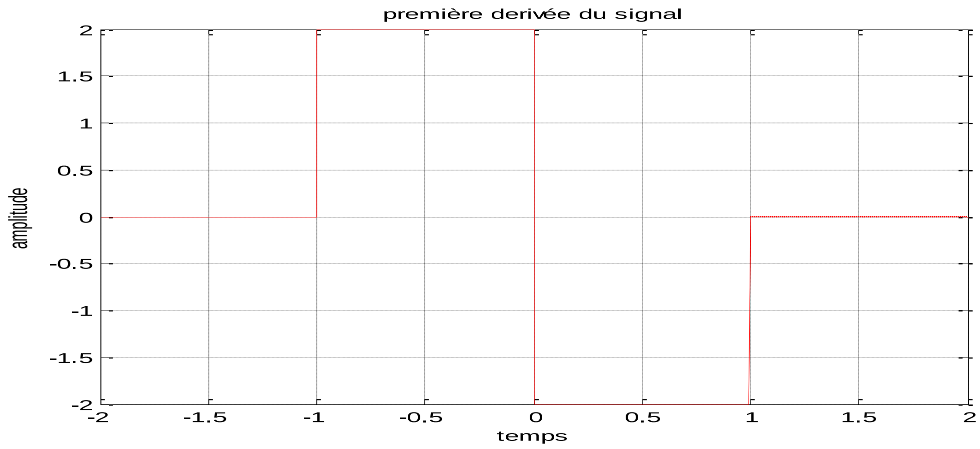
$$Y(f) = TF\{y(t)\} = -A.T\sin c(fT).e^{-j2\pi f(-4.5T)} + A.2T\sin c(2fT).e^{-j2\pi f(-T)} - A.T\sin c(fT).e^{-j2\pi f(2.5T)}$$

Prenons le cas d'un **signal triangulaire**

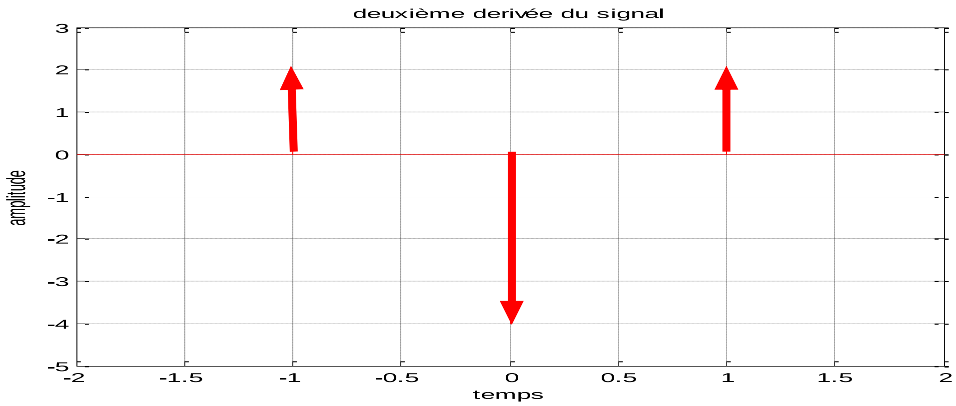
$x(t) = 2tri(t)$ Dont la figure est ci-dessous



Calculons sa première dérivée



La seconde dérivée du signal :



$$x''(t) = 2\delta(t+1) - 4\delta(t) + 2\delta(t-1)$$

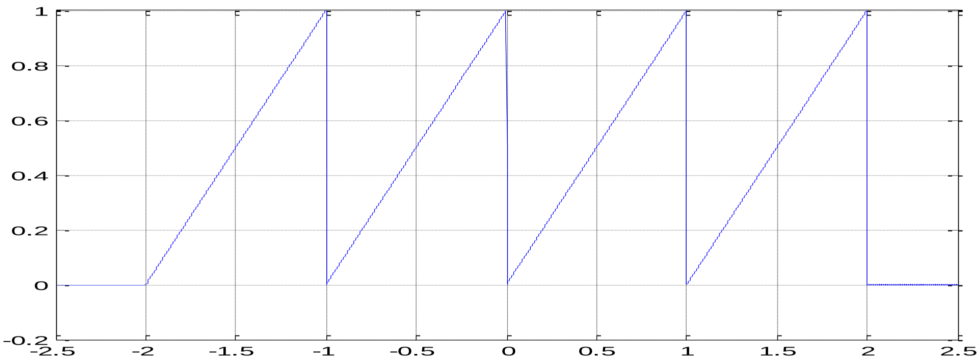
$$X(f) = \frac{TF\{x''(t)\}}{(j2\pi f)^2} = \frac{TF\{2\delta(t+1) - 4\delta(t) + 2\delta(t-1)\}}{(j2\pi f)^2} = \frac{\{2.e^{j2\pi f} - 4e^0 + 2e^{-j2\pi f}\}}{(j2\pi f)^2} = \frac{2\{(e^{j\pi f} - e^{-j\pi f})^2\}}{(j2\pi f)^2}$$

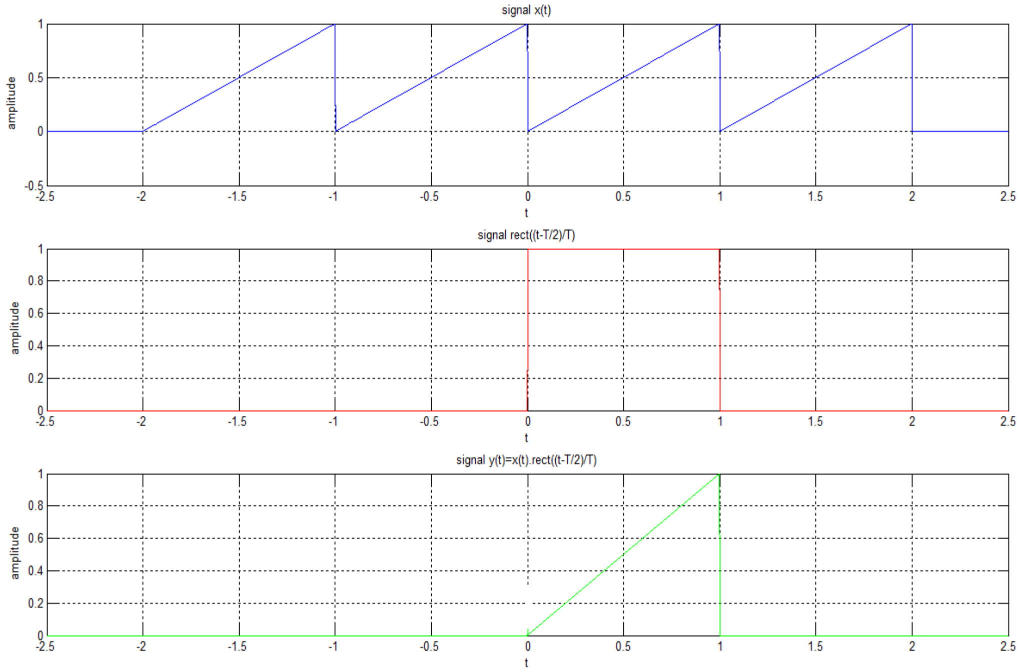
$$X(f) = \frac{TF\{x''(t)\}}{(j2\pi f)^2} = \frac{2\{(2j\sin(\pi f)^2\}}{(j2\pi f)^2} = 2\sin c^2(f)$$

Exercice 4

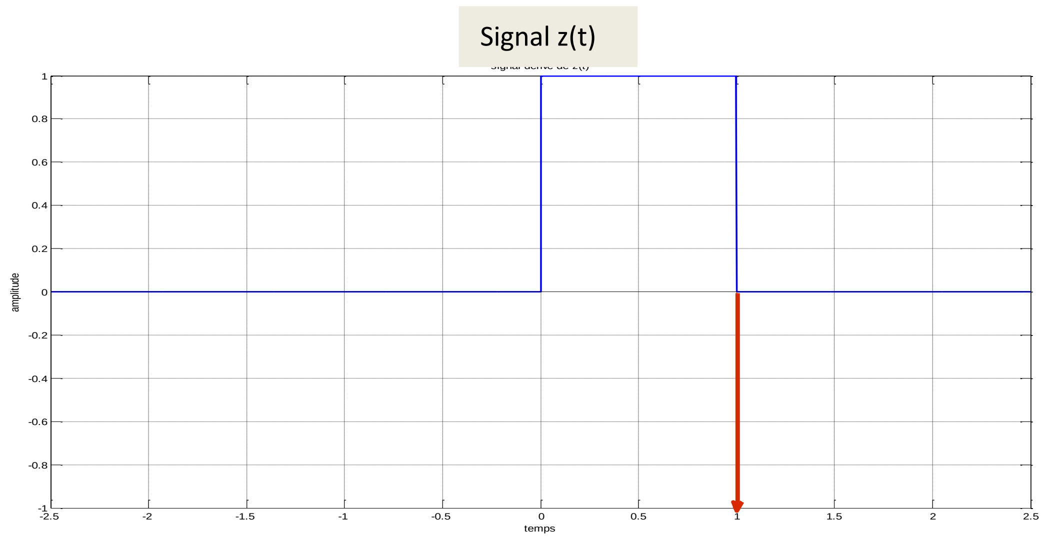
Soit le signal périodique de période T de la figure ci-dessous

Pour T=1 on peut tracer par exemple :





$z(t)=\dfrac{dy(t)}{dt}=y'(t)$ Le graphe est le suivant :



$$z(t)=\frac{dy(t)}{dt}=y'(t)=T.rect(\frac{t-0.5T}{T})-T\delta(t-T)$$ Pour $T=1$

$T=1$

$$z(t)=\frac{dy(t)}{dt}=y'(t)=rect(\frac{t-0.5}{1})-\delta(t-1)$$ Ce qui correspond au graphe ci-dessus

La transformée de Fourier est donc

$$Y(f) = \frac{Z(f)}{j2\pi f} = \frac{TF\left\{T.rect(\frac{t-0.5T}{T}) - T\delta(t-T)\right\}}{j2\pi f}$$

$$Y(f) = \frac{Z(f)}{j2\pi f} = T^2 \sin c(fT).e^{-j\pi fT} - \frac{T.e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f}$$

Pour $T = 1$

$$Y(f) = \frac{Z(f)}{j2\pi f} = \sin c(f).e^{-j\pi f} - \frac{e^{-j2\pi f}}{j2\pi f}$$