

Solution du TD 4 : La Transformée de Laplace (TL)

Exercice 1

1. Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

- $x(t) = e(t) - e(t - 2)$,

$$X(P) = \int_0^{+\infty} x(t) \cdot e^{-Pt} dt = \int_0^2 x(t) \cdot e^{-Pt} dt = \int_0^2 e^{-Pt} dt = -\frac{1}{P} (e^{-Pt}) \Big|_0^2$$

$$X(P) = \frac{1}{P} (1 - e^{-2P})$$

- $y(t) = e(t) - 2e(t - 1) + e(t - 3)$

$$Y(P) = \int_0^{+\infty} y(t) \cdot e^{-Pt} dt = \int_0^3 y(t) \cdot e^{-Pt} dt = \int_0^1 e^{-Pt} dt - \int_1^3 e^{-Pt} dt$$

$$= -\frac{1}{P} (e^{-Pt}) \Big|_0^1 - \left(-\frac{1}{P} \right) (e^{-Pt}) \Big|_1^3 = \frac{1}{P} (1 - e^{-P}) + \frac{1}{P} (e^{-3P} - e^{-P})$$

$$Y(P) = \frac{1}{P} [1 - 2e^{-P} + e^{-3P}]$$

2. Les transformées de Laplace des fonctions suivantes sont trouvées selon la table de Laplace :

$s_i(t)$	$S_i(P)$
$s_1(t) = 0.5e(t) - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-4t}e(t)$	$\frac{0.5}{P} - \frac{2}{3(P+1)} + \frac{1}{2(P+4)}$
$s_2(t) = -3e(t) + 2t \cdot e(t) + 6e^{-t}e(t)$	$\frac{-3}{P} + \frac{2}{P^2} + \frac{6}{P+1}$
$s_3(t) = 2te^{-3t} + 4e^{-0.5t} \sin(0.5\sqrt{2} \cdot t)$	$\frac{2}{(P+3)^2} + \frac{2\sqrt{2}}{(P+0.5)^2 + (0.5\sqrt{2})^2}$
$s_4(t) = t \sin(at)$	$\frac{2aP}{(P^2 + a^2)^2}$
$s_5(t) = e^{-t} \sin(5t)$	$\frac{5}{(P+1)^2 + 25}$
$s_6(t) = 2 - 2e^t + 0.5 \sin(4t)$	$\frac{2}{P} - \frac{2}{P-1} + \frac{2}{P^2 + 16}$
$s_7(t) = (2t^2 - 1)e(t)$	$\frac{4}{P^3} - \frac{1}{P}$
$s_8(t) = e^t - \cos\left(\frac{2}{3}t\right)$	$\frac{1}{P-1} - \frac{P}{P^2 + \frac{4}{9}}$

Exercice 2 : Trouver la transformée inverse de Laplace

- $F_1(P) = \frac{1}{P^2 + P - 2}$

$$P^2 + P - 2 \rightarrow \Delta = 1 - 4(-2) = 9$$

$$\Delta > 0, \text{ on a deux poles réelles et simples : } P_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2, \quad P_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$$

Donc , on fait la décomposition en elements simples :

$$F_1(P) = \frac{1}{P^2 + P - 2} = \frac{1}{(P + 2)(P - 1)} = \frac{a_1}{P + 2} + \frac{a_2}{P - 1}$$

Remarque 1

Le cas des pôles de la fonction à décomposer sont réels et (simple) distincts :

$$F(P) = \frac{K}{(P + P_1)(P + P_2) \dots (P + P_n)} = \frac{a_1}{P + P_1} + \frac{a_2}{P + P_2} + \dots + \frac{a_n}{P + P_n}$$

Tel que les a_i peuvent calculés de la façon suivante :

$$a_i = \lim_{P \rightarrow -P_i} [F(P) \cdot (P + P_i)] \quad , \quad i = 1 \dots n$$

Donc :

$$a_1 = \lim_{P \rightarrow -2} [F(P) \cdot (P + 2)] = \lim_{P \rightarrow -2} \left[\frac{1}{(P + 2)(P - 1)} \cdot (P + 2) \right] = -\frac{1}{3}$$

$$a_2 = \lim_{P \rightarrow 1} [F(P) \cdot (P - 1)] = \lim_{P \rightarrow 1} \left[\frac{1}{(P + 2)(P - 1)} \cdot (P - 1) \right] = \frac{1}{3}$$

Alors :

$$F_1(P) = \frac{1}{(P + 2)(P - 1)} = \frac{-1}{3(P + 2)} + \frac{1}{3(P - 1)}$$

D'après la table de la transformée de Laplace, on a donc :

$$F_1(P) = \frac{1}{P^2 + P - 2} \leftrightarrow f_1(t) = \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t})$$

- **Valeur initiale :** $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{P \rightarrow +\infty} PF(P)$

$$f_1(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f_1(t) = \lim_{P \rightarrow +\infty} PF_1(P) = \lim_{P \rightarrow +\infty} P \frac{1}{P^2 + P - 2} = 0$$

- **Valeur finale :** $f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{P \rightarrow 0} PF(P)$

$$f_1(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f_1(t) = \lim_{P \rightarrow 0} P F_1(P) = \lim_{P \rightarrow 0} P \frac{1}{P^2 + P - 2} = +\infty$$

- $F_3(P) = \frac{3}{P(1+\tau P)}$

On a deux poles simples : $P = -\frac{1}{\tau}$, et $P = 0$

Donc , on fait la décomposition en elements simples :

$$F_3(P) = \frac{3}{P(1 + \tau P)} = \frac{3}{\tau P \left(\frac{1}{\tau} + P\right)} = \frac{a_1}{P} + \frac{a_2}{\left(P + \frac{1}{\tau}\right)}$$

Tel que :

$$a_1 = \lim_{P \rightarrow 0} [P \cdot F(P)] = \lim_{P \rightarrow 0} \left[\frac{3P}{\tau P \left(\frac{1}{\tau} + P\right)} \right] = 3$$

$$a_2 = \lim_{P \rightarrow -\frac{1}{\tau}} \left[F(P) \cdot \left(P + \frac{1}{\tau}\right) \right] = \lim_{P \rightarrow -\frac{1}{\tau}} \left[\frac{3}{\tau P \left(\frac{1}{\tau} + P\right)} \cdot \left(\frac{1}{\tau} + P\right) \right] = -3$$

$$F_3(P) = \frac{3}{P(1 + \tau P)} = \frac{3}{P} - \frac{3}{\left(P + \frac{1}{\tau}\right)} \quad \leftrightarrow \quad f_3(t) = 3 \left[e(t) - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right]$$

- **Valeur initiale :** $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{P \rightarrow +\infty} P F(P)$

$$f_3(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f_3(t) = \lim_{P \rightarrow +\infty} P F_3(P) = \lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{3P}{P(1 + \tau P)} = 0$$

- **Valeur finale :** $f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{P \rightarrow 0} P F(P)$

$$f_3(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f_3(t) = \lim_{P \rightarrow 0} P F_3(P) = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{3P}{P(1 + \tau P)} = 3$$

- $F_5(P) = \frac{1}{P^2(1+\tau P)}$, on a deux poles : un **simple** $P = -\frac{1}{\tau}$ et un **multiple** $P = 0$.

Remarque 2

Le cas des pôles sont réels et multiples :

$$F(P) = \frac{N(P)}{(P+P_1)^k(P+P_2) \dots (P+P_n) \dots} = \frac{a_1}{(P+P_1)^k} + \frac{a_2}{(P+P_1)^{k-1}} + \frac{a_3}{(P+P_1)^{k-2}} + \dots + \frac{a_k}{(P+P_1)} + \frac{a_{k+1}}{P+P_2} + \dots + \frac{a_{k+n-1}}{P+P_n}$$

Les a_i associées aux **pôles multiple** sont calculés de la manière suivante :

$$a_j = \lim_{P \rightarrow -P_i} \left[\frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{dP^{j-1}} [F(P) \cdot (P + P_i)^k] \right] \quad \text{avec } j = 1, 2, \dots, k$$

Donc la décomposition se fait comme suit :

$$F_5(P) = \frac{1}{P^2(1 + \tau P)} = \frac{a_1}{P^2} + \frac{a_2}{P} + \frac{a_3}{(1 + \tau P)}$$

Alors les coefficients du pole multiple ce calcul de la facon suivante selon la remarque 2 :

$$a_1 = \lim_{P \rightarrow 0} [F_5(P) \cdot P^2] = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{P^2}{P^2(1 + \tau P)} = 1$$

$$a_2 = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{d}{dP} [F_5(P) \cdot P^2] = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{d}{dP} \left[\frac{1}{(1 + \tau P)} \right] = \lim_{P \rightarrow 0} \left[\frac{-\tau}{(1 + \tau P)^2} \right] = -\tau$$

Et le coefficient du pole simple ce calcul de la facon suivante selon la remarque 1 :

$$a_3 = \lim_{P \rightarrow -1/\tau} [F(P) \cdot (1 + \tau P)] = \tau^2 \quad ,$$

Donc :

$$F_5(P) = \frac{1}{P^2(1 + \tau P)} = \frac{1}{P^2} - \frac{\tau}{P} + \frac{\tau^2}{(1 + \tau P)}$$

$$\frac{\tau^2}{(1 + \tau P)} = \frac{\tau^2}{\tau \left(P + \frac{1}{\tau} \right)} = \frac{\tau}{(P + \tau)}$$

$$F_5(P) = \frac{1}{P^2(1 + \tau P)} \Leftrightarrow f_5(t) = r(t) - \tau e(t) + \tau e^{-\frac{1}{\tau}t} = \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{1}{\tau}t} \right) e(t)$$

- **Valeur initiale :** $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{P \rightarrow +\infty} PF(P)$

$$f_5(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f_5(t) = \lim_{P \rightarrow +\infty} PF_5(P) = \lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{P}{P^2(1 + \tau P)} = 0$$

- **Valeur finale :** $f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{P \rightarrow 0} PF(P)$

$$f_5(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f_5(t) = \lim_{P \rightarrow 0} PF_5(P) = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{P}{P^2(1 + \tau P)} = +\infty$$

- $F_6(P) = \frac{10}{(P^2 + 10P + 34)}$

$\Delta = 100 - 4 \times 34 = -36 < 0$, pas de racines réelles, on fait la decomposition suivante :

$$P^2 + 10P + 34 = P^2 + 2 \times 5P + 25 + 9 = (P + 5)^2 + 3^2$$

$$F_6(P) = \frac{10}{(P^2 + 10P + 34)} = \frac{10}{(P + 5)^2 + 3^2} = \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{(P + 5)^2 + 3^2}$$

D'après la table de Laplace on :

$$TL(e^{-at} \sin(wt)) = \frac{w}{(P + a)^2 + w^2}$$

$$TL(\sin(wt)) = \frac{w}{P^2 + w^2}$$

$$TL^{-1}(F(P + a)) = e^{-aP} f(t)$$

Donc :

$$F_6(P) = \frac{10}{(P^2 + 10P + 34)} = \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{(P + 5)^2 + 3^2}$$

$$\leftrightarrow f_6(t) = \frac{10}{3} \sin(3t) \cdot e^{-5t}$$

- Valeur initiale : $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{P \rightarrow +\infty} PF(P)$

$$f_6(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f_6(t) = \lim_{P \rightarrow +\infty} PF_6(P) = \lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{10P}{(P^2 + 10P + 34)} = 0$$

- Valeur finale : $f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{P \rightarrow 0} PF(P)$

$$f_6(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f_6(t) = \lim_{P \rightarrow 0} PF_6(P) = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{10P}{(P^2 + 10P + 34)} = +\infty$$

- $F_7(P) = \frac{12P}{(P^2 + 16P + 100)}$,

$\Delta = 16^2 - 400 = -144 < 0$, pas de racines réelles

$$P^2 + 16P + 100 = P^2 + 2 \times 8P + 64 + 36 = (P + 8)^2 + 6^2$$

$$F_7(P) = \frac{12P}{(P^2 + 16P + 100)} = \frac{12P}{(P + 8)^2 + 6^2} = 12 \frac{P + 8 - 8}{(P + 8)^2 + 6^2} = 12 \left[\frac{P + 8}{(P + 8)^2 + 6^2} - \frac{8}{(P + 8)^2 + 6^2} \right]$$

$$F_7(P) = 12 \left[\frac{P + 8}{(P + 8)^2 + 6^2} - \frac{8}{6(P + 8)^2 + 6^2} \right]$$

$$TL(\sin(wt)) = \frac{w}{P^2 + w^2}$$

$$TL(\cos(wt)) = \frac{P}{P^2 + w^2}$$

$$TL^{-1}(F(P + a)) = e^{-aP} f(t)$$

$$TL(e^{-at} \sin(wt)) = \frac{w}{(P + a)^2 + w^2}$$

Donc :

$$F_7(P) = \frac{12P}{(P^2 + 16P + 100)} = 12 \left[\frac{P + 8}{(P + 8)^2 + 6^2} - \frac{8}{6} \frac{6}{(P + 8)^2 + 6^2} \right]$$

$$\leftrightarrow f_7(t) = 12e^{-8t} \left[\cos(6t) - \frac{8}{6} \sin(6t) \right]$$

- **Valeur initiale :** $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{P \rightarrow +\infty} PF_7(P)$

$$f_7(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f_7(t) = \lim_{P \rightarrow +\infty} PF_7(P) = \lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{12P^2}{(P^2 + 16P + 100)} = 12$$

- **Valeur finale :** $f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{P \rightarrow 0} PF_7(P)$

$$f_7(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f_7(t) = \lim_{P \rightarrow 0} PF_7(P) = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{12P^2}{(P^2 + 16P + 100)} = 0$$

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles suivantes munies de ses conditions initiales :

- $\frac{d^2(x(t))}{dt^2} + 5 \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t) = e^{-2t} e(t)$ (conditions initiales nulles)

D'après les propriétés de la transformée de Laplace on a :

$$TL \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = PF(P) - f(0), \quad \text{et} \quad TL \left[\frac{df^2(t)}{dt^2} \right] = P^2F(P) - Pf(0) - f'(0)$$

Donc la TL de l'équation différentielle avec les conditions initiales nulles est

$$P^2X(P) + 5PX(P) + 4X(P) = \frac{1}{P + 2}$$

$$X(P)(P^2 + 5P + 4) = \frac{1}{P + 2}$$

$$X(P) = \frac{1}{(P + 2)(P^2 + 5P + 4)}$$

$$P^2 + 5P + 4, \quad \Delta = 25 - 4 \times 4 = 9$$

$$P_1 = \frac{-5 + \sqrt{9}}{2} = -1 \quad P_2 = \frac{-5 - \sqrt{9}}{2} = -4$$

$$P^2 + 5P + 4 = (P + 1)(P + 4)$$

On a 3 poles simples, donc la décomposition en éléments simples est :

$$X(P) = \frac{1}{(P + 2)(P + 1)(P + 4)} = \frac{a}{(P + 1)} + \frac{b}{(P + 2)} + \frac{c}{(P + 4)}$$

Les a, b, c, ce calcul selon la remarque 1, des poles simples :

$$a_i = \lim_{P \rightarrow -P_i} [F(P) \cdot (P + P_i)] \quad , \quad i = 1 \dots n$$

$$a = \lim_{P \rightarrow -1} [X(P) \cdot (P + 1)] = \lim_{P \rightarrow -1} \left[\frac{(P + 1)}{(P + 2)(P + 1)(P + 4)} \right] = \lim_{P \rightarrow -1} \left[\frac{1}{(P + 2)(P + 4)} \right] = \frac{1}{3}$$

$$b = \lim_{P \rightarrow -2} [X(P) \cdot (P + 2)] = \lim_{P \rightarrow -2} \left[\frac{(P + 2)}{(P + 2)(P + 1)(P + 4)} \right] = \lim_{P \rightarrow -2} \left[\frac{1}{(P + 1)(P + 4)} \right] = -\frac{1}{2}$$

$$c = \lim_{P \rightarrow -4} [X(P) \cdot (P + 4)] = \lim_{P \rightarrow -4} \left[\frac{(P + 4)}{(P + 2)(P + 1)(P + 4)} \right] = \lim_{P \rightarrow -4} \left[\frac{1}{(P + 2)(P + 1)} \right] = \frac{1}{6}$$

$$X(P) = \frac{1}{(P + 2)(P + 1)(P + 4)} = \frac{1}{3(P + 1)} - \frac{1}{2(P + 2)} + \frac{1}{6(P + 4)}$$

$$X(P) = \frac{1}{(P + 2)(P^2 + 5P + 4)} \leftrightarrow x(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{6}e^{-4t}$$

- $\frac{d^2(x(t))}{dt^2} + 5\frac{dx(t)}{dt} + 6x(t) = e^t e(t)$, avec $x(0^+) = 1$, et $x'(0^+) = 0$

D'après les propriétés de la transformée de Laplace on a :

$$TL \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = PF(P) - f(0), \quad \text{et} \quad TL \left[\frac{df^2(t)}{dt^2} \right] = P^2F(P) - Pf(0) - f'(0)$$

Donc la TL de l'équation différentielle avec les conditions initiales non nulles est :

$$TL \frac{d^2(x(t))}{dt^2} = P^2X(P) - Px(0) - x'(0) = P^2X(P) - P$$

$$TL \left(5 \frac{dx(t)}{dt} \right) = 5(PX(P) - x(0)) = 5PX(P) - 5$$

$$P^2X(P) - P + 5PX(P) - 5 + 6X(P) = \frac{1}{P - 1}$$

$$X(P)(P^2 + 5P + 6) - P - 5 = \frac{1}{P - 1}$$

$$X(P)(P^2 + 5P + 6) = \frac{1}{P - 1} + (P + 5) = \frac{(P + 5)(P - 1) + 1}{P - 1}$$

$$X(P) = \frac{(P + 5)(P - 1) + 1}{(P - 1)(P^2 + 5P + 6)} = \frac{(P + 5)(P - 1) + 1}{(P - 1)(P + 2)(P + 3)}$$

$$(P^2 + 5P + 6) = (P + 2)(P + 3)$$

$$X(P) = \frac{(P + 5)(P - 1) + 1}{(P - 1)(P + 2)(P + 3)} = \frac{P^2 + 4P - 4}{(P - 1)(P + 2)(P + 3)}$$

On utilise la méthode des résidus : $f(t) = \Sigma$ [Résidus de H(p)]

Méthode des Résidus

Pour chaque pôle de la fonction $H(p) = F(p) \cdot e^{pt}$ il existe un "résidu". Les pôles de $F(p) \cdot e^{pt}$ sont les pôles de $F(p)$.

Supposons p_1 un des pôles de $F(p)$. Pour ce pôle il existe un résidu R_{p1} :

Si p_1 est un pôle simple, on a $R_{p1} = (p - p_1).H(p_1)$

Si p_1 est un pôle double, on a $R_{p1} = (p - p_1)^2.H'(p_1)$ avec $H'(p) = dH(p) / dp$

Si p_1 est un pôle multiple d'ordre k , on a $R_{p1} = (p - p_1)^k.H^{(k-1)}(p_1) / (k-1)!$, avec $H^{(k-1)}(p) = d^{k-1}H(p) / dp^{k-1}$

Pour obtenir $f(t)$ il suffit alors de faire la somme des résidus : $f(t) = \sum [\text{Résidus de } H(p)]$

On a :

$$X(P) = \frac{(P+5)(P-1)+1}{(P-1)(P+2)(P+3)} = \frac{P^2+4P-4}{(P-1)(P+2)(P+3)}$$

$$R_{p1} = (P - P_1).X(P_1) = [(P - P_1)X(P)]_{P=P_1} e^{Pt}$$

$$R_{p1} = \left[\frac{(P-1)(P^2+4P-4)}{(P-1)(P+2)(P+3)} \right]_{P=1} e^t = \frac{1}{12} e^t$$

$$R_{p2} = (P - P_2).X(P_2) = [(P - P_2)X(P)]_{P=P_2} e^{Pt}$$

$$R_{p2} = \left[\frac{(P+2)(P^2+4P-4)}{(P-1)(P+2)(P+3)} \right]_{P=-2} e^{-2t} = \frac{8}{3} e^{-2t}$$

$$R_{p3} = (P - P_3).X(P_3) = [(P - P_3)X(P)]_{P=P_3} e^{Pt}$$

$$R_{p3} = \left[\frac{(P+3)(P^2+4P-4)}{(P-1)(P+2)(P+3)} \right]_{P=-3} e^{-3t} = -\frac{7}{4} e^{-3t}$$

Donc :

$$x(t) = \sum R_{pi} = \frac{1}{12} e^t + \frac{8}{3} e^{-2t} - \frac{7}{4} e^{-3t}$$

- $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} + 4x(t) = t.e^{-t}$, avec $x(0^+) = 1$, et $\frac{dx(0^+)}{dt} = 2$

D'après les propriétés de la transformée de Laplace on a :

$$TL \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = PF(P) - f(0), \quad \text{et} \quad TL \left[\frac{df^2(t)}{dt^2} \right] = P^2F(P) - Pf(0) - f'(0)$$

$$TL \left[\frac{d^2(x(t))}{dt^2} \right] = (P^2X(P) - Px(0) - x'(0)) = (P^2X(P) - P - 2)$$

$$TL \left[4 \frac{dx(t)}{dt} \right] = 4(PX(P) - x(0)) = 4(PX(P) - 1)$$

$$TL(t.e^{-at}) = \frac{1}{(P+a)^2}$$

Donc la TL de l'équation différentielle avec les conditions initiales non nulles est :

$$\begin{aligned} (P^2 X(P) - P - 2) + 4(PX(P) - 1) + 4X(P) &= \frac{1}{(P+1)^2} \\ (P^2 X(P) - P - 2) + (4PX(P) - 4) + 4X(P) &= \frac{1}{(P+1)^2} \\ (P^2 + 4P + 4)X(P) - P - 6 &= \frac{1}{(P+1)^2} \\ (P^2 + 4P + 4)X(P) &= \frac{1}{(P+1)^2} + P + 6 = \frac{(P+6)(P+1)^2 + 1}{(P+1)^2} \\ X(P) &= \frac{(P+6)(P+1)^2 + 1}{(P+1)^2(P^2 + 4P + 4)} = \frac{(P+6)(P+1)^2 + 1}{(P+1)^2(P+2)^2} \end{aligned}$$

On utilise la méthode des résidus avec ici on a deux poles en doubles:

Si p_1 est un pôle double, on a $R_{p1} = [(p - p_1)^2 \cdot H'(p_1)]e^{p_1 t}$ avec $H'(p) = dH(p) / dp$

Exercice 4

Soit le système suivant représenté par le circuit RC :

1) L'équation différentielle du système :
L'équation de la maille :

$$V_e(t) = R \cdot i(t) + V_s(t)$$

$$V_e(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{c} \int i(t) dt$$

$$V_s(t) = \frac{1}{c} \int i(t) dt \rightarrow i(t) = c \frac{dV_s(t)}{dt}$$

$$V_e(t) = RC \frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t)$$

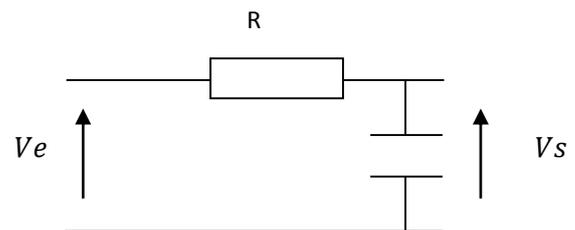
L'équation différentielle du système est :

$$\frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{1}{RC} V_s(t) = \frac{1}{RC} V_e(t)$$

L'équation différentielle du circuit RC est de l'ordre 1 : le circuit RC est un système d'ordre 1 : l'ordre de l'équation différentielle nous donne l'ordre du système.

Applicant la TL de $\frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{1}{RC} V_s(t) = \frac{1}{RC} V_e(t)$, avec les conditions initiales nulles :

$$PV_s(P) + \frac{1}{RC} V_s(P) = \frac{1}{RC} V_e(P)$$



$$\left(P + \frac{1}{RC}\right) V_s(P) = \frac{1}{RC} V_e(P) \rightarrow G(P) = \frac{V_s(P)}{V_e(P)} = \frac{1/RC}{P + 1/RC} = \frac{1}{1 + RCP}$$

2) La réponse du système :

a) La **réponse impulsionnelle** du système c'est pour une entrée impulsion de Dirac : $v_e(t) = \delta(t)$

$$TL(\delta(t)) = 1 = V_e(P)$$

$$G(P) = \frac{V_s(P)}{V_e(P)} \rightarrow V_s(P) = G(P)V_e(P)$$

On a : $v_e(t) = \delta(t)$ donc : $V_e(P) = 1$,

On pose : $RC = \tau$

$$V_s(P) = G(P) \rightarrow v_s(t) = g(t) = L^{-1}[G(P)] \rightarrow g(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Donc la **réponse impulsionnelle du système RC** :

$$v_s(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

b) La **réponse indicielle** du système c'est pour une entrée échelon unitaire : $e(t)$

$$v_e(t) = e(t) \rightarrow V_e(P) = \frac{1}{P}$$

$$V_s(P) = G(P)V_e(P) = \frac{1/RC}{P + 1/RC} \cdot \frac{1}{P} = \frac{1/RC}{P(P + 1/RC)} = \frac{a}{P} + \frac{b}{P + 1/\tau}$$

$$a = \lim_{P \rightarrow 0} [P \cdot X(P)] = \lim_{P \rightarrow 0} \left[\frac{P \cdot 1/RC}{P(P + 1/RC)} \right] = \lim_{P \rightarrow 0} \left[\frac{1/RC}{P + 1/RC} \right] = 1$$

$$b = \lim_{P \rightarrow -1/RC} [(P + 1/RC) \cdot X(P)] = \lim_{P \rightarrow -1/RC} \left[\frac{(P + 1/RC) \cdot 1/RC}{P(P + 1/RC)} \right] = -1$$

$$V_s(P) = \frac{1/RC}{P(P + 1/RC)} = \frac{1}{P} - \frac{1}{P + 1/\tau}$$

Donc la **réponse indicielle du système RC** :

$$v_s(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})e(t)$$

Pour le circuit RLC,

$$V_e(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + V_S(t)$$

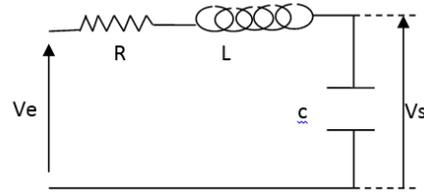
$$V_S(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \rightarrow i(t) = C \frac{dV_S(t)}{dt} \rightarrow \frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2V_S(t)}{dt^2}$$

$$V_e(t) = RC \frac{dV_S(t)}{dt} + LC \frac{d^2V_S(t)}{dt^2} + V_S(t)$$

$$V_e(t) = RC \frac{dV_S(t)}{dt} + LC \frac{d^2V_S(t)}{dt^2} + V_S(t)$$

L'équation différentielle du système RLC est :

$$\frac{d^2V_S(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dV_S(t)}{dt} + \frac{1}{LC} V_S(t) = \frac{1}{LC} V_e(t)$$



L'équation différentielle du circuit RLC est de l'ordre 2 : le circuit RLC est un système d'ordre 2.

Appliquant la TL à l'équation différentielle avec conditions initiale nulles :

$$P^2 \cdot V_S(P) + \frac{R}{L} P \cdot V_S(P) + \frac{1}{LC} V_S(P) = \frac{1}{LC} V_e(P)$$

$$\left(P^2 + \frac{R}{L} P + \frac{1}{LC} \right) V_S(P) = \frac{1}{LC} V_e(P) \rightarrow$$

$$G(P) = \frac{V_S(P)}{V_e(P)} = \frac{1/LC}{P^2 + \frac{R}{L} P + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{LCP^2 + RCP + 1}$$

La réponse du système est : $V_S(P) = G(P) \cdot V_e(P)$, ca dépend les paramètres du système : R, L et C.

Conclusion :

1. **L'ordre de l'équation différentielle nous donne l'ordre du système. (temporel)**
2. **L'ordre du dénominateur de la fonction de transfert est l'ordre du système. (complexe, ou fréquentielle)**