Université Med Khider - Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique
Master 1 Energétique

Dynamique des Gaz (Solutions de la série n°3)

Ex. 3:
L'écoulement dans la tuyère convergente-divergente est isentropique, donc au niveau du plan de la sortie (1) nous avons:

$$\frac{T_0}{T_1}=1+\tfrac{\gamma-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2=1+\tfrac{1.4-1}{2}(2)^2=1.8 \qquad \text{donc} \qquad T_1=166.67\ \mathrm{K}$$

$$\frac{p_0}{p_1}=\left(1+\tfrac{\gamma-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=\left(1+\tfrac{1.4-1}{2}(2)^2\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}}=7.8244 \qquad \text{donc} \qquad p_1=127.80\ \mathrm{kPa}$$

Et dans le plan juste après l'onde de choc (2) nous avons:

a) $$\mathrm{Ma}_2^2=\frac{(\gamma-1)\mathrm{Ma}_1^2+2}{2\gamma\mathrm{Ma}_1^2-(\gamma-1)}=\frac{(1.4-1)(2)^2+2}{2\times1.4\times(2)^2-(1.4-1)}=0.3333 \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{Ma}_2=0.577$$

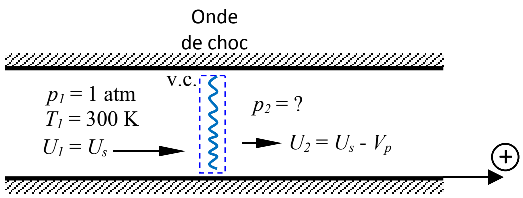
b) $$\frac{T_2}{T_1}=\frac{\left(2+(\gamma-1)\mathrm{Ma}_1^2\right)\left(2\gamma\mathrm{Ma}_1^2-(\gamma-1)\right)}{(\gamma+1)^2\,\mathrm{Ma}_1^2}$$
$$=\frac{\left(2+(1.4-1)\times(2)^2\right)\left(2\times1.4\times(2)^2-(1.4-1)\right)}{(1.4+1)^2\times(2)^2}=1.6875 \qquad \text{donc} \qquad T_2=281.26\ \mathrm{K}$$

c) $$\frac{p_2}{p_1}=\left(\tfrac{2\gamma}{\gamma+1}\right)\mathrm{Ma}_1^2-\left(\tfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)=\left(\tfrac{2\times1.4}{1.4+1}\right)(2)^2-\left(\tfrac{1.4-1}{1.4+1}\right)=4.5 \qquad \text{donc} \qquad p_2=575.1\ \mathrm{kPa}$$

d) $$U_2=\sqrt{\gamma RT_2}\times\mathrm{Ma}_2=\sqrt{1.4\times287\times281.26}\times0.577=194\ \mathrm{m/s}$$

e) $$\frac{p_{02}}{p_2}=\left(1+\tfrac{\gamma-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=\left(1+\tfrac{1.4-1}{2}(0.577)^2\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}}=1.2531 \qquad \text{donc} \qquad p_{02}=720.66\ \mathrm{kPa}$$

Ex. 4:
En se déplaçant avec l'onde de choc, nous aurons le schéma équivalent ci-contre.



a) De l'équation de continuité nous avons:

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{(\gamma+1)\mathrm{Ma}_1^2}{2+(\gamma-1)\mathrm{Ma}_1^2} \qquad \text{avec} \qquad U_1=U_s \qquad U_2=U_s-V_p \qquad \mathrm{Ma}_1^2=\tfrac{U_1^2}{\gamma RT_1}=\tfrac{U_s^2}{\gamma RT_1}$$

Donc l'équation précédente s'écrit:

$$\frac{U_s}{U_s-V_p}=\frac{(\gamma+1)\frac{U_s^2}{\gamma RT_1}}{2+(\gamma-1)\frac{U_s^2}{\gamma RT_1}}$$

Le réarrangement de cette équation conduit à:

$$U_s^2-\left(\tfrac{\gamma+1}{2}V_p\right)U_s-\gamma RT_1=0 \qquad \text{ou encore} \qquad U_s^2-120U_s-120540=0$$

ce qui représente une équation du second degré, dont les solutions sont données par:

$$\Delta=(-120)^2-4\times(-120540)=496560$$

$$U_s^{(1)}=\tfrac{120-\sqrt{496560}}{2}=-292.335\ \mathrm{m/s}$$

$U_s^{(2)} = \frac{120+\sqrt{496560}}{2} = 412.335\ \text{m/s}$

La seule solution acceptable physiquement est la solution positive(*), donc $U_s = 412.335\ \text{m/s}$.

2) Nous avons:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)\text{Ma}_1^2 - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)\frac{U_s^2}{\gamma R T_1} - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) = \left(\frac{2\times1.4}{1.4+1}\right)\frac{(412.335)^2}{1.4\times287\times300} - \left(\frac{1.4-1}{1.4+1}\right) = 1.48$$

donc $p_2 = 1.48\ \text{atm} = 1.5\times10^5\ \text{N/m}^2$

Etant donné que la force s'exerçant sur le piston est égale à l'intégrale de la pression sur la surface du piston, on aura:

$F_p = p_2 A_p = 1.5\times10^5 \times 50\times10^4 = 750\ \text{N}$

(*) $U_s = U_s^{(2)}$ parce que le gaz se déplace dans le sens positif du repère considéré, et aussi parce que l'écoulement en amont de l'onde de choc doit être supersonique.

...A suivre