CORRECTION

Exercice 1. **Calculer les limites suivantes si elle existent :**

$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}^2-z^2}{z}\quad,\qquad\qquad \lim_{z\to -2i}\frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4}.$$

Solution

Calculer les limites suivantes si elle existent :

1. $\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}^2-z^2}{z}=0$, car si on pose $z=x+iy$ alors $z\to 0 \iff (x,y)\to(0,0)$, et

$$\left|\frac{\overline{z}^2-z^2}{z}\right|=\left|\frac{-4ixy}{x+iy}\right|=\frac{4|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{4|xy|}{\sqrt{y^2}}\le 4|x|\to 0,\ \text{quand } (x,y)\to(0,0).$$

Autre méthode :
Si on pose $z=re^{i\theta}$ alors $z\to 0 \iff r\to 0$ et

$$\frac{\overline{z}^2-z^2}{z}=\frac{r^2e^{-2i\theta}-r^2e^{2i\theta}}{re^{i\theta}}=r(e^{-3i\theta}-e^{i\theta})\to 0,\ \text{quand } r\to 0.$$

2. $$\lim_{z\to -2i}\frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4}=\frac{1}{2}+\frac{11}{4}i.$$

Exercice 2. **Montrer que** $u=e^{-x}\,(x\sin y-\ y\cos y)$ **est harmonique.**

Solution

Montrer que $u=e^{-x}\,(x\sin y-\ y\cos y)$ est harmonique c'est-à-dire que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ .$$

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\ e^{-x}(-2\sin y+x\sin y-y\cos y)$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\ e^{-x}(2\sin y-x\sin y+y\cos y)$ *donc*

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0}$$

<u>Exercice</u> 3. **Déterminer les constantes réelles a, b et c telles que la fonction $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$ soit holomorphe dans $\mathbb{C}$.**

Solution

Posons $u(x, y) = x + ay$ et $v(x, y) = bx + cy$. Pour que f soit holomorphe il faut que les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = c$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b,$$

ainsi

$$c = 1, \text{ et } a = -b.$$

<u>Exercice</u> 4. **Montrer que la fonction** $f(z) = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z}}$ **est holomorphe sur** $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ **et vérifie** $f'(z) = -\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z}^2}$.

Solution

Il suffit de vérifier que f est dérivable au sens complexe. Pour tout $z \neq 0$:

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{w \to z} \frac{\frac{1}{w} - \frac{1}{z}}{w - z} = \lim_{w \to z} \frac{1}{w - z} \left(\frac{z - w}{wz} \right) = -\frac{1}{z^2} .$$

La fonction f est bien holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.