REPRESENTATION D'ETAT DES SYSTEMES

1. INTRODUCTION

Toutes les méthodes étudiées jusqu'à présent, que ce soit pour les systèmes linéaires ou non, en temps continu ou en temps discret restent valables et efficaces jusqu'à ce que ces systèmes atteignent une complexité telle que l'on ne puisse plus se satisfaire de l'unique relation entrée - sortie pour les commander correctement. De même, ces modèles deviennent difficiles à mettre en œuvre lorsque les systèmes étudiés possèdent plusieurs entrées et plusieurs sorties. **Le représentation d'état des systèmes** est un outil puissant permettant de modéliser le fonctionnement de systèmes linéaires ou non, en temps continu ou en temps discret et qui possède en outre, l'avantage de conserver la représentation temporelle des phénomènes.

2. OBJECTIF

L'objectif de ce chapitre consiste à présenter aux étudiants les différentes techniques d'analyse et de design des systèmes linéaires représentés par modèle d'état.

3. REPRESENTATION PAR LE MODELE D'ETAT

De manière alternative, le comportement d'un système linéaire invariant d'entrée u(t) et de sortie y(t) peut être décrit par un nombre fini de grandeurs appelées variables d'états. Ces variables permettent de déterminer les évolutions futures du système à partir des états initiaux et de l'entrée. Un modèle d'état est un ensemble fini d'équations différentielles du premier ordre reliant des grandeurs scalaires, divisées en variables internes (variables d'états) et en variables externes comprenant les signaux d'entrée et de sortie. La forme générale d'un tel modèle est la suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A * x(t) + B * u(t) & \text{Equation d'état} \\ y(t) = C * x(t) + Du(t) & \textit{Equation de mesure} \end{cases} \quad (1)$$

Où $A \epsilon R^{nxn}$ est la matrice d'état ou d'évolution, $B \epsilon R^{nx1}$ est la matrice d'entrée, $C \epsilon R^{1xn}$ est la matrice de sortie ou d'observation, n le nombre d'états et le scalaire D représente la transmission directe de l'entrée sur la sortie. L'état et la sortie peuvent ainsi être calculés, à tout instant, pour des conditions initiales x(0) quelconques.

3.1. Quelques définitions à cet effet :

- L'état : est une structure mathématique constituée d'un ensemble de n variables $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$… $x_n(t)$ telles que les valeurs initiales $x_i(t_0)$ de cet ensemble et les entres $u_i(t)$ suffisent pour déduire d'une manière unique la réponse du système pour $t \geq t_0$

- Les variables d'état: un sous-ensemble de toutes les variables possibles du système $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$… $x_n(t)$

- Le vecteur d'état : est l'ensemble minimal de variables décrivant le système

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

> **• Il est important de noter que, contrairement à la représentation par équation différentielle, la représentation d'état d'un système n'est pas unique et dépend du choix des variables d'état que nous opérons.**
>
> **• Il est possible de passer d'une représentation d'état à une autre équivalente par une transformation linéaire.**
>
> **• Il est rare que la sortie du système soit directement reliée à son entrée. On a donc très souvent D = 0.**

On adopte fréquemment le schéma-bloc donné par la Figure 1 pour illustrer cette représentation.

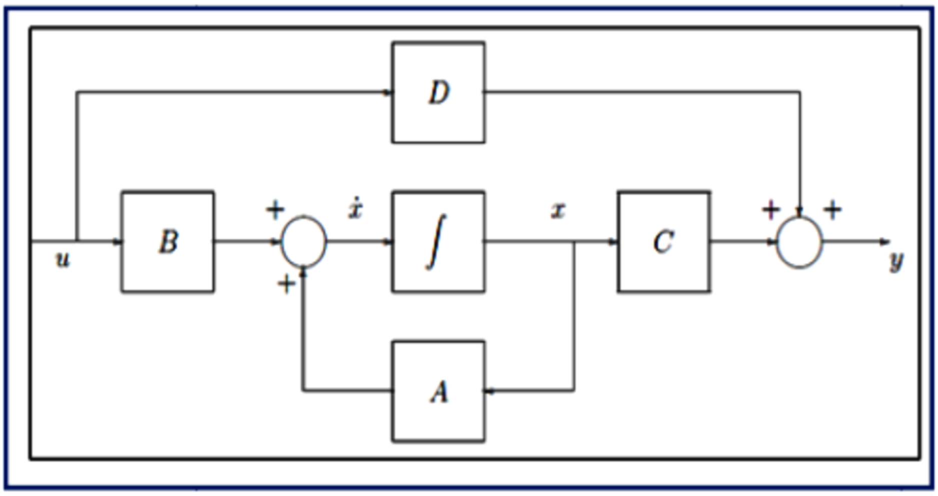

Figure 1: Schéma-bloc d'une représentation d'état

Exemple:

Considérons le système RLC de la figure 2

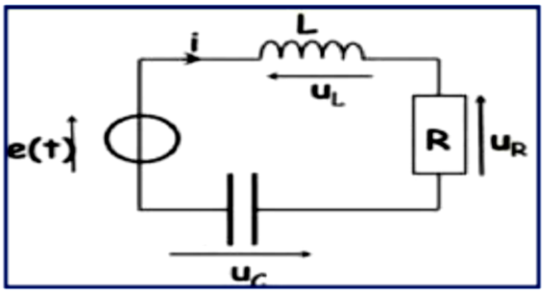

Figure 2: Circuit RLC

Ce système est décrit par l'équation différentielle suivante:

$$\boldsymbol{e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + u_c(t)}$$

$$\mathrm{u_c(t)} = \frac{1}{\mathrm{C}}\int \mathrm{i(t)dt}$$

En choisissant $\mathrm{u_c(t)}$ et $\mathrm{i(t)}$ comme variable d'état avec les conditions initiales (à t=0), $\mathrm{u_c(0)} = 0$ et $\mathrm{i(0)} = 0$ et comme entrée la tension d'alimentation e(t) et pour la sortie la tension aux bornes du condensateur $\mathrm{u(t)}$. On pose:

$$x_1(t) = i(t), \qquad x_2(t) = i(t)$$
$$u(t) = e(t) \qquad y(t) = u_c(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{L}x_2(t) - \frac{1}{L}u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}x_1(t)$$

$$y(t) = x_2(t)$$

La représentation d'état correspondante à ce système est comme suit:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

4. LA REPRESENTATION PAR VECTEUR D'ETAT (MODELE D'ETAT)

Dans ce paragraphe, nous étudions la représentation par vecteur d'état des systèmes linéaires à temps continu.

La représentation d'un système dynamique à temps continu peut être obtenue soit à partir de sa représentation par équations différentielles soit à partir de sa représentation par fonction de transfert.

Dans le traitement moderne de la théorie de la commande, différentes formes pour le modèle d'état sont considérées :

- La forme canonique commandable.
- La forme canonique observable.
- La forme canonique modale (diagonale)
- La forme canonique de Jordan.

Obtenir la fonction de transfert à partir de l'équation différentielle ne devrait pas poser de problème étant donné que cette question a été traitée au cours du chapitre 2(semestre 1). Par contre, on n'a pas encore vu comment obtenir le modèle d'état à partir de la fonction de transfert.

4.1. Passage d'une équation différentielle vers un modelé d'état

Considérons le modèle général d'un système linéaire invariant représenté par une équation différentielle d'ordre n

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \qquad (3)$$

Afin d'obtenir une procédure systématique permettant de transformer une équation différentielle d'ordre n en un modèle d'état, nous allons d'abord nous intéresser à une version simplifiée de (3) où les dérivées de l'entrée u n'interviennent pas :

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t) \tag{4}$$

Introduisons maintenant le changement de variables suivant

$$\begin{gathered} x_1 = y, \\ x_2 = \dot{y} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n = \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} \end{gathered} \tag{5}$$

Ainsi

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = \frac{d^n y}{dt^n} \end{gathered} \tag{6}$$

De (4), on tire

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = -a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} - \cdots - a_1\frac{dy(t)}{dt} - a_0 y(t) + u(t) \tag{7}$$

Soit en utilisant le changement de variable (5)

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = -a_{n-1}x_n - \cdots - a_0 x_1 + u \tag{8}$$

En remplacement dans (6)

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n == -a_{n-1}x_n - \cdots - a_0 x_1 + u \end{gathered} \tag{9}$$

Soit sous forme vectorielle

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{B} u, \tag{10}$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{11}$$

qui représente le représentation d'état de (4). Cette représentation d'état est connue sous le nom de forme canonique de commandabilité.

4.2. Passage de la fonction de transfert vers un modèle d'état (La représentation par vecteur d'état)

Pour simplifier les calculs, nous ne considérerons que le cas mono-entrée, mono-sortie. Considérons donc la fonction de transfert d'un système mono-entrée, mono-sortie.

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0} \qquad m < n \qquad **$$

Pour obtenir le modèle d'état associé à cette représentation d'état dans le cas ou m<n, on procède comme suit:

- ❖ Pour ce système, nous introduisons une variable auxiliaire (état partiel) W (p) tel que G(p) se décompose de la façon suivante :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} * \frac{W(p)}{U(p)}$$

Ou

$$\frac{W(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0}$$
$$\frac{Y(p)}{W(p)} = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_0 \tag{12}$$

- ❖ Obtenir le modèle d'état à partir de cette forme

Pour la fonction de transfert $\frac{W(p)}{U(p)}$, on peut écrire l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^n\omega(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}\omega(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{d\omega(t)}{dt}+a_0\omega(t)=u(t) \qquad (13)$$

En posant

$$x_1(t)=\omega(t),$$
$$x_2(t)=\frac{d}{dt}\omega(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n(t)=\frac{d^{(n-1)}\omega(t)}{dt^{(n-1)}}$$

On obtient l'équation d'état recherchée dont la forme est:

$$\left\{\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}u(t)\right. \qquad (14)$$

Pour l'autre fonction de transfert, on écrit

$$y(t)=b_m\frac{d^m\omega(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}\omega(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_0\omega(t)$$

Compte tenu des équations précédentes, l'équation de sortie est:

$$y=\begin{pmatrix}b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \qquad (15)$$

Les équations **(14)** et **(15)** constituent le modèle d'état recherché

Comme nous l'avons déjà mentionné, la représentation d'état d'un système n'est pas unique. Dans les lignes qui suivent, nous présentons plusieurs types de représentation d'état que l'on peut obtenir à partir d'une fonction de transfert $G(p)$. Le choix de la représentation peut dépendre de la forme disponible de la fonction de transfert ou du type d'étude que l'on souhaite réaliser à partir du modèle. Rappelons encore que la représentation d'état d'un système n'est pas unique et que les propriétés du système ne sont en aucun cas liées à la forme choisie.

4.2.1. Forme canonique commandable

La représentation suivante est appelée forme canonique commandable et donnée par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = A_c * x(t) + B_c * u(t) \\ y(t) = C_c * x(t) \end{cases} \qquad (16)$$

Ou

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_{-2} & -a_1 \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [b_0, \quad b_1, . . . \ b_m]$$

La procédure pour obtenir cette forme à partir d'une fonction de transfert a été présentée précédemment.

Le diagramme fonctionnel est donné à la figure 3

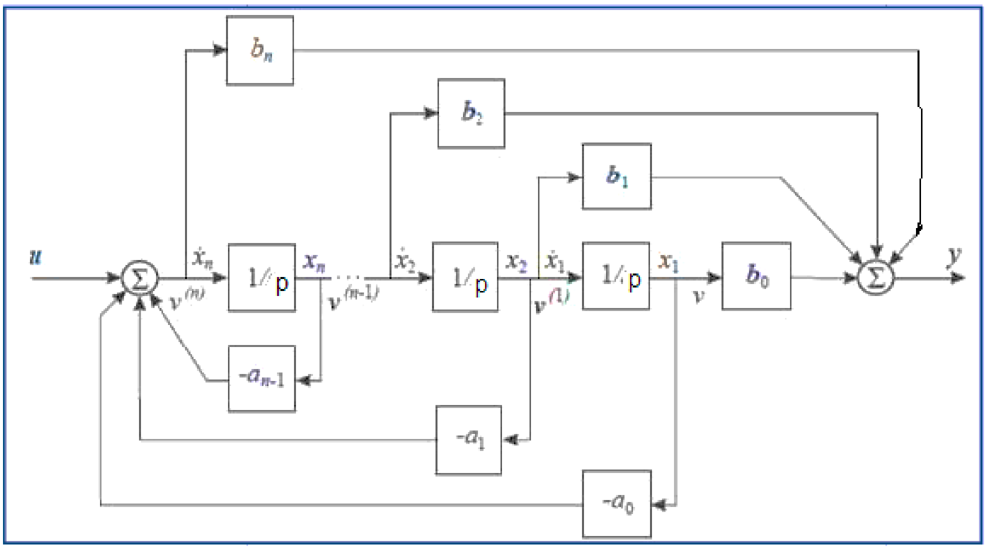

Figure 3: Schéma de simulation de la forme commandable

4.2.2.1. Différentes représentations d'état de la forme canonique commandable

A. Fonction de transfert sans zéro

Supposant que le système considéré est décrit par la fonction de transfert suivante:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

On cherche à déterminer la représentation d'état. Pour cela, à partir de la fonction de transfert, on obtient l'équation différentielle associée, donnée par la relation suivante:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} \Longrightarrow (p+1)(p+2)(p+3)Y(p) = U(p)$$

$$p^3Y(p) + 6p^2Y(p) + 11pY(p) + 6Y(p) = U(p)$$

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t))}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = u(t)$$

En posant $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \frac{d}{dt}y(t)$, $x_3(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t)$, en dérivant ces équations par rapport au temps et en tenant compte des équations différentielles précédentes, on écrit:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{d}{dt}y(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{d^3y(t)}{dt^3} = -6\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 11\frac{dy(t)}{dt} - 6y(t) + u(t)$$

$$= -6x_1(t) - 11x_2(t) - 6x_3(t) + u(t)$$

En écrivant ces équations sous forme matricielle, on obtient le modèle d'état suivant:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0]x(t)$$

B. Fonction de transfert zéro

On suppose que le système dynamique admet des zéros dans sa fonction de transfert, laquelle est donnée par l'expression suivante:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{(p+4)(p+6)}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

Pour ce système, on cherche à déterminer une représentation d'état possible. Pour cela, on écrit la fonction de transfert sous la forme suivante:

$$\frac{W(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

$$\frac{Y(p)}{W(p)} = (p+4)(p+6)$$

On écrit l'équation différentielle correspondante, donnée par la relation suivante:

$$\frac{d^4\omega(t)}{dt^4} + 6\frac{d^3\omega(t)}{dt^3} + 11\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + 6\frac{d\omega(t)}{dt} = u(t)$$

En posant $x_1(t) = \omega(t)$, $x_2(t) = \frac{d}{dt}\omega(t)$, $x_3(t) = \frac{d^2}{dt^2}\omega(t)$, $x_4(t) = \frac{d^4}{dt^4}\omega(t)$ en dérivant ces équations par rapport au temps et en tenant compte des équations différentielles précédentes, on écrit:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{d}{dt}\omega(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \frac{d^2}{dt^2}\omega(t) = x_3(t)$$
$$\dot{x}_3(t) = \frac{d^3}{dt^3}\omega(t) = x_4(t)$$
$$\dot{x}_4(t) = \frac{d^4\omega(t)}{dt^4} = -6\frac{d^3\omega(t)}{dt^3} - 11\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} - 6\frac{d\omega(t)}{dt} + u(t)$$

$$= -6x_2(t) - 11x_3(t) - 6x_4(t) + u(t)$$

En écrivant ces équations sous forme matricielle, on obtient le modèle d'état suivant:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Pour obtenir l'équation de sortie, on doit utiliser l'autre fonction de transfert; c'est à dire $Y(p)/W(p)$ pour cela on écrit l'équation différentielle correspondante

$$\frac{Y(p)}{W(p)} = (p+4)(p+6)$$

$$y(t) = \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + 10\frac{d\omega(t)}{dt} + 24\omega(t)$$

Compte tenu des relations précédentes, cette équation peut s'écrire:

$$y(t) = 24x_1(t) + 10x_2(t) + x_3(t)$$

$$y(t) = [24 \quad 10 \quad 1 \quad 0]x(t)$$

C. Fonction de transfert dont le degré du numérateur est égale à celui du dénominateur

La fonction de transfert d'un tel système est la suivante:

$$\boldsymbol{G}(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{3p^3 + 2p^2 + 5p + 2}{p^3 + 2p^2 + p + 1}$$

Après division polynomiale, on obtient:

$$\boldsymbol{G}(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = 3 + \frac{-4p^2 + 2p - 1}{p^3 + 2p^2 + p + 1}$$

La grandeur de sortie $Y(p)$ est telle que:

$$Y(p) = 3U(p) + \frac{-4p^2 + 2p - 1}{p^3 + 2p^2 + p + 1}U(p)$$

Posons:

$$H(p) = 3 + \frac{-4p^2 + 2p - 1}{p^3 + 2p^2 + p + 1}U(p)$$

En introduisant une fonction intermédiaire $W(p)$, on peut écrire:

$$\frac{H(p)}{U(p)} = \frac{H(p)}{W(p)} * \frac{W(p)}{U(p)}$$

on écrit la fonction de transfert sous la forme suivante:

$$\frac{H(p)}{W(p)} = -4p^2 + 2p - 1$$

$$\frac{W(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + p + 1}$$

En posant $x_1(t) = \omega(t)$, $x_2(t) = \frac{d}{dt}\omega(t)$, $x_3(t) = \frac{d^2}{dt^2}\omega(t)$, on a après dérivation de ces relations, le modèle d'état suivant:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -x_2(t) - 2x_3(t) - x_1(t) + u(t)$$

$$h(t) = 2x_2(t) - 4x_3(t) - x_1(t)$$

Comme :

$$y(t) = h(t) + 3u(t)$$

La représentation d'état du système est

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} x(t)$$

4.2.3. Forme canonique observable

La forme canonique observable (par rapport à la première colonne) du système représenté par la fonction de transfert de la relation (**) est donnée par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = A_o * x(t) + B_o * u(t) \\ y(t) = C_o * x(t) \end{cases} \qquad (17)$$

Ou

$$A_0 = \begin{bmatrix} -a_n & 1 & \ldots.. & . & . & 0 & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & 1 & . & . & \ldots & 0 \\ . & . & .. & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \\ -a_1 & 0 & 0 & \ldots. & . & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_0 = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$C_o = [1, 0, .\ .\ .\ 0]$$

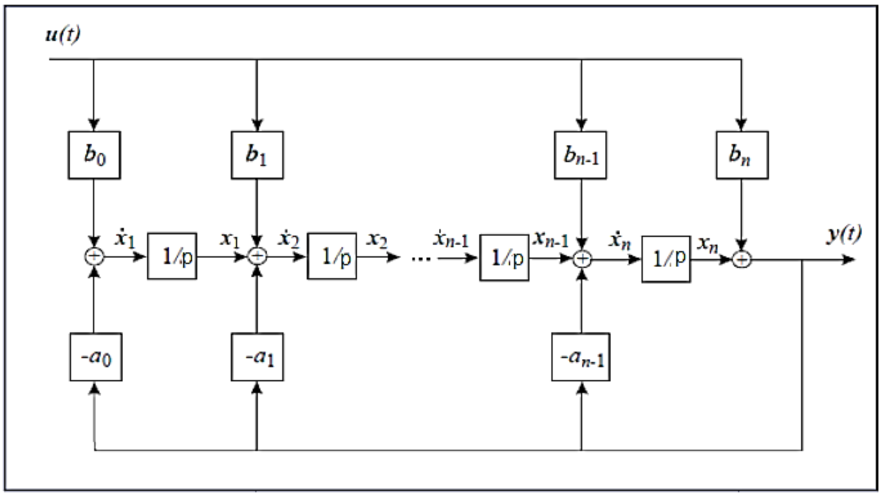

Figure4: Schéma de simulation de la forme observable

Exemple

Pour montrer comment obtenir la forme canonique observable, considérons le système dont la fonction de transfert est:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p^2 + 7p + 12}{p^3 + 3p^2 + 2p}$$

De cette fonction de transfert, nous obtenons la relation suivante

$$p^3Y(p) + 3p^2Y(p) + 2pY(p) = p^2U(p) + 7pU(p) + 12U(p)$$

Que nous pouvons réécrire sous la forme suivante:

$$Y(p) = \frac{1}{p}\left[-3Y(p) + U(p) + \frac{1}{p}\left[[-2Y(p) + 7U(p)] + \frac{1}{p}[12U(p)]\right]\right]$$

$$X_3(p) = \frac{1}{p}[12U(p)] \Longrightarrow \qquad pX_3(p) = 12U(p) \qquad \Longrightarrow \dot{x}_3(t) = 12u(t)$$

$$X_2(p) = \frac{1}{p}[[-2Y(p) + 7U(p)] + X_3(p)] \quad \Longrightarrow pX_2(p) = [-2Y(p) + 7U(p)] + X_3(p)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2y(t) + 7u(t) + x_3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + 7u(t) + x_3(t)$$

$$X_1(p) = \frac{1}{p}[-3Y(p) + U(p) + X_2(p)] \Longrightarrow pX_1(p) = -3Y(p) + U(p) + X_2(p)$$

$$\dot{x}_1(t) = -3y(t) + u(t) + x_2(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + u(t) + x_2(t)$$

$$Y(p) = X_1(p) \Longrightarrow \qquad y(t) = x_1(t)$$

La représentation d'état du système est

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0]x(t)$$

4.2.4. Forme canonique diagonale (Forme du Jordan dans le cas de pôles simples)

Ce type de représentation, encore appelée représentation parallèle, convient particulièrement bien à la représentation d’un système dont la fonction de transfert est placée sous la forme d’une somme.

Le système considéré admet n pôles distincts ($-p_i$, i=1,2,3,….,n). Soit *G*(*p*) sa fonction de transfert

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{k_1}{p + p_1} + \frac{k_2}{p + p_2} + \cdots + \frac{k_n}{p + p_n}$$

En posant:

$$X_i(p) = \frac{k_i}{p + p_i} U(p), \quad i = 1,2, \dots, n$$

On obtient la relation suivante dans le domaine du temps:

$$\dot{x}_i(t) = -p_i x_i(t) + k_i u(t) \qquad (18)$$

Compte tenu de ces relations et de la décomposition en éléments simples, nous pouvons établir facilement le modèle d'état suivant:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Chaque état x_i est indépendant des autres

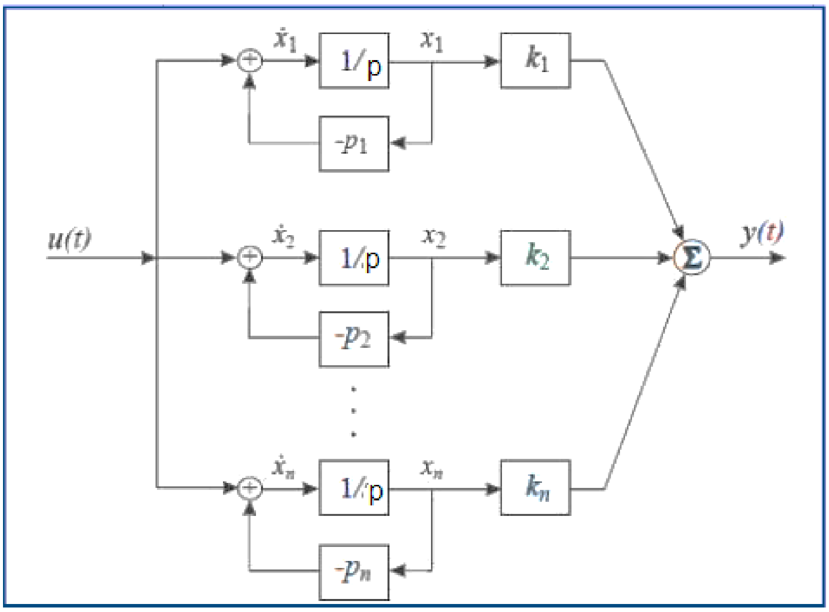

Figure 5: Schéma de simulation de la forme

Exemple:

Pour montrer comment obtenir la forme diagonale (forme de Jordan dans le cas de pôles simples), nous allons considérer le même système que lui des exemples précédents, c'est-à-dire le système dont la fonction de transfert est:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p^2 + 7p + 12}{p^3 + 3p^2 + 2p}$$

Les pôles de ce système sont: $p = 0,\ p = -1,\ p = -2$

La décomposition en éléments simples donne:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{6}{p} + \frac{-6}{p+1} + \frac{1}{p+2}$$

En posant:

$$X_1 = \frac{6}{p}U(p)$$
$$X_2 = \frac{-6}{p+1}U(p)$$
$$X_3 = \frac{1}{p+2}U(p)$$

Compte tenu de ces équations et de l'équation de G(p) décomposée en éléments simples, on obtient le modèle d'état suivant:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

4.2.5. Forme de Jordan dans le cas de racines multiples

Pour montrer comment obtenir la forme canonique de Jordan dans le cas de pôles multiples, considérons le système dynamique dont la fonction de transfert est la suivante:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{(p+3)(p+4)}{p(p+1)^2(p+2)}$$

Ce système possède 4 pôles qui sont: $p = 0,\ p = -1\ (double),\ p = -2$

La décomposition en éléments simples de cette fonction de transfert donne:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{6}{p} + \frac{-6}{(p+1)^2} + \frac{-5}{p+1} + \frac{-1}{p+2}$$

En posant:

$$X_1(p) = \frac{1}{p}U(p)$$
$$X_2(p) = \frac{1}{(p+1)^2}U(p) = \frac{1}{p+1}X_3(p)$$
$$X_3(p) = \frac{1}{p+1}U(p)$$
$$X_4(p) = \frac{1}{p+2}U(p)$$
$$Y(p) = 6X_1(p) - 6X_2(p) - 5X_3(p) - X_4(p)$$

Compte tenu de ces équations et de l'équation de G(p) décomposée en éléments simples, on obtient le modèle d'état suivant:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [6 \quad -6 \quad -5 \quad -1]x(t)$$

5. FONCTION DE TRANSFERT (Passage de l'espace d'état vers la fonction de transfert)

Comment nous pouvons établir la fonction de transfert d'un système dynamique à partir de sa représentation d'état. Pour cela, supposons que le système dynamique est modélisé par le modèle d'état suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A * x(t) + B * u(t) \\ y(t) = C * x(t) + Du(t) \end{cases}$$
$$x(0^+) = x(0)$$

En appliquant la transformée de Laplace, il vient que

$$\begin{aligned} & pX(p) - x(0^+) = AX(p) + BU(p) \\ & \qquad \Rightarrow X(p) = (pI_n - A)^{-1}x(0) + (pI_n - A)^{-1}BU(p), \\ & Y(p) = CX(p) + DU(p) \\ & \qquad \Rightarrow Y(p) = C(pI_n - A)^{-1}x(0) + \left[C(pI_n - A)^{-1}B + D\right]U(p). \end{aligned} \tag{19}$$

Pour des conditions initiales nulles (hypothèse de base pour le calcul des fonctions de transfert), nous obtenons

$$Y(p) = \left[C(pI_n - A)^{-1}B + D\right]U(p). \tag{20}$$

En posant

$$H(p) = C(pI_n - A)^{-1}B + D = \frac{C\,\mathrm{Adj}(pI_n - A)B}{\det(pI_n - A)} + D,$$

(21)

Il vient que

$$Y(p) = H(p) * U(p) \tag{22}$$

Exemple:

Soit un système donne par sa représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$pI - A = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p-3 & -1 \\ 0 & p+2 \end{bmatrix}$$

$$(pI - A)^{-1} = \frac{adj(pI - A)}{det(pI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} p+2 & 1 \\ 0 & p-3 \end{bmatrix}}{(p+2)\,(p-3)}$$

$$[\boldsymbol{C}(pI - A)^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} p+2 & 1 \\ 0 & p-3 \end{bmatrix}}{(p+2)\,(p-3)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0$$

$$\frac{\begin{bmatrix} p+2 & p-2 \end{bmatrix}}{(p+2)\;(p-3)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{p-2}{p^2 - p - 6} = H(p)$$