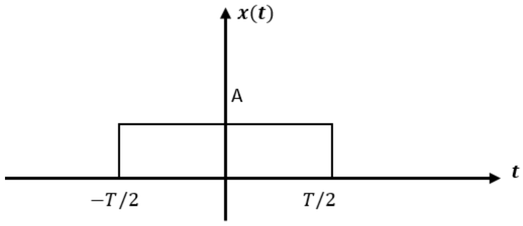
Solution TD2 : Convolution et corrélation

<u>Exercice 1:</u> La convolution

Soit le signal rectangulaire $x(t)$ telle que :

$$x(t) = A.rect\left(\frac{t}{T}\right),$$

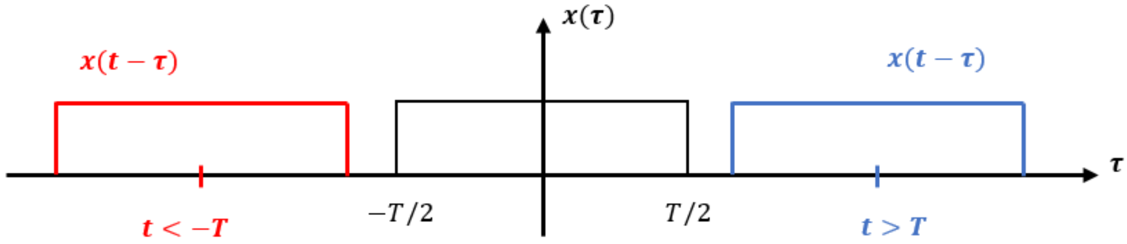


2. Déterminer le produit de convolution: $y(t) = x(t) * x(t)$. Et la représenter.

Convolution du signal avec lui-même :

$$y(t) = x(t) * x(t) = A.rect\left(\frac{t}{T}\right) * A.rect\left(\frac{t}{T}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).x(t-\tau)d\tau$$

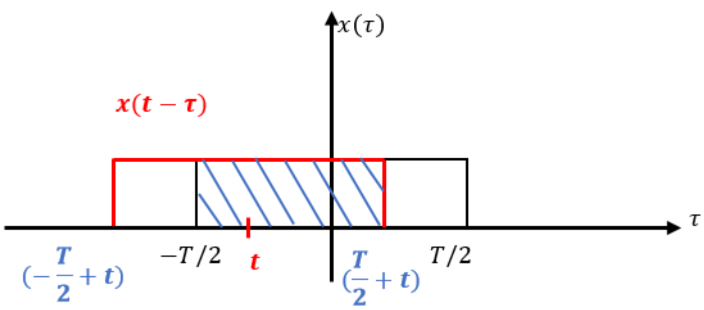
- **Si: $t < -T$ ou si : $t > T$:**



Il n' y a pas d'intersection entre les deux signaux, donc le produit est nul.

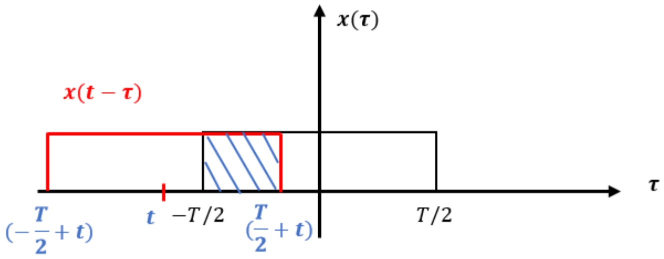
$$x(\tau).x(t-\tau) = 0 \rightarrow y(t) = 0$$

- **Si $-T/2 < t < 0$**



$$y(t) = x(t) * x(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau).x(t-\tau)d\tau = \int_{-T/2}^{t+T/2} A^2 d\tau = A^2\tau = A^2(t+T)$$

- **Si** $-\mathrm{T} < t < -T/2$

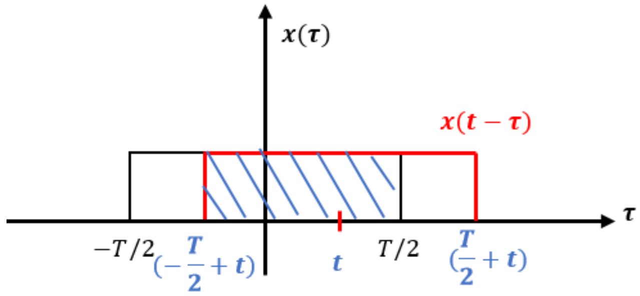


$$y(t) = x(t) * x(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau).x(t-\tau)d\tau = \int_{-T/2}^{t+T/2} A^2 d\tau = A^2\tau = A^2(t+T)$$

Conclusion : **Si:** $-\mathrm{T} < t < 0$

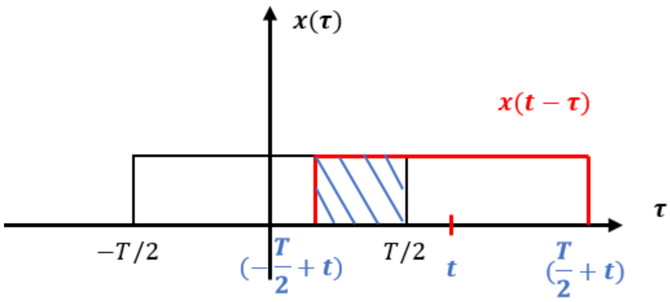
$$y(t) = x(t) * x(t) = A^2(t+T)$$

- **Si:** $0 < t < \mathrm{T}/2$



$$y(t) = x(t) * x(t) = \int_{-\frac{T}{2}+t}^{\frac{T}{2}} x(\tau).x(t-\tau)d\tau = \int_{-\frac{T}{2}+t}^{\frac{T}{2}} A^2 d\tau = A^2\tau = A^2(-t+T)$$

- **Si:** $\mathrm{T}/2 < t < T$



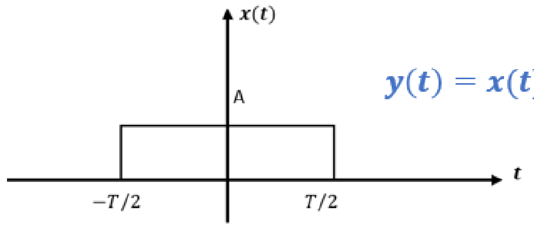
$$y(t) = x(t) * x(t) = \int_{-\frac{T}{2}+t}^{\frac{T}{2}} x(\tau).x(t-\tau)d\tau = \int_{-\frac{T}{2}+t}^{\frac{T}{2}} A^2 d\tau = A^2\tau = A^2(T-t)$$

Conclusion : **Si:** $0 < t < T$

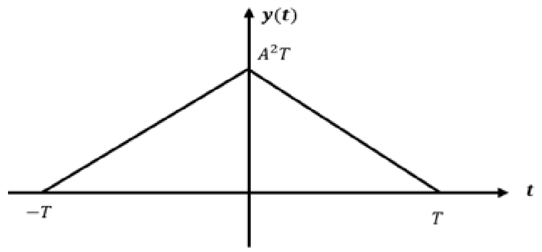
$$y(t) = x(t) * x(t) = A^2(-t+T)$$

Conclusion finale

$$y(t) = x(t) * x(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < -T \\ A^2(t+T) & si \quad -T < t < 0 \\ A^2(-t+T) & si \quad 0 < t < T \\ 0 & si \quad t > T \end{cases}$$



$$y(t) = x(t) * x(t)$$



3. Déduire la transformée de Fourier de $y(t)$: $Y(f)$.

On a la propriété de convolution dans la transformée de Fourier: $x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(f).X_2(f)$

On a :

$$y(t) = x(t) * x(t)$$

Donc :

$$Y(f) = X(f).X(f)$$

On a d'après l'exercice 3 de TD 2:

$$xt(t) = A\,rect\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow X(f) = AT.sinc(\pi f T)$$

Donc :

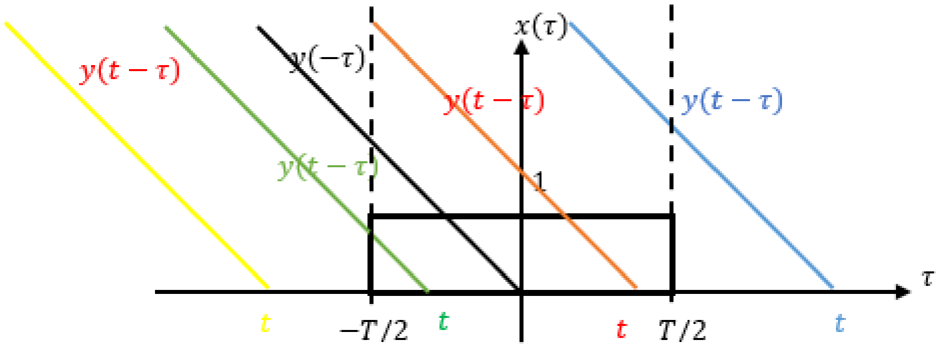
$$Y(f) = X(f)^2 = A^2T^2.sinc^2\,(\pi f T)$$

Exemple du cours : Exemple 1 : Soit à calculé le produit de convolution du signal rectangulaire unitaire de durée (T) avec une rampe unitaire :

$$g(t) = x(t) * y(t) == \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).\, y(t-\tau)d\tau$$

$$g(t) = rect(t/T) * r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(\tau/T).r(t-\tau)d\tau$$

- Si $t < -T/2$: **le produit** $rect\left(\frac{\tau}{T}\right).r(t-\tau) = 0 \rightarrow g(t) = 0$



- **Si** $-T/2 < t < T/2$ **:**

$$g(t) = rect(t/T) * r(t) = \int_{-T/2}^{t} (t-\tau)d\tau$$

$$g(t) = rect(t/T) * r(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{t} (t-\tau)d\tau = \int_{-\frac{T}{2}}^{t} t d\tau - \int_{-\frac{T}{2}}^{t} \tau d\tau = t\tau - \frac{1}{2}\tau^2$$

$$g(t) = rect(t/T) * r(t) = t^2 + t\frac{T}{2} - \frac{1}{2}(t^2 - \frac{T^2}{4})$$

- **Si** $t > T/2$

$$g(t) = rect(t/T) * r(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (t-\tau)d\tau = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t d\tau - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tau d\tau = t\tau - \frac{1}{2}\tau^2$$

$$g(t) = rect(t/T) * r(t) = tT$$

Donc le resultat de la convolution est :

$$\boxed{g(t) = \begin{cases} o & si \quad t < -T/2 \\ t^2 + \tau\frac{T}{2} - \frac{1}{2}\left(t^2 - \frac{T^2}{4}\right) & si \quad -T/2 < t < T/2 \\ tT & si \quad t > T/2 \end{cases}}$$