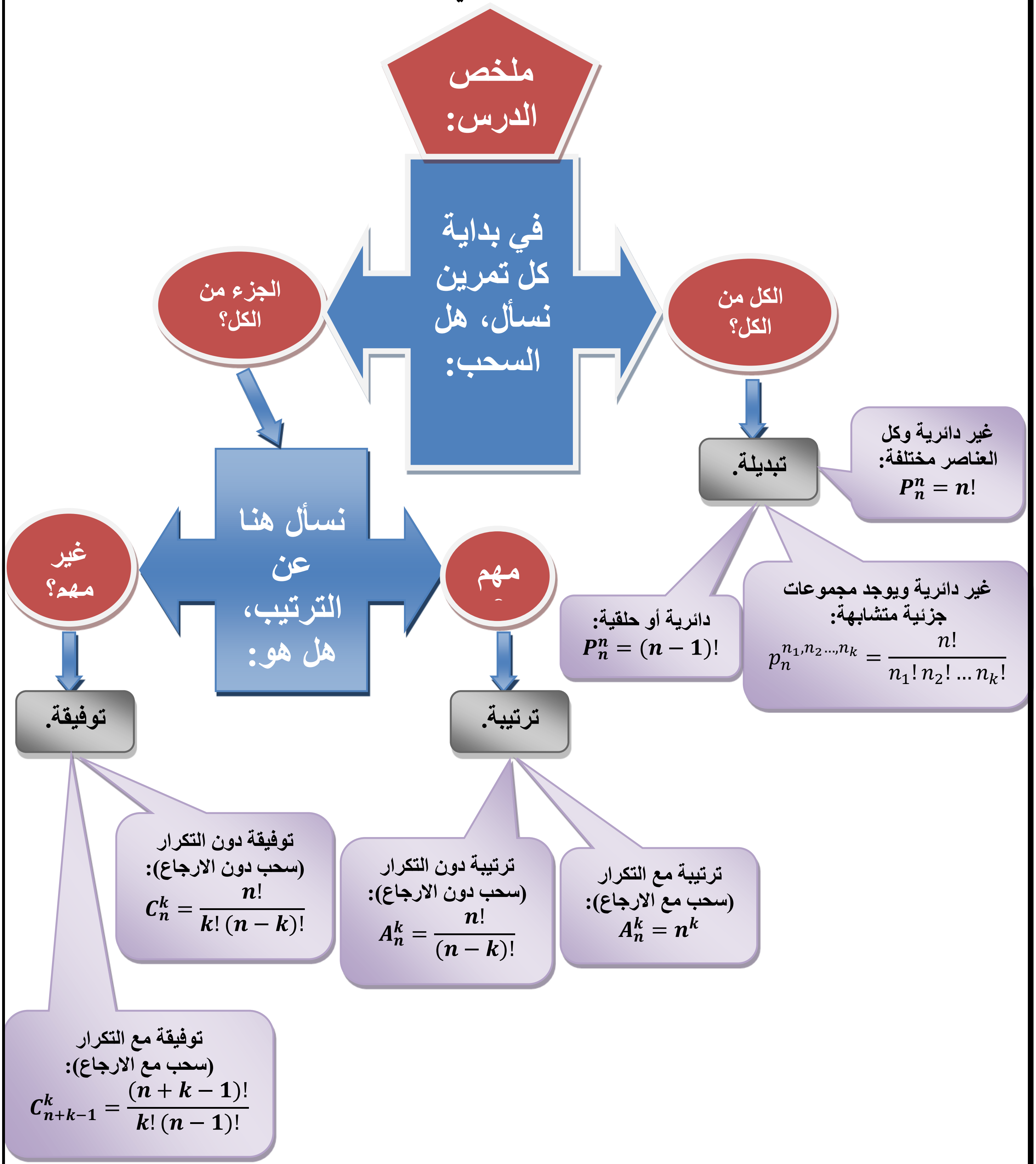
جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسيير

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية LMD-SEGC
السنة الأولى

حلول سلسلة التمارين رقم 01 في الإحصاء الرياضي.

التحليل التوفيقي.



التمرين الأول:

يتكون فوج من ستة طلبة تم استدعاؤهم لحضور اجتماع.

المطلوب:

1. **بكم طريقة يمكنهم الجلوس في صف به ست مقاعد؟**

الجواب: نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الكل من الكل.
- ✓ الترتيب مهم.
- ✓ لا عناصر مكررة.
- ✓ لا عناصر مستنسخة أو متشابهة.

إذن نطبق قانون التبديلة غير الدائرية:

$$P_n^n = n! = 6! = \mathbf{720}$$

إذن يمكنهم الجلوس في صف واحد وفق 720 طريقة.

2. **بكم طريقة يمكنهم الجلوس حول طاولة مستديرة؟**

الجواب: نلاحظ أننا أمام الشروط السابقة ذاتها باستثناء أن الطاولة مستديرة، إذن نطبق قانون التبديلة الدائرية:

$$P_n^n = (n-1)! = P_6^6 = 5! = \mathbf{120}$$

إذن يمكنهم الجلوس في شكل دائري وفق 120 طريقة.

3. **لنفرض أنه طُلب إليهم تكوين لجنة مشكلة من رئيس، مقرِّر وأمين عام، فبكم طريقة يمكنهم تكوين هذه اللجنة؟**

الجواب : نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الجزء من الكل.
- ✓ الترتيب مهم.
- ✓ لا يسمح بالتكرار.

إذن نستخدم الترتيبة بدون تكرار.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{(6-3)!} = \mathbf{120}$$

التمرين الثاني:

أراد شخص إنشاء كلمة سر لبريده الإلكتروني، ما هو عدد الكلمات الممكن إنشاؤها والمكونة من:

1. ثلاثة أرقام، مع إمكانية التكرار؟

الجواب: نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الجزء من الكل. (الجزء 3 أرقام ، الكل 10 أرقام: 0، 1، 2، ...، 9)
- ✓ الترتيب مهم.

✓ يسمح بالتكرار. (كأن السحب من الصندوق بالإرجاع)

إذن نستخدم الترتيبة مع تكرار.

$$A_n^k = n^k = A_{10}^3 = 10^3 = \mathbf{1000}$$

2. أربعة أرقام، مع إمكانية التكرار؟

الجواب: نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

✓ الجزء من الكل. (الجزء 4 أرقام ، الكل 10 أرقام: 0، 1، 2، ...، 9)

✓ الترتيب مهم.

✓ يسمح بالتكرار. (كأن السحب من الصندوق بالإرجاع)

إذن نستخدم الترتيبة مع تكرار.

$$A_n^k = n^k = A_{10}^4 = 10^4 = \mathbf{10000}$$

3. خمسة أرقام بدون تكرار؟

الجواب: نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

✓ الجزء من الكل. (الجزء 5 أرقام ، الكل 10 أرقام: 0، 1، 2، ...، 9)

✓ الترتيب مهم.

✓ لا يسمح بالتكرار. (كأن السحب من الصندوق دون إرجاع)

إذن نستخدم الترتيبة دون تكرار.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = A_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!} = \mathbf{30240}$$

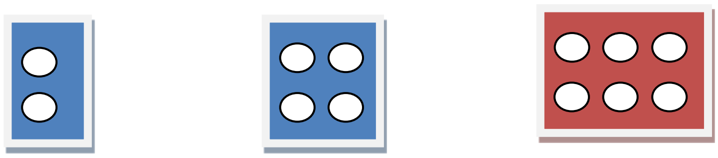
التمرين الثالث:

قررت إحدى الشركات بعث 12 شخصا لحضور اجتماع تنسيقي جهوي، فوضعت تحت تصرفهم ثلاث سيارات؛ إحداها بسِتِّ مقاعد، والأخرى بأربع مقاعد، والثالثة بمقعدين.

المطلوب: بكم طريقة يمكن أن يركب هؤلاء بفرض أن:

1. **أيَّ شخص منهم يمكنه القيادة (الجميع يحمل رخصة سياقة)؟**

الجواب:



في هذه الحالة أول ما نلاحظه هو وجود 12 شخصا و12 مقعدا، وعليه سنستخدم التبديلات، غير أن هؤلاء الأشخاص لن يتوجهوا الى سيارة واحدة بل الى ثلاث سيارات وهنا اذا اختار شخص ما السيارة الأولى مثلا سيجد أمامه 6 مقاعد، يمكنه الجلوس في أي منها (أي حالات متشابهة).

لكنه اذا اختار السيارة الثانية فهذه طريقة جديدة للركوب، وسيكون أمامه 4 مقاعد يمكنه الجلوس في أي منها (أي حالات متشابهة). ونفس الشيء للسيارة الأخيرة أين يمثل مقعداها حالتين متشابهتين.

اذن نحن أمام الشروط الآتية:

- ✓ الكل من الكل. (12 عاملا للجلوس في 12 مقعدا)
- ✓ الترتيب مهم.
- ✓ توجد مجموعات جزئية متشابهة أو عناصر متشابهة. (حالة تغيير المقعد داخل نفس السيارة لا تنتج جديدا).

إذن نطبق قانون التبديلة غير الدائرية مع وجود مجموعات متشابهة. (المجموعات هي 6 و 4 و 2)

$$p_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$$

تطبيق عددي:

$$p_{12}{}^{6,4,2}=\frac{12!}{6!\,4!\,2!}=\mathbf{13860}\text{طريقة}$$

2. أربعة أشخاص فقط لديهم رخصة سياقة؟

في هذه الحالة علينا أولا البحث على عدد طرق اختيار 3 سائقين (لدينا 3سيارات) من بين الأربعة الذين لديهم رخصة السياقة، اذن هناك سحب واذا غيرنا اماكن السائقين سنحصل على نتائج جديدة (مثلا السائق a مع السيارة1 والسائق b مع السيارة 2 والسائق c مع السيارة 3.. هذه ليست نفس التوليفة اذا اخذ السائق a السيارة 3 والسائق b السيارة 1 والسائق c السيارة 2) ، وعليه الترتيب مهم... كما لا يمكن لسائق واحد قيادة سيارتين في آن واحد أي لا يوجد تكرار.

اذن نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية

- ✓ الجزء من الكل. (الجزء 3 عمال ، الكل 4 عمال ممن يحسنون القيادة)
- ✓ الترتيب مهم.
- ✓ لا يسمح بالتكرار. (كأن السحب من الصندوق دون إرجاع)

إذن نستخدم الترتيبة دون تكرار لتحديد عدد طرق ركوب السائقين.

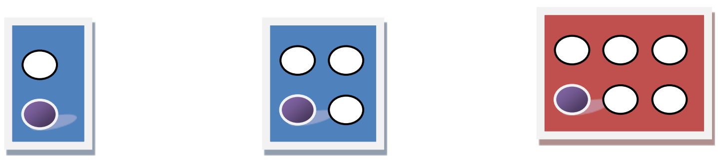
$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$$

تطبيق عددي:

$$A_4{}^3=\frac{4!}{(4-3)!}=\mathbf{24}\text{طريقة}$$

وعليه لدينا 24 طريقة لتوجيه السائقين.

واذا اخترنا واحدة من هذه الطرق يبقى عندنا 9 ركاب وثلاث سيارات بها 9 مقاعد شاغرة 5 في الاولى و3 في الثانية و1 في الأخيرة (نرجع لتحليل السؤال الأول الشيء الذي يختلف هو نقص مقعد من كل سيارة)



اذا يمكن توجيه بقية الركاب بـ:

$$p_9^{5'3'1} = \frac{9!}{5!\,3!\,1!} = \textbf{504} \text{طريقة}$$

اذا لدينا 24 طريقة لتوجيه السائقين وكل طريقة تقابلها 504 طريقة لتوجيه بقية الركاب، ومن ثم نرجع الى شجرة الامكانيات فنجد عدد الطرق الاجمالي لتوجيه جميع الركاب بما فيهم السائقين هو:

$$A_4{}^3 \times p_9^{5'3'1} = 24 \times 504 = \textbf{12096} \text{طريقة}$$

التمرين الرابع:

يُراد تكوين لجنة طلابية ذات 5 طلاب من بين 10 طلبة في مستوى السنة الثالثة، و 15 طالبا في مستوى السنة الثانية.

المطلوب: أحسب عدد الحالات الملائمة لاحتواء اللجنة على طالبين من مستوى السنة الثالثة، وثلاثة طلاب من مستوى السنة الثانية.

الجواب: حساب عدد الحالات الملائمة لاحتواء اللجنة على طالبين من مستوى السنة الثالثة وثلاث طلبة من مستوى السنة الثانية:

هناك اختيار **عشوائي** (سحب) لـ 2 طلبة من بين 10 طلبة يدرسون سنة ثالثة (اذا اخترنا الطالب a ثم الطالب b أو اذا اخترنا الطالب b أولا ثم الطالب a فإن النتيجة نفسها – المهم أن الاختيار وقع على الطالب a و الطالب b أي هما عضوين في اللجنة ولا يهم من اختير أولا) الترتيب غير مهم، ولا يمكن اختيار طالب واحد أكثر من مرة في نفس اللجنة (لا يوجد تكرار) وعليه نطبق قانون التوفيقة دون تكرار وهو أكثر قوانين التحليل التوفيقي استخداما لأن أغلب التجارب العشوائية يكون فيها سحب عشوائي، ونفس الشيء بالنسبة للاختيار العشوائي لـ 3 طلبة من بين 15 :

اذن نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الجزء من الكل.
- ✓ الترتيب غير مهم.
- ✓ لا يسمح بالتكرار.

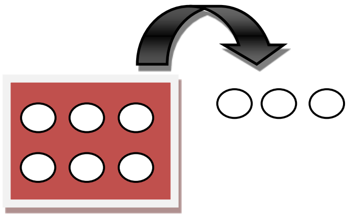
$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

تطبيق عددي: $C_{10}{}^2 \times C_{15}{}^3 = \textbf{20475}$ حالة ملائمة

التمرين الخامس:

أحسب عدد المجموعات المكونة من ثلاثة طلبة، والتي يمكن سحبها – مع الإرجاع – من فوج يحوي ستة طلبة.

الجواب: هناك سحب عشوائي لجزء من الكل "مع امكانية الارجاع" والترتيب غير مهم (3طلبة ولا يهم أي واحد اختير اولا).



اذن نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الجزء من الكل.
- ✓ الترتيب غير مهم.
- ✓ يسمح بالتكرار.

اذا نستخدم التوفيقة مع التكرار (وهي حالات نادرة):

$$C_{n+k-1}^{k}=\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

تطبيق عددي:

$$C_{6+3-1}^{3}=\frac{(6+3-1)!}{3!\,(6-1)!}=56\text{مجموعة}$$

التمرين السادس:

قرر صاحب مصنع ترقية خمسة عمال، فتم ترشيح عشرين عاملا، منهم اثنا عشر رجلا وثمانية نساء، بشرط أن يترقى رجلان وامرأتان على الأقل.

المطلوب: بكم طريقة يمكن اختيار العمال الخمسة في كل من الحالات الآتية:

1. **كل المرشحين يمكن اختيارهم؟**

لدينا 20 عاملا (12 رجل و8 نساء) استحقوا الترقية، وسنختار (نسحب) هنا خمس عمال بصفة عشوائية بشرط أن يكون هناك رجلان وامرأتان على الأقل في المجموعة المختارة، فلكي نضمن تحقق هذا الشرط هناك حالتان:

الحالة الأولى: نختار 2 رجال عشوائيا من بين 12 رجل **و** 3 نساء عشوائيا من بين 8 نساء ... **أو**... الحالة الثانية: نختار عشوائيا 3 رجال من بين 12 رجل **و** 2 نساء عشوائيا من ضمن 8 نساء.

اذن نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الجزء من الكل. (3 رجال من 12 و 2 نساء من 8 ... أو ... 2 رجال من 12 و 3 نساء من 8)
- ✓ الترتيب غير مهم. (لأنه لا يهم من أُختير أولا سواء العامل a أو العامل b ففي النهاية سيرقون الى نفس الرتبة).
- ✓ لا يسمح بالتكرار. (لأنه لا يمكن أن يرقى عامل واحد الى نفس الرتبة مرتين).

اذن نطبق التوفيقة دون تكرار مع اعتبار الحرف(**و**) **عملية ضرب** و الحرف (**أو**) **عملية جمع**.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$${C_{12}}^2 \times {C_8}^3 + C_{12}^3 \times C_8^2 = \textbf{9856}\text{طريقة}$$

2. استبعاد رجلين تم الطعن في استحقاقهما للترقية:

يبقى التحليل السابق نفسه قائما... فقط يصبح لدينا 10 رجال بدلا عن 12 رجل.

فإما أن نختار 2 رجال عشوائيا من بين 10 رجال **و** 3 نساء عشوائيا من بين 8 نساء **أو** أن نختار عشوائيا 3 رجال من بين 10 رجال **و** 2 نساء عشوائيا من ضمن 8 نساء.

$${\mathrm{C}_{10}}^2 \times {\mathrm{C}_8}^3 + {\mathrm{C}_{10}}^3 \times {\mathrm{C}_8}^2 = \textbf{5880}\text{طريقة}$$

3. رجل وامرأة من المترشحين تم تحويلهما الى فرع آخر:

يبقى التحليل السابق ذاته معمولا به... فقط يصبح لدينا 11 رجال بدلا عن 12 رجل، و7 نساء بدلا عن 8.

فإما أن نختار 2 رجال عشوائيا من بين 11 رجلا **و** 3 نساء عشوائيا من بين 7 نساء **أو** نختار عشوائيا 3 رجال من بين 11 رجلا **و** 2 نساء عشوائيا من ضمن 7 نساء.

$${C_{11}}^2 \times {C_7}^3 + {C_{11}}^3 \times {C_7}^2 = \textbf{5390}\text{طريقة}$$

حلول التمارين المقترحة للحل.

التمرين الأول المقترح:

يتنافس طلبة أحد الأفواج على المراتب الثلاث الأولى في مادة الإحصاء. بفرض أن الفوج مكونٌ من تسعة طلاب وأن معدلاتهم مختلفة، ما هو عدد الحالات المكنة ليحقق طلبة الفوج ذلك؟

الجواب:

نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الجزء من الكل. (الجزء 3 طلبة ، الكل 9 طلبة)
- ✓ الترتيب مهم. (فالأول قطعا افضل من الثاني)
- ✓ لا يسمح بالتكرار. (كأن السحب من الصندوق دون إرجاع، إذ لا يمكن للطالب أن يشغل مرتبتين).

إذن نستخدم الترتيبة دون تكرار.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

تطبيق عددي:

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \textbf{504}\ \text{طريقة}.$$

التمرين الثاني المقترح:

يتألف المجلس العلمي للكلية من 15 عضوا، ولكي يجتمع هذا المجلس لابد من حضور النصاب القانوني والبالغ 10 أعضاء.

المطلوب:

1. **بكم طريقة يمكن تأمين النصاب القانوني بالضبط؟**

الجواب:

أي بكم طريقة يمكن ان يحضر 10 أعضاء من أصل 15 عضوا؟

اذن نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الجزء من الكل. (10 من 15)
- ✓ الترتيب غير مهم.
- ✓ لا يسمح بالتكرار.

اذن نطبق قانون التوفيقة دون تكرار.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_{15}^{10} = \frac{15!}{10!\,(15-10)!} = \mathbf{3003}\ \text{طريقة}$$

2. بكم طريقة يمكن تأمين النصاب القانوني على الأقل؟

أي بكم طريقة يمكن ان يحضر 10 أعضاء على الأقل من أصل 15؟

يتم ذلك بحضور 10 أو 11 أو 12 أو 13 أو 14 أو 15 عضوا. أي:

$$C_{15}^{10} + C_{15}^{11} + C_{15}^{12} + C_{15}^{13} + C_{15}^{14} + C_{15}^{15} = \mathbf{4944}\ \text{طريقة}$$

أسرة المقياس