Nom de l'etudiant :

Groupe :

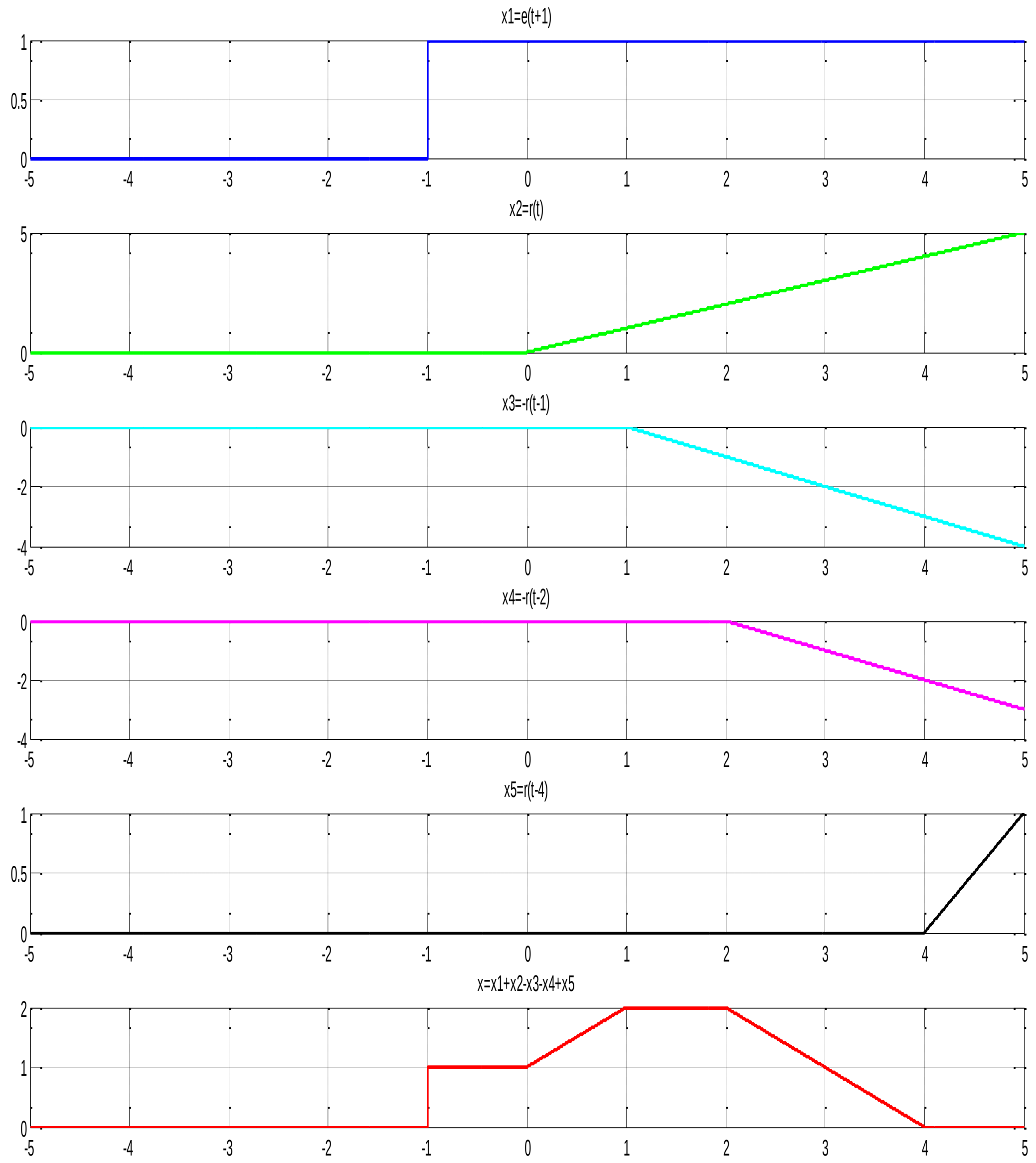
Note :

Devoir

Exercice 1

Tracer graphiquement le signal suivant :

$$x(t) = e(t+1) + r(t) - r(t-1) - r(t-2) + r(t-4)$$



Exercice 2

Déterminer si le signal suivant est périodique ou non périodique, dans le cas périodique calculer la période fondamentale du signal.

$$x(t) = \left(\cos\left(5t + \frac{2\pi}{5}\right)\right)^2$$

…on a la relation trigonométrique : $cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

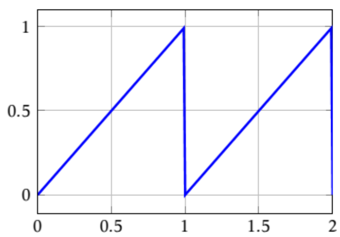
$$x(t) = \left(\cos\left(5t + \frac{2\pi}{5}\right)\right)^2 = cos^2\left(5t + \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1 + \cos\left(2\left(5t + \frac{2\pi}{5}\right)\right)}{2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(10t + \frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(wt + \frac{4\pi}{5}\right)$$

$$w = 10 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \quad T = \frac{\pi}{5}$$

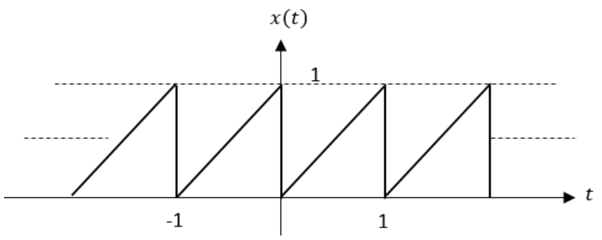
Donc le signal est périodique de période égale à : $T = \frac{\pi}{5}$

Exercice 3



1. Faire la décomposition en série de Fourier trigonométrique (SFT) du signal périodique représenté dans la figure ci-contre.
2. En déduire les coefficients de la série de Fourier complexe (SFC).

Solution



1) Calculer la série de Fourier trigonométrique (SFT) de $x(t)$

On a la (SFT) est donnée selon la relation :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n cos(2\pi n f_0 t) + b_n sin(2\pi n f_0 t)\right)$$

Ce signal est un signal périodique de période ***T=1,*** $x(t) = t$

- a_0 est la **moyenne** du signal ou la **composante continue**
- Si $x(t)$ est **paire** alors, $b_n = 0$
- Si $x(t)$ est **impaire** alors, $a_n = 0$

Il est ni pair ni impair car si on prend un point: $0 < t < T_0$

On trouve que : $x(t) \neq x(-t)$ *.Donc on doit calculer tous les coefficients de la SFT*

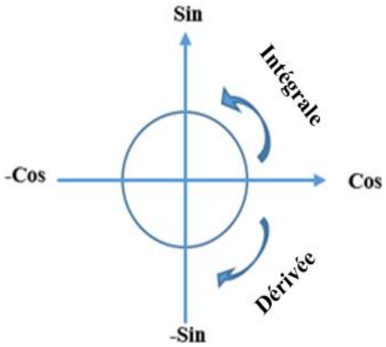
$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} tdt = \frac{1}{T_0}\frac{1}{2}t^2|_0^{T_0} = \frac{1}{T_0}\frac{1}{2}\{T_0^2 - 0\} = \frac{1}{2}T_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t).cos(2\pi n f_0 t)dt = \ a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} t.cos(2\pi n f_0 t)dt$$

On fait l'intégral par partie, la relation est :

$$\int_0^{T_0} u(t).v'(t)dt = u(t).v(t)|_0^{T_0} - \int_0^{T_0} u'(t).v(t)dt$$



On prend : $u(t) = t \quad \rightarrow u'(t) = dt\ ,\ v'(t) = cos\,(2\pi n f_0 t) \quad \rightarrow \quad v(t) = \frac{1}{2\pi n f_0}sin(2\pi n f_0 t)$

Alors :

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} t.cos(2\pi n f_0 t)dt = \frac{2}{T_0}.\frac{1}{2\pi n f_0}.t.sin\,(2\pi n f_0 t)\Big|_0^{T_0} - \frac{2}{T_0}.\int_0^{T_0}\frac{1}{2\pi n f_0}sin(2\pi n f_0 t)dt$$

$$= \frac{2}{T_0}\frac{1}{2\pi n f_0}T_0 sin\,(2\pi n f_0 T_0) - 0 - \frac{2}{T_0}(-\frac{1}{(2\pi n f_0)^2}cos(2\pi n f_0 t))|_0^{T_0}$$

$$= \frac{1}{\pi n f_0}sin\,(2\pi n) + \frac{2}{T_0}(\frac{1}{(2\pi n f_0)^2}(cos(2\pi n f_0 T_0) - cos(0))$$

$f_0 = \frac{1}{T_0}$, $\quad sin\,(2\pi n) = 0, \quad cos\,(2\pi n) = 1, \quad et \quad cos\,(0) = 1$ **, donc** $\quad a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t).sin(2\pi n f_0 t)dt = \ \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} t.sin(2\pi n f_0 t)dt$$

On fait l'intégral par partie, la relation est : $\int_0^{T_0} u(t).v'(t)dt = u(t).v(t)|_0^{T_0} - \int_0^{T_0} u'(t).v(t)dt$

On prend : $u(t) = t \quad \rightarrow u'(t) = dt\ ,\ v'(t) = sin\,(2\pi n f_0 t) \quad \rightarrow \quad v(t) = \frac{-1}{2\pi n f_0}cos(2\pi n f_0 t)$

Alors :

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} t.sin(2\pi n f_0 t)dt = \frac{-2}{T_0}.\frac{1}{2\pi n f_0}.t.cos(2\pi n f_0 t)|_0^{T_0} - \frac{2}{T_0}.\int_0^{T_0}\frac{-1}{2\pi n f_0}cos(2\pi n f_0 t)dt$$

$$= \frac{-2}{T_0}\frac{1}{2\pi n f_0}T_0 cos(2\pi n f_0 T_0) - 0 - \frac{2}{T_0}\left(-\frac{1}{(2\pi n f_0)^2}\right)sin(2\pi n f_0 t)\Big|_0^{T_0}$$

$$= \frac{-cos(2\pi n)}{\pi n f_0} + \frac{2}{T_0}\left(\frac{1}{(2\pi n f_0)^2}\right)(sin(2\pi n) - sin(0))$$

$$b_n = \frac{-cos(2\pi n)}{\pi n f_0}$$

$sin\,(2\pi n) = 0,\quad cos\,(2\pi n) = 1,\ \ et\ \ sin(0) = 0$, donc $b_n = \frac{-1}{\pi n f_0} = \frac{-T_0}{\pi n} = \frac{-1}{\pi n}$

Et enfin on peut écrire la SFT sous la forme : $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(2\pi n f_0 t) + b_n sin(2\pi n f_0 t)$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-1}{\pi n f_0}\right] sin(2\pi n f_0 t)$$

2) Déduire la série de Fourier complexe (SFC) à partir de la SFT

On la les relations suivantes : La SFC :

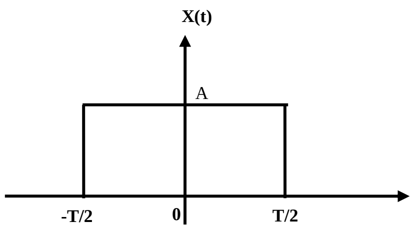
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

Tel que : $X_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi f_0 n t}dt$, **Avec :** $X_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$

Après les calculs, on a trouvé: $a_n = 0\ \ et\ \ b_n = \frac{-1}{\pi n f_0},\quad T_0 = 1\,,\quad \rightarrow f_0 = \frac{1}{T_0} = 1$

Donc : $X_n = -j\frac{1}{2}b_n = j\frac{1}{2\pi n f_0} = j\frac{1}{2\pi n}$,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j\frac{1}{2\pi n} e^{j2\pi n f_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j\frac{1}{2\pi n} e^{j2\pi n t}$$



Exercice 4 : Soit le signal $x(t)$ représenté dans la figure suivante :

1. Calculer son énergie totale et déduire sa puissance totale.
2. Calculer la transformée de Fourier de ce signal.
3. En utilisant l'identité de Parceval, déduire son énergie dans le domaine fréquentiel.
4. Soit: $y(t) = x(t - T)$, Représenter $y(t)$ et déduire sa transformée de Fourier.
5. Soient : $g(t) = 3x(2t)$ et $h(t) = 2x(\frac{t}{2})$, Représenter $g(t)$ et $h(t)$ pour $T = 4$

Solution

$$x(t) = Arect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & si\ -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

1. **Calculer l'énergie totale et déduire la puissance totale du signal.**

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-T/2}^{+T/2} (x(t))^2 dt = \int_{-T/2}^{+T/2} A^2 dt = A^2 t\Big|_{-T/2}^{T/2}$$

$$E_x = A^2 T = const. \quad \rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{E_x}{T} = 0$$

2. Calculer la transformée de Fourier de ce signal.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} A\, e^{-j2\pi ft} dt = \frac{-A}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft}\Big|_{-T/2}^{T/2}$$

$$X(f) = \frac{-A}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft}\Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{-A}{j2\pi f}\left(e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} - e^{+j2\pi f\frac{T}{2}}\right) = \frac{A}{j2\pi f}\left(e^{+j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right)$$

$$X(f) = \frac{A}{\pi f}\left(\frac{e^{+j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{2j}\right) = \frac{AT}{\pi fT} sin(\pi fT) = AT\frac{sin(\pi fT)}{\pi fT} = ATsinc(\pi fT)$$

Donc :

$x(t) = Arect\left(\frac{t}{T}\right)$ $\quad TF \quad$ $X(f) = ATsinc(\pi fT)$ **pour** $sinc(\pi fT) = \frac{sin(\pi fT)}{(\pi fT)}$

3. Déduire la transformée de Fourier de ce signal centré au point T_0.

$$y(t) = x(t - T_0)$$

D'après la <u>propriété de décalage temporelle</u> de Fourier:

$$y(t) = x(t - t_0) \rightarrow y(f) = X(f).\, e^{-j2\pi ft_0}$$

Donc : $Y(f) = X(f).\, e^{-j2\pi fT_0} = ATsinc(\pi fT).\, e^{-j2\pi fT_0}$

4. En utilisant l'identité de Parceval, déduire l'énergie dans le domaine fréquentiel.

Théorème de Perceval de l'énergie :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} (ATsinc(\pi fT))^2\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2T^2 (sinc(\pi fT))^2\, df$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 T (sinc(\pi fT))^2 \mathrm{T}\, df$$

On fait un changement de variable :

$$u = Tf \quad \rightarrow \quad du = Tdf$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 T(sinc(u\pi))^2 du = A^2 T \int_{-\infty}^{+\infty} (sinc(u\pi)^2 du = A^2 T$$

On a la propriété :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(u)du = 1 \quad \text{Si on prend} \qquad sinc(u) = \frac{sin(\pi u)}{(\pi u)}$$

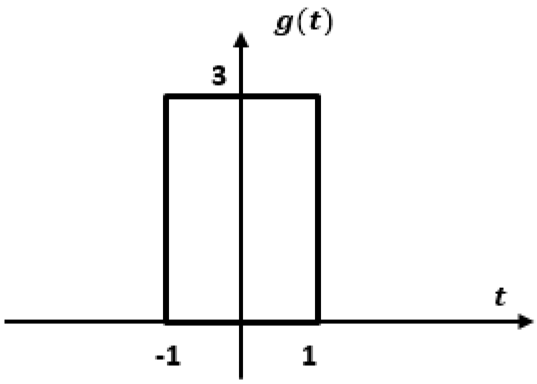
Donc : $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = A^2 T$

6. On a : $g(t) = 3x(2t) = 3x(Bt)$,
   $B => 1$ **, compression**

On $t_A = Bt_N$ $\quad t_N = \frac{1}{B} t_A = \frac{1}{2} t_A$

Pour : $T = 4$, on trouve :

t_A	t_N
$\frac{-T}{2} = -2$	$\frac{-T}{4} = -1$
0	0
$\frac{T}{2} = 2$	$\frac{T}{4} = 1$

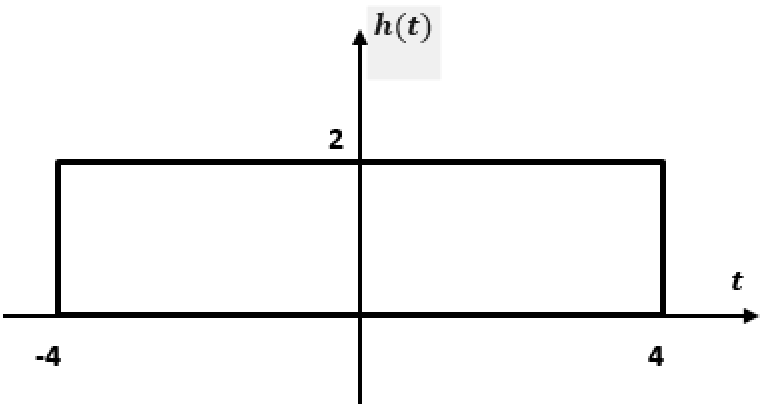


$h(t) = 2x\left(\frac{t}{2}\right) = 2x(Bt), \quad B = \frac{1}{2} < 1,$ **dilatation**

On $t_A = Bt_N t_N = \frac{1}{B} t_A = 2t_A$

Pour : $T = 4$, on trouve :

t_A	t_N
$\frac{-T}{2} = -2$	$-T = -4$
0	0
$\frac{T}{2} = 2$	$T = 4$



Bon courage