Tests Statistiques

Master 1: 2020-2021

Prof. Abdelhakim Necir

Département de Mathématiques (Univ. Biskra)

Jeudi 10 Décembre 2020

Loi uniforme

- Soient $U \rightsquigarrow U(0,1)$ et $X \rightsquigarrow F$ continue, alors

$$X \overset{\mathcal{D}}{=} F^{-1}(U) \text{ et } F(X) \rightsquigarrow U(0,1)$$

- Soit $U = F(X)$ et F continue, alors $X = F^{-1}(U)$ presque sûrement.

Loi uniforme

Exemple

Soient $U \rightsquigarrow U(0,1)$ et $X \rightsquigarrow \exp(1)$. Alors $F^{-1}(s) = -\log(1-s)$ et

$$X \overset{\mathcal{D}}{=} -\log(1-U) \rightsquigarrow \exp(1).$$

Loi uniforme

Soient $U \rightsquigarrow U(0,1)$ et $X \rightsquigarrow \exp(1)$. Alors $F^{-1}(s) = -\log(1-s)$ et

$$X \overset{\mathcal{D}}{=} -\log(1-U) \rightsquigarrow \exp(1).$$

Loi exponentielle

Une variable aléatoire X est dite exponentielle de paramètre $\theta > 0$, notée $X \rightsquigarrow \exp(\theta)$, si sa densité est:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Sa fonction de répartition est

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x/\theta} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

- $\mathbf{E}[X] = \theta$, $\mathbf{Var}[X] = \theta^2$.

Loi Gamma

Une variable aléatoire Y est dite suit la loi Gamma de paramètre (k, θ), notée $Y \rightsquigarrow \Gamma(k, \theta)$, $k > 0$ et $\theta > 0$, si densité est:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{k-1}e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

où $s \rightarrow \Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ c'est la fonction gamma.

- $\mathbf{E}[Y] = k\theta$, $\mathbf{Var}[Y] = k\theta^2$.
- Soit $X_1, ..., X_k$ une suite de va indépendantes et identiquement distribuées (iid) $\exp(\theta)$, alors la va

$$Y = X_1 + ... + X_k \rightsquigarrow \Gamma(k, \theta).$$

Loi Beta

Une variable aléatoire Y est dite suit la loi Beta de paramètre (k, m) ,notée $Z \rightsquigarrow \mathrm{Beta}(k, m)$, $k > 0$ et $m > 0$, si sa densité est:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} \frac{x^{k-1}(1-x)^{m-1}}{\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{m-1} dx} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k)\Gamma(m)} x^{k-1}(1-x)^{m-1} \mathbf{1}(0 \leq x \leq 1).
\end{aligned}
$$

Loi Beta

Soient deux va indépendantes $X \rightsquigarrow \Gamma\left(k, \theta\right)$ et $Y \rightsquigarrow \Gamma\left(m, \theta\right)$, alors la va

$$Z = \frac{X}{X+Y} \rightsquigarrow \text{Beta}\left(k, m\right)$$

- $\mathbf{E}\left[Z\right] = k/\left(k+m\right)$, $\mathbf{Var}\left[Z\right] = km/\left(k+m\right)^2\left(k+m+1\right)$.

Loi Beta

Soit une suite de va iid $U_1, ..., U_n \rightsquigarrow U(0,1)$. On note par $U_{1:n} \leq ... \leq U_{n:n}$ les statistiques d'ordre associées, alors

$$\{U_{i:n}\}_{i=1,n} \overset{d}{=} \left\{\frac{S_i}{S_{n+1}}\right\}_{i=1,n}$$

où S_i est la somme de i va iid $\exp(1)$. Remarquons que

$$\frac{S_i}{S_{n+1}} = \frac{S_i}{S_i + S_{n-i+1}} \overset{d}{=} \frac{\Gamma(i,1)}{\Gamma(i,1) + \Gamma(n-i+1,1)} \overset{d}{=} \text{Beta}(i, n-i+1),$$

ainsi

$$U_{i:n} \rightsquigarrow \text{Beta}(n, n-i+1).$$

Loi de qui-deux

Une variable aléatoire Q est dite suit la loi de qui-deux à k degré de liberté,notée $Q \rightsquigarrow \chi^2(k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ si sa densité est:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{k/2-1}e^{-x/2}}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $\mathbf{E}[Q] = k$, $\mathbf{Var}[Q] = 2k$.

Loi de qui-deux

Soit une suite de va indépendantes $Z_1, ..., Z_k \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors

$$Q = Z_1^2 + ... + Z_k^2 \rightsquigarrow \chi^2(k).$$

Loi de qui-deux

Soit une suite de va indépendantes $X_1, ..., X_n \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$(n-1) S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2 (n-1) ,$$

où

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

En outre $\overline{X}_n$ et S_n^2 sont deux suites de va indépentantes.

Loi de Student

Soit une suite de va indépendantes $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $Q \rightsquigarrow \chi^2(k)$, alors la va

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Q/k}} \rightsquigarrow t_k,$$

suit la loi de student à k degré de liberté, sa densité est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Loi de Fisher-Snedecor

Soit une suite de va indépendantes $Q_1 \rightsquigarrow \chi^2(k_1)$ et $Q_2 \rightsquigarrow \chi^2(k_2)$, alors la va

$$F = \frac{Q_1}{Q_2} \rightsquigarrow F_{k_1,k_2},$$

suit la loi de Fisher à (k_1, k_2) degrés de liberté, sa densité est

$$f(x) = \frac{\left(\frac{k_1 x}{k_1 x + k_2}\right)^{k_1/2} \left(1 - \frac{k_1 x}{k_1 x + k_2}\right)^{k_2/2}}{x B(k_1/2, k_2/2)}, \ x \geq 0,$$

où

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, dt$$

c'est la fonction Beta.

Loi de Fisher-Snedecor

L'esperance et la variance d un fisher est

$$\mathbf{E}\left[F\right] = \frac{k_2}{k_2 - 2},\ \text{pour } k_2 > 2$$

$$\mathbf{Var}\left[F\right] = \frac{2k_2^2\left(k_1 + k_2 - 2\right)}{k_1\left(k_2 - 2\right)^2\left(k_2 - 4\right)},\ \text{pour } k_2 > 4.$$

Loi de Bernoulli

Une va discrête X est dite de Bernoulli si sa distribution de probabilité, notée $X \rightsquigarrow$Bernoulli(p) est

$$P(X=1)=p \text{ et } P(X=0)=1-p,$$

où de manière équivalente

$$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}, \text{ pour } x\in\{0,1\}.$$

- $\mathbf{E}[X]=p$, $\mathbf{Var}[X]=p(1-p)$.

Loi Binomiale

Une suite de va discrêtes indépendentes $X_1, ..., X_n \rightsquigarrow$Bernoulli$(p)$, alors

$$Y = X_1 + ... + X_n \rightsquigarrow \text{Binomiale}\,(n, p)\,,$$

suit la loi binomial de parametres (n, p). Sa distribution de probabilité est

$$P\,(X = k) = C_n^k p^k\,(1 - p)^{n-x}\,,\ \ k = 1, 2, ..., n.$$

- $\mathbf{E}\,[X] = np$, $\mathbf{Var}\,[X] = np\,(1 - p)\,.$

Loi Binomiale

Soit une va $X \rightsquigarrow F$ une loi quelconque, alors

$$\mathbf{1}\left(X \leq t\right) \rightsquigarrow \text{Bernoulli}\left(F\left(t\right)\right).$$

Soit une suite de va iid $X_1, ..., X_n \rightsquigarrow F$, alors la fonction de repartition vérifie:

$$nF_n\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\left(X_i \leq t\right) \rightsquigarrow \text{Binomiale}\left(n, F\left(t\right)\right).$$

Une va discrête X est dite de Poisson de paramètre , notée $X \rightsquigarrow \text{Pois}(\lambda)$, $\lambda > 0$, si densité est

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots$$

- $\mathbf{E}[X] = \lambda$, $\mathbf{Var}[X] = \lambda$.
- $\sum_{i=1}^{k} \text{Pois}(\lambda_i) = \text{Pois}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)$

Relation entre exponentielle et Poisson

Soit une suite de va indépendantes $E_1, E_2, ... \rightsquigarrow \exp(\lambda)$, et soit $S_k = E_1 + ... + E_k$, alors

$$P\left(S_n \leq 1 \leq S_{n+1}\right) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$