

Séries entières

Suites de fonctions

Soient $u_1(z), u_2(z), \dots, u_n(z)$, ou $(u_n(z))$ une suite de fonctions définies et uniformes sur un domaine $D \subseteq \mathbb{C}$.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = u(z)$, on dit que la suite de fonctions $(u_n(z))$ est convergente ou converge vers $u(z)$.

Sinon on dit qu'elle est divergente.

Exemple:

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z^2}{n}\right) = 1$, donc la suite $(u_n(z))$ de terme général

$u_n(z) = 1 + \frac{z^2}{n}$ converge vers 1

La suite $(u_n(z))$ de terme général $u_n(z) = z^n$ converge vers 0 si $|z| < 1$ et converge vers 1 si $|z| = 1$, diverge si $|z| > 1$.

Séries de fonctions

À partir d'une suite de fonctions $(u_n(z))$, nous définissons la série

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ qui est appelée série de fonctions infinie de terme général $u_n(z)$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = S(z)$ la série est dite convergente vers sa somme $S(z)$, sinon la série est dite divergente.

Convergence absolue

On dit que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ est absolument convergente si la

série des valeurs absolues $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ est convergente.

Remarques

1) Si la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = 0$, la réciproque est fausse.

2) Si une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ converge $\forall z \in D \subseteq \mathbb{C}$, on dira que D est le domaine de convergence de la série.

3) Si $\sum_{i=n}^{\infty} |u_n(z)|$ est convergente, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, est convergente, la réciproque est fausse.

4) Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, est convergente mais que la série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ est divergente, on dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ est semi convergente.

Séries entières

Définition:

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On pose

$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$, $\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r\}$ et

$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}$.

On dit que $D(z_0, r)$ (respectivement $\bar{D}(z_0, r)$, $C(z_0, r)$) est le disque ouvert (respectivement disque fermé, cercle) de centre z_0 et de rayon r .

Définition:

On appelle série entière en $(z - z_0)$ toute série qui est de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ où } a_n \in \mathbb{C}.$$

Rayon de convergence**Théorème:**

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ une série entière, alors il existe un unique élément $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que:

1) si $|z - z_0| < r$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est absolument convergente

2) si $|z - z_0| > r$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est divergente.

3) Pour $|z - z_0| = r$ elle peut converger ou diverger.

On dit que r est le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

et $D(z_0, r)$, est le disque de convergence

Remarques:

1) Si $r = 0$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge uniquement en $z = z_0$.

2) Si $r = \infty$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$.

Théorème:

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ une série entière, alors le rayon de convergence de la série est donné par:

1) **Critère de d'Alembert:**

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

2) **Critère de Cauchy:**

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Exemple:

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(2n+1)3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n.$$

1) $a_n = n$,

$$\text{donc } r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$$

2) $a_n = n!$,

$$\text{donc } r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0$$

3) $a_n = \frac{1}{(2n-1)!}$,

$$\text{donc } r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n-1)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(2n+1)2n| = \infty$$

4) $a_n = \frac{1}{(2n+1)3^n}$,

$$\text{donc } r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n+1)3^n}}{\frac{1}{(2n+3)3^{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(2n+1)3^n} \cdot \frac{(2n+3)3^{n+1}}{1} \right| = 3.$$

5) $a_n = n^n$,

$$\text{donc } r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|n^n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Critères spéciaux de convergence:

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ une série entière.

1) Critère de d'Alembert:

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$, alors série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge

absolument si $l < 1$, diverge si $l > 1$, et si $l = 1$ on ne peut rien conclure et le domaine de convergence est

a) $D(z_0, \frac{1}{l})$ si $l > 0$.

b) $D(z_0, \infty)$ si $l = 0$

2) Critère de Cauchy:

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, alors série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge

absolument si $l < 1$, diverge si $l > 1$, et si $l = 1$ on ne peut rien conclure. et le domaine de convergence est

a) $D(z_0, \frac{1}{l})$ si $l > 0$.

b) $D(z_0, \infty)$ si $l = 0$.

Exemple:

Déterminer le domaine de convergence des séries entières suivantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(2n+1)3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n.$$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)}{n} \right| = 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ converge absolument pour $|z| < 1$ (c'est à dire dans le disque ouvert $D((0, 1))$).

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)}{n!} \right| = \infty.$$

donc la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ converge simplement pour $z = 0$.

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n-1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} \right| = 0$$

donc la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(z+2)^n}{(2n+3)3^{n+1}}}{\frac{(z+2)^{n-1}}{(2n+1)3^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(2n+3)3} \right| = \frac{1}{3}$$

donc la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(2n+1)3^n}$ converge absolument pour $|z+2| < 3$.

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

donc la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ converge simplement pour $z = 0$.

Les séries entières sont holomorphes

Maintenant nous allons voir, plus généralement, que toute série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

qui converge dans $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$ est holomorphe dans $D(z_0, r)$.

De plus pour tout $z \in D(z_0, r)$ on a:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Séries de Taylor

Définition

Soit f une fonction définie dans un domaine D , alors f est dite développable en une série de Taylor dans un disque $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\} \subset$

D , s'il existe une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ convergente dans $D(z_0, r)$,

telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, avec $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$, donc

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \frac{(z - z_0)^3}{3!} f^{(3)}(z_0) + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + \dots$$

Cette série est appelée série de Taylor de f centrée en z_0 .

Si le centre $z_0 = 0$ alors la série devient

$$f(z) = f(0) + z f'(0) + \frac{z^2}{2!} f''(0) + \frac{z^3}{3!} f^{(3)}(0) + \dots + \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

et on l'appelle la série de Maclaurin de f .

Le domaine de convergence de la de série est défini par $|z - z_0| < r$, où r est le rayon de convergence.

Théorème de Cauchy-Taylor

f est une fonction holomorphe dans D si et seulement si f est développable en une série de Taylor dans un disque $D(z_0, r) \subset D$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n \quad \text{pour tout } z \in D(z_0, r)$$

Exemple:

Quelques séries de Maclaurin avec leurs domaines de convergence

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1 + z} = 1 - z + z^2 + \dots + (-1)^n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad |z| < 1.$$

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad |z| < 1.$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad |z| < \infty.$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad |z| < \infty.$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad |z| < \infty.$$

Exemple:

Développer en série de Taylor autour de $z_0 \in \mathbb{C}$, les fonctions suivantes:

$$1) f(z) = \frac{1}{z+3}, \quad z_0 = 1.$$

$$2) f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z}, \quad z_0 = 0.$$

$$3) f(z) = \cos z, \quad z_0 = \pi/4.$$

$$4) f(z) = ze^{2z} \quad z_0 = -1.$$

Dans chacun des cas, donner le domaine de convergence de la série obtenue.

Solution

1) On peut écrire $f(z)$ comme

$$f(z) = \frac{1}{z+3} = \frac{1}{z-1+4} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \left(\frac{z-1}{4}\right)}$$

On développe $\frac{1}{1 + \left(\frac{z-1}{4}\right)}$ en série de Taylor en $z_0 = 1$ ou en série de

puissances de $(z-1)$:

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{z-1}{4}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{4}\right)^n,$$

donc la série de Taylor de la fonction $f(z)$ en $z_0 = 1$ est:

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{4}\right)^n$$

$$\text{On a: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{(-1)^n \left(\frac{1}{4}\right)^n} \right| = \frac{1}{4}, \text{ donc la série converge absolument pour}$$

$$|z-1| < 4.$$

c'est à dire à l'intérieur du disque de rayon 4 centré au point 1.

2) La série de Taylor de la fonction $\ln(1+z)$ en $z_0 = 0$ est

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots$$

et la série de Taylor de la fonction $\ln(1-z)$ en $z_0 = 0$ est

$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots - \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots$$

$$\text{Puisque la fonction } f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z} = \ln(1+z) - \ln(1-z),$$

donc la série de Taylor de la fonction $\ln \frac{1+z}{1-z}$ en $z_0 = 0$ est

$$\ln \frac{1+z}{1-z} = 2z + 2\frac{z^3}{3} + \dots + 2\frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2\frac{1}{2n+3}}{2\frac{1}{2n+1}} \right| = 1, \text{ donc la série converge absolument pour } |z| < 1.$$

$$3) f(z) = \cos z$$

On a $f(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(\pi/4) = -\sin(\pi/4) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $f''(\pi/4) = -\cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

La série de Taylor de la fonction $\cos z$ en $z_0 = \pi/4$ est

$$f(z) = \cos z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}}{(-1)^n \frac{1}{n!}} \right| = 0,$$

donc série converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.

4) $f(z) = ze^{2z}$.

On a $f(z) = ((z+1) - 1)e^{-2}e^{2(z+1)}$, donc

$$f(z) = ((z+1) - 1)e^{-2}e^{2(z+1)} = ((z+1) - 1)e^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z+1)^n}{n!}$$

Posons $a_n = \frac{2^n}{n!}$, alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{n+1} \right| = 0$$

donc série converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.