Équations de la physique mathématique

Preprint · October 2019

DOI: 10.13140/RG.2.2.20745.19044

Kelleche Abdelkarim
Université de Khemis Miliana

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djilali Bounâama

Équations de la physique mathématique

Par

Abdelkarim KELLECHE

Faculté des sciences et de la technologie

Département de mathématiques et informatique

October 10, 2020

Table de matières

Avant-propos

La compréhension de l'évolution des processus fondamentaux du l'univers se base en grande partie sur des équations aux dérivées partielles (EDPs). Les exemples les plus connus sont les vibrations des solides (cordes, membranes, plaques), l'écoulement des fluides (eau, pétrole), la diffusion des produits chimiques, la propagation de la chaleur, la structure des molécules, les interactions des photons et des électrons et le rayonnement des ondes électromagnétiques. Les EDPs jouent également un rôle important dans les mathématiques modernes, notamment en géométrie et en analyse. Ces notes du cours sur les équations de la physique mathématique s'adressent aux étudiants du premier cycle. Ce cours fournit une introduction aux notions de base des équations aux dérivées partielles (EDPs) et aux techniques efficaces pour les analyser et les résoudre. Il est destiné également pour fournir à l'étudiant des outils pour obtenir des résultats d'existence (et souvent d'unicité) pour quelques exemples des problèmes des EDPs linéaires de nature physique (elliptique, parabolique ou hyperbolique).

Ce cours est organisé en sept chapitres principaux. Dans le premier chapitre, on a rappelé les notions de base et apporté des définitions concernant ce type des équations. Des exemples des EDPs ont été formulés en utilisant des principes physiques. Le deuxième chapitre est réservé exclusivement aux équations du premier ordre dont le contenu est divisé en deux parties. Dans la première partie, on a fait un rappel important sur les systèmes différentiels, qui sert après à comprendre la manière de résoudre les EDPs du premier ordre. Ensuite, on a présenté des théorèmes sur la résolution implicites des équations quasi linéaires. Dans la seconde partie, on a introduit une méthode de la résolution de certains types des EDPs non linéaires. Ce chapitre est conclu par une étude complète sur le problème de Cauchy relative à une équation quasi linéaire où un théorème important a été démontré. Cette étude a été illustrée par des exemples d'existence et de non-existence. Le chapitre 3 concerne les équations du second ordre, leurs classifications, leurs caractéristiques et leurs formes standards. On a conclu ce chapitre par une étude sur le problème de Cauchy relative à l'EDP linéaire du second ordre illustré par des exemples. Le chapitre 4 a pour but d'étudier la méthode de séparation des variables appliquée aux équations du seconde ordre. On a commencé par introduire cette technique et ses avantages, puis on l'a appliquée à l'équation de la chaleur avec des conditions de Dirichlet et de Neumann. Dans le chapitre 5, on a étudié l'équation de la chaleur d'une seule dimension sur $\mathbb{R}$. On a exprimé la solution du problème de Cauchy en utilisant la formule de d'Alembert. Le bien posé du problème a été discuté dans les deux cas (homogène et non homogène). Dans le cas de dimension supérieure, la solution peut être exprimée en utilisant la formule de Kirchhoff. Le chapitre 6 est consacré à l'équation de Laplace. On a introduit deux de ses propriétés importantes, le principe de maximum et l'invariance par rotation. Le Chapitre 7 est réservé à l'étude de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$, on a commencé par exprimer la solution en utilisant la transformée de Fourier. Le principe de maximum a été utilisé pour démontrer l'existence, la régularité et l'unicité de la solution.

Ce cours a été présenté aux étudiants de l'Université Djilali Bounâama de Khemis Miliana, Ain Defla, Algérie de 2016 à 2019. Nous invitons notre aimable lecteur à nous envoyer leurs remarques et critiques afin de pouvoir enrichir ce document : a.kelleche@univ-dbkm.dz.

Chapitre 1

Généralités

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une relation reliant une fonction inconnue de plusieurs variables u à ses dérivées partielles. Les EDPs se trouvent dans les applications de la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie, etc. En effet, dans ces domaines, les phénomènes se modélisent souvent par des systèmes mathématiques impliquant des EDPs. Les différents processus du phénomène se décrivent en déterminant une relation entre u et ses dérivées partielles.

1.1 Concepts préliminaires

1.1.1 Equations différentielles ordinaires

L'exemple le plus simple est lorsque la fonction u dépend uniquement d'une seule variable. Alors cette relation est décrite simplement par ce qu'on appelle une EDO.

Définition 1.1

Une EDO est une relation du type

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x), ..., u^{(n)}(x)) = 0, \tag{1.1}$$

entre la variable $x \in \mathbb{R}$ (parfois $x \in I \subset \mathbb{R}$) et les dérivées de la fonction inconnue au point x telle que

$$\begin{aligned} F : (x, y) &\to F(x, y) \\ \mathbb{R}^{n+2} &\to \mathbb{R} \end{aligned}$$

avec $y = (y_0, y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, n est le nombre de variables.

Exemple 1.1

Le mouvement d'un objet sur une droite peut être décrit par l'équation

$$u''(x) = g(u(x)).$$

La variable x correspond au temps et la fonction u correspond à la position de l'objet. Dans ce cas $x \in I \subset \mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rcl} F:(x,y) & \to & F(x,y_0,y_1,y_2)=y_2-g(y_0) \\ \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}. \end{array}$$

1.1.2 Equations aux Dérivées Partielles

La généralisation de la définition précédente en mettant en jeu des fonctions de plusieurs variables permet de construire le concept d'une EDP. On commence à donner la définition d'une EDP du 1^{er} ordre.

Définition 1.2

Une équation aux dérivées partielles du 1^{er} ordre d'inconnue u de n variables indépendantes $x_1, ..., x_n$ est une équation de la forme

$$F\left(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{1.2}$$

où $(x_1, ..., x_n) \in \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Pour une fonction de deux variables, la définition est donnée par

Définition 1.3

La forme générale d'une EDP d'ordre 2 est

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{1.3}$$

pour $(x, y) \in \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1.2

L'équation suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$$

est un exemple d'EDP pour le domaine $\Omega = \mathbb{R}^2$. Cette dernière équation peut s'écrire sous la forme (1.3) ci-dessus. Il suffit de noter qu'elle est équivalente à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - (x^2 + y^2) = 0$$

où

$$\begin{array}{rcl} F:(x,y,u,z) & \to & F(x,y,z_0,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6) = z_5 - z_2^2 - z_1 z_2 - (x^2+y^2) \\ I \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}. \end{array}$$

1.1.3 Dimension et ordre d'une EDP

- **La dimension** d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u.
- **L'ordre** d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation.

Exemple 1.3

L'EDP de l'exemple 1.2 est de dimension 2 et d'ordre 2.

Exemple 1.4

L'EDP suivante

$$x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 = e^{x+y}$$

est de dimension 2 et d'ordre 3.

1.1.4 Linéarité et homogénéité

La notion de la linéarité pour les EDPs fait intervenir des opérateurs différentiels. Un opérateur différentiel est un opérateur construit à partir des dérivées partielles des fonctions différentiables.

Définition 1.4

Une EDP d'une inconnue u est dite linéaire si l'on peut la mettre sous la forme

$$Lu = f \tag{1.4}$$

où
L est un opérateur linéaire différentiel,
f est une fonction de n variables indépendantes définie sur un domaine de $\mathbb{R}^n$.
Si $f \equiv 0$, on dit que l'équation est linéaire homogène. Sinon elle est non-homogène.

Exemple 1.5

L'équation

$$u + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1$$

est linéaire non-homogène sur $\mathbb{R}^2$ car elle peut s'écrire sous la forme (1.4) où

$$Lu = u + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

est un opérateur linéaire différentiel et $f(x,y) = 1$. Vérifions la linéarité de L: Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soient u_1, u_2 deux fonctions suffisamment régulières, on a

$$\begin{aligned} L(au_1 + bu_2) &= (au_1 + bu_2) + y\frac{\partial^2(au_1 + bu_2)}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2(au_1 + bu_2)}{\partial x^2} \\ &= a\left(u_1 + y\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) + b\left(u_2 + y\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) \\ &= aL(u_1) + bL(u_2). \end{aligned}$$

Exemple 1.6

L'EDP suivante

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + xu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \sin(y)$$

où $u(x,y)$, n'est pas linéaire. En effet, l'opérateur différentiel L défini par

$$Lu = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + xu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

n'est pas linéaire et $f(x,y) = \sin(y)$. Pour vérifier cela, il suffit de prendre $a = b = 1$ et $u_1(x,y) = u_2(x,y) = x^2$. On obtient
$L(au_1 + bu_2) = 16x$ et $aL(u_1) + bL(u_2) = 4x$ et clairement $L(au_1 + bu_2) \neq aL(u_1) + bL(u_2)$.

On donne maintenant une liste des EDPs (exemples) qui découlent de problèmes physiques dont certaines seront l'objet de notre étude dans les prochaines chapitres.

1.1.5 Quelques équations de la physique mathématique

Equation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ où } u(x,t),$$

est utilisée pour modéliser la pollution de l'air, la dispersion des colorants ou même le flux de trafic.

Équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ où } u(x,t),$$

est issue de l'étude de la dynamique des gaz.

Equation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0, \text{ où } u(x,y,z,t),$$

est utilisé pour modéliser de petites oscillations, elle joue un grand rôle dans la dynamique des fluides et dans l'électromagnétisme.

Equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0, \text{ où } u(x,y,z,t),$$

est utilisée dans l'étude de la conduction thermique.
Equation de Laplace ou du potentiel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \text{ où } u(x,y,z,t),$$

apparaît notamment dans: astronomie, électrostatique, mécanique des fluides et la mécanique quantique.
Equation d'Euler-Bernoulli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \text{ où } u(x,t),$$

est utilisée dans la théorie des poutres.
Dans la prochaine section, on illustre la manière de dérivation de quelques EDPs citées ci-dessus en utilisant des lois physiques.

1.2 Construction d'une équation aux dérivées partielles

1.2.1 EDP du premier ordre (Equation de transport)

Cette équation peut être utilisée pour modéliser la pollution de l'air, la dispersion des colorants ou même le flux de trafic avec u représentant la densité du polluant (ou colorant ou trafic) à la position x et au temps t. Pour une discussion du modèle physique, on considère l'exemple tiré de [8].

Exemple 1.7

Considérons un tube très étroit de longueur l conduit de l'eau à une vitesse constante c. Supposons qu'il existe une substance chimique qui pollue de l'eau. Soit $u(t,x)$ la concentration de la substance chimique à l'instant t et à l'abscisse x.

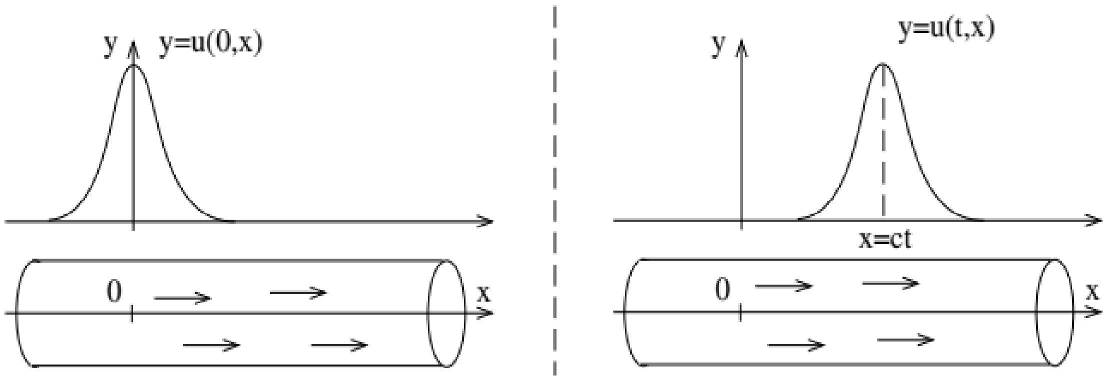

Figure 1.1: Schema de Transport d'un polluant dans l'eau

On désigne par $Q(t)$ la quantité de la substance chimique à l'instant t. L'expression de Q entre les points d'abscisse 0 et x est donnée par

$$Q(t) = \int_0^x u(t,y)dy.$$

Pendant une période h, une particule de la substance parcourt une distance ch. La quantité Q entre les points d'abscisse ch et $x+ch$ est la même quantité entre 0 et x à l'instant t. On a donc

$$Q(t) = \int_{ch}^{x+ch} u(y,t)dy = \int_{ch}^{x+ch} u(y,t+h)dy.$$

En dérivant par rapport à x, on trouve

$$u(x,t) = u(x+ch, t+h).$$

En dérivant cette fois-ci par rapport à h et posant $h = 0$, on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Exemple 1.8

Considérons un tube cylindrique, de longueur L et de rayon a, dans lequel s'écoule un liquide à vitesse constante v. Ce tube est plongé dans un bac d'eau à température τ constante. On se propose d'étudier l'évolution de la température du liquide dans le tube au cours du temps. Le tube est considéré comme suffisamment fin ($a << L$) (pour travailler avec un modèle à une dimension). Cet exemple se trouve de manière un peu différente dans [5].

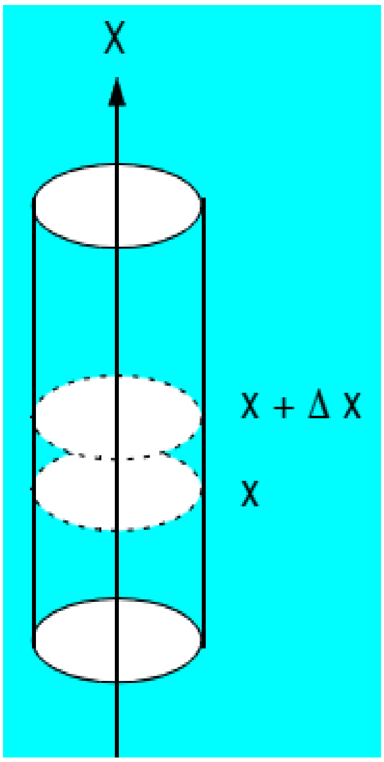

Figure 1.2: Vue schematique du tube

Soit donc $T(x,t)$ la température (exprimée par exemple en degrés) á l'endroit x dans le tube et au temps t. Examinons ce qui se passe dans une petite tranche (infinitésimale) du tube de volume $\pi a^2 \Delta x$.

L'évolution de la température au cours du temps dans cet endroit précis du tube, x, est calculée par

$$T(x, t+\Delta t) - T(x, t)$$

la quantité de chaleur ΔQ emmagasinée dans ce petit volume

$$\Delta Q = [T(x, t+\Delta t) - T(x, t)]\, C_p \pi a^2 \Delta x$$

où C_p est appelée la quantité de chaleur par degré et par unité de volume du liquide, elle dépend du liquide choisi.
D'autre part, pourquoi constate-t-on un apport ou une réduction de chaleur ? Cela provient d'une part du liquide lui-même qui circule dans le tube et du liquide dans lequel on plonge le tube, qui peut le réchauffer ou le refroidir.

$$\Delta Q = [T(x, t) - T(x+\Delta x, t)]\, C_p \pi a^2 v \Delta t + 2U\pi a \Delta x\, (\tau - T(x, t))\, \Delta t$$

où le morceau de tube parcouru par le liquide pendant le temps Δt s'écrit $v\Delta t$.
U : est une constante de proportionnalité, $2\pi a \Delta x$ est la surface extérieure du petit volume, en contact avec l'eau.
Remarquons que ΔQ peut augmenter pour deux raisons.
Réunissons les deux expressions de ΔQ

$$\begin{aligned} & [T(x, t) - T(x+\Delta x, t)]\, C_p \pi a^2 v \Delta t + 2U\pi a \Delta x\, (\tau - T(x, t))\, \Delta t \\ = \; & [T(x, t+\Delta t) - T(x, t)]\, C_p \pi a^2 \Delta x. \end{aligned}$$

Divisons tout par Δx et par Δt, puis passons à la limite sur ces deux quantités

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{[T(x, t) - T(x+\Delta x, t)]}{\Delta x} C_p \pi a^2 v + 2U\pi a\, (\tau - T(x, t)) \\ = \; & \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{[T(x, t+\Delta t) - T(x, t)]}{\Delta t} C_p \pi a^2. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$-\frac{\partial T}{\partial x} C_p \pi a^2 v + 2U\pi a\, (\tau - T) = -\frac{\partial T}{\partial t} C_p \pi a^2$$

ou encore

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha\, (\tau - T)$$

où $\alpha = \frac{2U}{aC_p}$. C'est une EDP du premier ordre (à deux variables t et x) d'inconnue T, linéaire et non homogène.

1.2.2 EDP du second ordre (Corde vibrante)

Prenons une corde de longueur l, qui subit des vibrations transversales relativement faibles. Soient $T(x, t)$ la tension dans la corde et ρ la densité (masse par unité de longueur) de la corde. Cet exemple a été traité de manière détaillé dans [5,8]. On désigne par $u(x, t)$ son déplacement transversal à l'instant t et à la position x. D'après la loi de Newton[1] pour la partie de la corde

[1] Pour un corps de masse m (constante) : l'accélération $\vec{a}$ subie par ce corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces $\vec{F}$ qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse m. Ceci est

entre deux points quelconques à $x = x_0$ et $x = x_1$. La pente de la corde en x_1 est $\partial u/\partial x(x_1, t)$. La loi de Newton s'écrit

$$\left.\frac{T\,(\partial u/\partial x)}{\sqrt{1+(\partial u/\partial x)^2}}\right|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \text{ (transversale).}$$

Maintenant, on suppose que le mouvement est faible, alors par le développement de Taylor

$$\sqrt{1+(\partial u/\partial x)^2} = 1 + \frac{1}{2}(\partial u/\partial x)^2 + ... \simeq 1$$

où les points représentent les puissances supérieures de $\partial u/\partial x$. On a négligé les quantités faibles et ses puissances supérieures. Supposons que T est indépendant de x, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

C'est

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ où } c = \sqrt{T/\rho}.$$

On verra bientôt que c est la vitesse de l'onde.

1.3 Résolution des EDPs

Résoudre une EDP dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, c'est trouver une fonction suffisamment différentiable dans Ω, telle que la relation (1.3) soit satisfaite pour toutes les valeurs des variables dans Ω. Si les différentes solutions d'une EDP s'écrivent sous la même forme, cette forme est appelée solution générale de l'équation. Comme la solution générale d'une EDO implique des constantes arbitraires, la solution générale d'une EDP implique des fonctions arbitraires.

Exemple 1.9

Résoudre l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{1.5}$$

La solution générale de cette équation sur Ω est $u(x,t) = f(x - ct)$ où f est une fonction arbitraire de classe $C^1(\mathbb{R})$. La solution est trouvée en utilisant la méthode des caractéristiques qui sera l'objet du prochain chapitre.

On donne maintenant quelque exemples des EDPs simples où on peut calculer explicitement la solution générale. Ce type des exemples apparait souvent dans les prochaines chapitres après une simplification ou une transformation.

1.3.1 Exemples de résolution des EDP simples

souvent traduit par l'équation :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

Exemple 1.10

On veut résoudre l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{1.6}$$

D'abord, on pose $v(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$, ce qui implique pour tout (x,y) que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Ceci signifie que $v(x,y)$ est constante pour tout y fixé. Alors

$$v(x,y) = C(y)$$

où C est une fonction arbitraire de y. On se ramène à trouver u telle que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = C(y).$$

Un raisonnement similaire conduit à

$$u(x,y) = C(y)x + D(y)$$

où D est une fonction arbitraire.

Exemple 1.11

On s'intéresse à trouver la solution générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0. \tag{1.7}$$

On remarque que pour y fixé, l'équation (1.7) à l'aide d'un changement de variable $v(x) = u(x,y)$ s'écrit

$$v'' + v = 0.$$

Il s'agit d'une EDO linéaire du second ordre dont la solution générale est donnée par

$$v(x,y) = A\cos x + B\sin x$$

où A, B sont des constantes arbitraires. Si on revient à u, on obtient

$$u(x,y) = A(y)\cos x + B(y)\sin x$$

d'où la solution de (1.7), A et B cette fois sont des fonctions arbitraires.

Exemple 1.12

On s'intéresse à trouver la solution générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \tag{1.8}$$

Comme dans l'exemple 1.10, on a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = C(y)$$

où C est une fonction arbitraire de y, alors

$$u(x,y) = \int C(y)dy + D(x)$$

où D est une fonction arbitraire. Si C admet une primitive E, la solution s'écrit

$$u(x,y) = E(y) + D(x).$$

Une EDP peut être transformée parfois à une forme plus simple avec une solution connue par un changement de variables approprié. Cette section discute la manière de cette transformation.

1.3.2 Méthode du changement de variables

On va premièrement énoncer la règle de chaines pour une fonction $u(\xi, \eta)$ de deux variables ξ, η elles-mêmes fonction de deux autres variables x, y.

Proposition 1.1

(Règle de chaines): Soient $w = u(\xi, \eta)$, $\xi = \xi(x,y)$ et $\eta = \eta(x,y)$ des fonctions, c'est-à-dire que w peut alors être considéré comme une fonction $u(\xi(x,y), \eta(x,y))$ de x et y. Lorsque les termes suivants sont bien définis, on peut écrire

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Exemple 1.13

Soient $w = 2\xi^2 + 3\eta^3$, $\xi = xy$ et $\eta = x + y$. Dans ce cas, la règle de chaines signifie que

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 4\xi y + 9\eta^2 = 4xy^2 + 9(x+y)^2.$$

De la même manière on peut généraliser la règle de chaines pour une fonctions de 3 variables.

On illustre cette méthode par un exemple d'application.

Exemple 1.14

Déterminons toutes les fonctions $u \in C^1\left(\mathbb{R}_+^{*2}\right)$ et satisfaisant l'équation aux dérivées partielles

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad \text{(E)}$$

On peut considérer les nouvelles coordonnées: $\xi = x$ et $\eta = xy^2$. Il est facile de vérifier que

$$\xi, \eta > 0,\ x = \xi,\ \ y = \sqrt{\eta/\xi}$$

car $x, y > 0$. Par la règle de chaines, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\eta}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 2\sqrt{\xi\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Ici il faut noter que les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ sont continues. En remplaçant x, y, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ par leurs expressions correspondantes en fonction de ξ et η dans (E), on obtient

$$2\xi\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0. \qquad \text{(E')}$$

Comme ξ est strictement positive, on obtient $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \Longrightarrow u = h(\eta)$, $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ arbitraire et dérivable. Alors

$$u = h(xy^2)$$

est la solution de (E).

1.4 Exercices

Exercice 01: Pour chacune des équations aux dérivées partielles ci-dessous, indiquer son ordre, si elle est linéaire ou non, si elle est homogène ou non

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial y} = y$; 2) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 1$; 3) $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$;

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin x$; 5) $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \sin u = e^y$.

Exercice 02: Vérifier que les fonctions suivantes $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $u(x, y) = e^x \sin y$ sont bien des solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 03:

1. Montrer que pour toute fonction $f \in C^1(\mathbb{R})$, $u(x, t) = f(x - ct)$ est solution de l'EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

2. Trouver la solution qui satisfait la condition suivante: $u(0, t) = t^2$.

3. Trouver la solution qui satisfait la condition suivante: $u(0,t) = g(t)$ telle que $g \in C^1(\mathbb{R})$.

<u>Exercice 04</u>: Déterminer la solution générale $u(x,y)$ des EDPs suivantes

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1;$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u;$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1;$
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$

<u>Exercice 05</u>: Soit $u(x,y)$, une fonction de deux variables. Considérons les nouvelles variables (r,θ) définies par les équations suivantes:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \theta = \arctan\left(y/x\right). \end{cases}$$

Noter que dans ce cas, on a aussi

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Montrer en utilisant la règle de chaines les formules suivantes:

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},$
2. $\frac{\partial u}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$

<u>Exercice 06</u>: Soit l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\left(x^2+1\right)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (E)$$

Déterminer toutes les solutions de (E) de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ en utilisant les nouvelles coordonnées

$$\xi = x \text{ et } \eta = y/(x^2+1)$$

<u>Exercice 07</u>: Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une primitive de g.

1. Déterminer toutes les solutions de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ de

$$g(y)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (E)$$

en utilisant les nouvelles coordonnées: ξ et η telles que

$$x = \xi + h(\eta) \text{ et } y = \eta.$$

2. Utiliser le résultat obtenu en (1) pour résoudre l'équation

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + \left(y^2+1\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (E')$$

<u>Exercice 08</u>: Déterminer la solution générale de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

en utilisant les nouvelles coordonnées

$$\xi = x + y \text{ et } \eta = x - y.$$

Chapitre 2

EDPs du premier ordre

2.1 Généralités

On commence ce chapitre par l'étude des systèmes différentiels du premier ordre de n équations à n inconnues. Le système s'écrit sous la forme canonique

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1\left(x_1, x_2, ..., x_n, t\right), \\ \quad\quad \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n\left(x_1, x_2, ..., x_n, t\right), \end{cases} \tag{2.1}$$

où $x_1, x_2, ..., x_n$ désignent n fonctions inconnues de la variable t. On dérive la première fonction $(n-1)$ fois, et on remplace chaque fois $\frac{dx_1}{dt}, ..., \frac{dx_n}{dt}$ par leurs expressions issues du système (2.1), on obtient un nouveau système

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1\left(x_1, x_2, ..., x_n, t\right), \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} = \varphi_1\left(x_1, x_2, ..., x_n, t\right), \\ \quad\quad \vdots \\ \frac{d^nx_1}{dt^n} = \varphi_n\left(x_1, x_2, ..., x_n, t\right). \end{cases} \tag{2.2}$$

On élimine maintenant $x_1, x_2, ..., x_n$ entre les équations de (2.2). Alors $x_1(t)$ vérifie l'équation différentielle d'ordre n suivante

$$R\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, ..., \frac{d^nx_1}{dt^n}\right) = 0. \tag{2.3}$$

La solution ou l'intégrale générale de cette équation s'écrit

$$x_1 = F_1\left(t, C_1, C_2, ..., C_n\right)$$

où $C_1, C_2, ..., C_n$ sont des constantes. L'intégrale générale du système (2.1) s'obtient en portant dans les $n-1$ premières équations de (2.2) les valeurs de $x_1, \frac{dx_1}{dt}, ..., \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}$ et en résolvant ces équations en $x_2, ..., x_n$, sans d'effectuer aucune nouvelle intégration. On obtient alors

$$\begin{cases} x_1 = F_1\left(t, C_1, C_2, ..., C_n\right), \\ \\ x_n = F_n\left(t, C_1, C_2, ..., C_n\right). \end{cases} \tag{2.4}$$

Le système (2.4) est appelé l'intégrale générale du système (2.1).

Exemple 2.1

Déterminer les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ solution du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y, \end{cases} \tag{2.5}$$

où t, une variable indépendante. On obtient alors

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{d^2x}{dt^2} = -2y + 5x. \end{cases} \tag{2.6}$$

Puis en éliminant la variable y de la deuxième équation en multipliant la première équation par 2, on se conduit à

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0. \tag{2.7}$$

D'où l'équation caractéristique : $r^2 - 2r - 3 = 0$, qui a pour racine $r = -1$ et $r = 3$. L'intégrale générale est

$$x(t) = Ae^{-t} + Be^{3t}$$

où A et B sont des constantes réelles. En portant ce résultat dans la première équation du système (2.6), on obtient sans intégration

$$y(t) = x(t) + Ae^{-t} - 3Be^{3t} = 2Ae^{-t} - 2Be^{3t}.$$

Remarquons que $x(t)$ et $y(t)$ dépendent de deux constantes arbitraires, i.e

$$x(t) = F_1(t, A, B) \text{ et } y(t) = F_2(t, 2A, -3B).$$

2.2 Intégrales premières d'un système différentiel

Dans cette section, on va caractériser les solutions du système différentiel en utilisant la notion de l'intégrale première. D'abord, on associe au système (2.1) des conditions initiales : $x_i(t_0) = x_i^0$. La résolution du système (2.4) par rapport aux constantes C_i permet d'exprimer l'intégrale générale sous la forme

$$\begin{cases} \Phi_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) = C_1, \\ \\ \Phi_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) = C_n. \end{cases} \tag{2.8}$$

Les fonctions Φ_i qui sont des constantes, dites intégrales premières du système (2.1).

Définition 2.1

On appelle intégrale première d'un système différentiel, une fonction Φ de classe C^1 des variables $x_1, x_2, ..., x_n$ non constante telle que pour toute solution $t \mapsto (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ du système différentiel, la fonction $\Phi \mapsto f(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ =Constante.

Trouver des intégrales premières pour un système différentiel n'est pas toujours facile. Cela est parfois possible grâce à la relation suivante

Remarque 2.1

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et λ des réels vérifiant la relation suivante

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda.$$

Alors, pour tout couple de réels (a, b) vérifiant $a\beta + b\delta \neq 0$

$$\frac{a\alpha + b\gamma}{a\beta + b\delta} = \frac{a\lambda\beta + b\lambda\delta}{a\beta + b\delta} = \lambda. \tag{2.9}$$

Exemple 2.3

Déterminer les intégrales premières du système suivant

$$\begin{cases} t\frac{dx}{dt} + x + 2y = 0, \\ t\frac{dy}{dt} - 3x - 4y = 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

puis donner les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ solutions de ce système.
On peut réécrire le système (2.10) sous la forme

$$\frac{dt}{t} = -\frac{dx}{x + 2y} = \frac{dy}{3x + 4y}. \tag{2.11}$$

On va maintenant chercher 2 intégrales premières pour le système (2.11). La relation (2.9) permet d'écrire

$$\frac{dt}{t} = -\frac{(-3)\,dx}{(-3)\,(x + 2y)} = \frac{(-2)\,dy}{(-2)\,(3x + 4y)} = \frac{3dx + 2dy}{3x + 2y} = \frac{d\,(3x + 2y)}{3x + 2y}. \tag{2.12}$$

On tire de cette relation que

$$d\,(\log t) = d\,[\log\,(3x(t) + 2y(t))]$$

où $d\,(.)$ désigne la différentielle d'une fonction. Alors $u(t) = \log\,(3x(t) + 2y(t))$ et $v(x) = \log t$ ont la même différentielle. Alors

$$\log\left(\frac{3x(t) + 2y(t)}{t}\right) = K$$

ce qui donne

$$\Phi_1\,(t, x, y) = \frac{3x + 2y}{t} = C_1$$

d'où la première intégrale première du système (2.10) est obtenue. D'autre part, le système (2.11) donne

$$\frac{dt}{t} = -\frac{dx}{x + 2y} = \frac{dy}{(3x + 4y)} = \frac{d\,(x + y)}{2\,(x + y)}. \tag{2.13}$$

Remarquons que les fonctions $\log\,(x(t) + 2y(t))$ et $v(x) = \log t$ ont des différentielles proportionnelles, on a donc

$$\Phi_2\,(t, x, y) = \frac{x + y}{t^2} = C_2$$

est une intégrale première du système (2.10). Maintenant, si on veut chercher explicitement les expressions de $x(t)$ et $y(t)$, il suffit de considérer le système suivant

$$\begin{cases} 3x + 2y = C_1 t, \\ x + y = C_2 t^2. \end{cases}$$

On somme la $2^{ème}$ équation multipliée par (-2) et la $1^{ère}$ équation, on obtient

$$x(t) = C_1 t - 2C_2 t^2.$$

Remplaçons $x(t)$ par son expression dans la $2^{ère}$ équation, on trouve

$$y(t) = C_2 t^2 - C_1 t + 2C_2 t^2.$$

2.3 EDPs quasi linéaire du premier ordre

Dans cette section, on s'intéresse à la résolution des EDPs du premier ordre. On va voir que la résolution de ses équations se ramène à la résolution de son système caractéristique. Le système caractéristique est un système différentiel dont lequel la solution s'exprime en utilisant les intégrales premières. On s'intéresse à l'étude des équations linéaires en $\frac{\partial u}{\partial x}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}$, il s'agit des EDPs quasi linéaires du 1^{er} ordre. Au début, on s'intéresse aux EDPs quasi linéaires du 1^{er} ordre en dimension 2.

Définition 2.2

On appelle équation aux dérivées partielles quasi-linéaire du premier ordre, d'inconnue u, une équation de la forme

$$a_1(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + a_n(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x_1, ..., x_n, u) \tag{2.14}$$

pour $(x_1, ..., x_n) \in \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les coefficients $a_1, ..., a_n$ et le seconde membre f sont des fonctions données. En dimension 2, l'équation (2.14) prend la forme

$$a(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \qquad (\mathcal{E})$$

pour $(x, y) \in \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les fonctions a, b, c supposées de classe C^1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Au moins l'un des fonctions a ou b n'est pas identiquement nulle.

Exemple 2.4

L'équation

$$x\,(y - u)\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,(u - x)\,\frac{\partial u}{\partial y} = (x - y)\,u$$

est quasi-linéaire du premier ordre en 2 dimensions.

2.4 Construction de solutions

En géométrie, une surface S de $\mathbb{R}^3$, a pour équation $\varphi(x,y,z)$ =Constante. Lorsqu'il existe un voisinage où $\varphi(x,y,z)=0$ peut être résolue en z, on est ramené, à l'équation cartésienne $z=f(x,y)$. On interprète la solution u de $(\mathcal{E})$ comme une surface de $\mathbb{R}^3$. Analytiquement, on cherche les solutions de $(\mathcal{E})$ sous forme implicite, il s'agit de chercher une fonction φ de classe C^1 définie sur un ouvert V de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$((x,y,z)\in V \text{ et } \varphi(x,y,z)=\text{Const}) \Leftrightarrow ((x,y)\in\Omega \text{ et } z=u(x,y)).$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites, on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}},$$

en tout point où $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$. On constate alors que si u est solution de $(\mathcal{E})$, alors φ est solution de l'équation

$$a(x,y,u(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b(x,y,u(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial y}+c(x,y,u(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0.$$

Devisons l'équation par a, on trouve

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{b(x,y,z)}{a(x,y,z)}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{c(x,y,z)}{a(x,y,z)}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0. \tag{2.15}$$

D'un autre coté, on a

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=0. \tag{2.16}$$

Par identification de (2.15) et (2.16), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y,z)}{a(x,y,z)}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{c(x,y,z)}{a(x,y,z)}, \end{cases}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{dx}{a(x,y,z)}=\frac{dy}{b(x,y,z)}=\frac{dz}{c(x,y,z)}. \qquad (\mathbf{S})$$

D'après (2.15) et (2.16), la fonction φ est donc une intégrale première du système $(\mathbf{S})$. Ce système est appelé "système caractéristique" de l'équation aux dérivées partielles $(\mathcal{E})$.

Théorème 2.1

L'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ est constitué des intégrales premières du système $(\mathbf{S})$. En plus, si Φ_1 et Φ_2 sont une paire des intégrales premières indépendantes, alors la solution générale de $(\mathcal{E})$ peut être écrite explicitement comme

$$F\left(\Phi_1(x,y,u(x,y)),\Phi_2(x,y,u(x,y))\right)=\text{Constante}.$$

où F désigne une fonction arbitraire régulière de deux variables.

Exemple 2.5

Considérons l'équation

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - (y + 2u)\frac{\partial u}{\partial y} = 3y + 4u.$$

Le système caractéristique est

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y + 2z} = \frac{dz}{3y + 4z}.$$

D'après l'exemple 2.3, les intégrales premières sont données par

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{3y + 2z}{x}, \; \Phi_2(x, y, z) = \frac{y + z}{x^2}.$$

Les fonctions de la forme $(x, y, z) \mapsto \Psi(x, y, z) = F(\Phi_1(x, y, z), \Phi_2(x, y, z))$ décrivent l'ensemble des intégrales premières. On peut donc donner les solutions u sous forme implicite

$$(x, y, u) \mapsto F\left(\frac{3y + 2u}{x}, \frac{y + u}{x^2}\right) = \text{Constante}.$$

Définition 2.3

On appelle courbes caractéristiques (C) de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre $(\mathcal{E})$ les solutions de son système caractéristique $(\mathbf{S})$.

Exemple 2.6

Soit à résoudre

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Le système caractéristique est

$$\begin{cases} \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}, \\ dz = 0. \end{cases}$$

Les intégrales premières sont données par

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) &= z, \\ \Phi_2(x, y, z) &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Alors, les courbes caractéristiques associées à cette équation sont définies comme l'intersection de deux surfaces de $\mathbb{R}^3$

$$S_1 = \{(x, y, z) : z = c_1, \; c_1 \in \mathbb{R}\}$$

et

$$S_2 = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = c_2, \; c_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

ce qui donne

$$C = S_1 \cap S_2 = \left\{(x, y, z) : z = c \text{ et } x^2 + y^2 = c, \; c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Toutes les solutions sont donc définies implicitement par

$$(x,y) \mapsto F\left(x^2+y^2, u\left(x,y\right)\right) = \text{Constante.}$$

D'après le théorème des fonctions implicites, on obtient

$$u\left(x,y\right) = g\left(x^2+y^2\right)$$

pour une certaine fonction g de classe C^1.

2.5 Généralisation au cas de n dimensions

Considérons l'équation aux dérivées partielles quasi-linéaire du premier ordre, d'inconnue u

$$a_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2} +,...,+ a_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x_1,...,x_n,u) \quad (2.17)$$

qui l'on associe son système différentiel (**S**)

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,...,x_n,z)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1,...,x_n,z)} = ... = \frac{dx_n}{a_n(x_1,...,x_n,z)} = \frac{dz}{f(x_1,...,x_n,z)}.$$

La résolution de (2.17) revient donc à chercher n intégrales premières indépendantes Φ_1, Φ_2, . . ., Φ_n du système (**S**). L'ensemble des solutions de l'équation (2.17) est représentée par une fonction de n intégrales premières du système (**S**)

$$F\left(\Phi_1(x_1,...,x_n,u\left(x_1,...,x_n\right)),...,\Phi_n(x_1,...,x_n,u\left(x_1,...,x_n\right))\right) = \text{Constante.}$$

Exemple 2.7

Soit à résoudre

$$yz\frac{\partial u}{\partial x} + xz\frac{\partial u}{\partial y} - xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

On cherche des fonctions φ définissant implicitement u

$$\varphi(x,y,z,w) = \text{Constante} \Leftrightarrow w = u(x,y,z).$$

Le système caractéristique est

$$\begin{cases} \frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = -\frac{dz}{xy}, \\ w = 0. \end{cases}$$

Les intégrales premières sont données par

$$\Phi_1\left(x,y,z,w\right) = w,\ \ \Phi_2\left(x,y,z,w\right) = x^2-y^2,\ \ \Phi_3\left(x,y,z,w\right) = y^2+z^2.$$

Toutes les solutions sont donc définies implicitement sous la forme

$$(x,y) \mapsto F\left(x^2-y^2, y^2+z^2, u\left(x,y,z\right)\right) = \text{Constante.}$$

D'après le théorème des fonctions implicites, on obtient

$$u\left(x,y,z\right) = g\left(x^2-y^2, y^2+z^2\right)$$

pour une certaine fonction g de classe C^1.

2.6 Conditions aux limites

Une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs prises par les solutions d'une EDP. La donnée d'une condition aux limites permet de déterminer une solution répondant à certaines conditions physiques.

Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^n, n,$ Γ sa frontière et G une fonction donnée:

- Lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières, dans ce cas on donne une condition de type frontière

$$u(x,y) = G(x,y),\ \forall (x,y) \in \Gamma = \delta(D).$$

- Si l'une des variables désigne une position dans un repère spatial et l'autre est le temps: une condition de type frontière est associée à une fonction connue G

$$u(0,t) = G(t),\ \forall t \geq 0$$

et une condition initiale est associée à une fonction connue F

$$u(x,0) = F(x),\ \forall t \geq 0.$$

Exemple 2.8

On considère l'exemple de l'équation de transport. On cherche des solutions$u\left(t,x\right)$ qui vérifient

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ t > 0 \text{ et } x \in \left(0,l\right),\ l > 0, \\ u(0,x) = u_0\left(x\right),\ \text{Condition initiale} \\ u(t,0) = u_1\left(t\right),\ \text{Condition à la limite.} \end{cases}$$

où u_0 et u_1 sont des fonctions données

Définition 2.4

En mathématiques, un problème est dit bien posé s'il a une solution et si cette solution est unique.

2.7 Problème de Cauchy

Soit (C) une courbe régulière de $\mathbb{R}^2$ et soit g une fonction analytique sur C.

Définition 2.5

Le problème de Cauchy sur la courbe (C), est un problème constitué de l'équation

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u) \qquad (\mathcal{E})$$

dont on cherche une solution vérifiant

$$u(x,y) = g(x,y) \text{ sur } (C). \qquad (CL)$$

Théorème 2.2

Si la courbe (C) n'est pas caractéristique, alors le problème de Cauchy admet une solution unique.

Preuve

On note ici qu'on s'intéresse uniquement à montrer l'existence de la solution du problème de Cauchy. La méthode est basé sur le développement de Taylor en construisant une solution sous forme d'une série entière convergente. On commence à donner une paramétrisation de la courbe (C) par

$$\begin{cases} x = x_0(s), \\ y = y_0(s), \ \ s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} u(x_0(s), y_0(s)) &= g(x_0(s), y_0(s)) = G(s), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0(s), y_0(s)) &= h_1(x_0(s), y_0(s)) = H_1(s), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0(s), y_0(s)) &= h_2(x_0(s), y_0(s)) = H_2(s). \end{aligned}$$

L'équation $(\mathcal{E})$ permet d'obtenir

$$a(x_0(s), y_0(s), G(s))H_1(s) + b(x_0(s), y_0(s), G(s))H_2(s) = c(x_0(s), y_0(s), G(s)).$$

De même, la condition (CL) donne

$$g(x_0(s), y_0(s)) = g_0(s).$$

La dérivée tangentielle de u est donnée par

$$\frac{dG}{ds} = \frac{dx_0}{ds}H_1(s) + \frac{dy_0}{ds}H_2(s).$$

On a donc le système matriciel suivant

$$\begin{pmatrix} a(x_0(s), y_0(s), G(s)) & b(x_0(s), y_0(s), G(s)) \\ \frac{dx_0}{ds} & \frac{dy_0}{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(x_0(s), y_0(s), G(s)) \\ \frac{dG}{ds} \end{pmatrix}.$$

Pour que ce système linéaire de 2 équations à 2 inconnues ait une solution unique il faut et il suffit que le déterminant soit non nul, d'où

$$a(x_0(s), y_0(s), G(s))\frac{dy}{ds} - b(x_0(s), y_0(s), G(s))\frac{dx}{ds} \neq 0$$

ce qui s'interprête en disant que C ne doit pas être une courbe caractéristique. Comme on a supposé que la fonction g est analytique et la courbe (C) est régulière, la fonction

u admet un développement limité

$$\begin{aligned} u(x_0+dx,y_0+dy) &= u(x_0,y_0)+\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)dy \\ &\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)dy^2\right) \\ &\quad +.... \end{aligned}$$

Comme on a vu si la courbe (C) n'est pas caractéristique, il est possible de déterminer les dérivées partielles premières des inconnues le long de (C). Dans le cas où tous les coefficients et la donnée de Cauchy sont analytiques et si (C) est une courbe régulière, on peut en réitérant le même procédé, déterminer les dérivées partielles à tous les ordres et en tout point de (C). La série entière ainsi obtenue en chaque point de (C) est convergente dans un voisinage du point de (C) considéré.

Remarque 2.2

D'après Théorème 2.2, la construction d'une solution explicite n'est pas souvent disponible. On peut donner juste un développement sous forme d'une série entière au voisinage de (C). Dans le cas d'une EDP linéaire homogène, on peut trouver la solution explicite comme dans l'exemple 2.8 et les exercice 6, 7 et 8.

Exemple 2.9

On considère maintenaient le problème de Cauchy associé à l'équation de transport. On cherche des solutions $u\,(t,x)$ qui vérifient

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0, \ t>0 \text{ et } x\in\mathbb{R}, \\ u(0,x)=u_0\,(x)\,, \ x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Les solutions sont des fonctions définies dans $\Omega=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. La donnée de Cauchy est définie sur la courbe

$$C=\{(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R} : t=0\}\,.$$

Cette courbe n'est pas caractéristique, donc d'après Théorème 2.2 ce problème admet une solution unique. Les caractéristiques sont des droites d'équations $x-ct=k$ avec $k\in\mathbb{R}$. On donne maintenant une paramétrisation des courbes caractéristiques comme les courbes de $\mathbb{R}^2$ définies par $(t_c(s),x_c\,(s))$ telles que

$$\begin{cases} t_c'(s)=1, \\ x_c'(s)=c, \\ z_c'(s)=0. \end{cases}$$

On voit que le long des caractéristiques, la solution vérifie

$$\frac{d}{ds}u\,(t_c\,(s)\,,x_c\,(s))=t_c'\,(s)\,\frac{\partial u}{\partial t}\,(t_c\,(s)\,,x_c\,(s))+x_c'\,(s)\,\frac{\partial u}{\partial x}\,(t_c\,(s)\,,x_c\,(s))=0$$

ce qui implique que les solutions sont constantes le long des caractéristiques. Soit (t_0,x_0) un point du plan correspondant à $s=s_0$ avec $t_c>0$. Soit $(t_*\,(s)\,,x_*\,(s))$ la caractéristique passant par ce point, alors, elle vérifie

$$\begin{cases} t'_*(s) = 1, \\ x'_*(s) = c, \\ z'_*(s) = 0, \\ t_*(s_0) = t_0, x_*(s_0) = x_0, z_c(s_0) = u_0(x_0). \end{cases}$$

La solution est alors

$$\begin{cases} t_*(s) = s + t_0 - s_0, \\ x_*(s) = cs + x_0 - cs_0, \\ z_*(t) = u_0(x_0). \end{cases}$$

Pour $t = 0$, ceci donne

$$\begin{cases} s = s_0 - t_0, \\ x_*(t) = x_0 - ct_0, \end{cases}$$

et on a pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$u(t_*(s), x_*(s)) = u(t_*(s_0 - t_0), x_*(s_0 - t_0)) = u(0, x_0 - ct_0) = u_0(x_0 - ct_0)$$

et on a aussi

$$u(t_0, x_0) = u(t_*(s_0), x_*(s_0)) = u_0(x_0 - ct_0).$$

On obtient donc pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$u(t, x) = u_0(x_0 - ct_0).$$

Il est largement connu que nombreux phénomènes dans des domaines différents sont décrits généralement par des EDPs du premier ordre non linéaires, rappelons quelques unes: équation de Burgers, équation iconale, équation de transport avec une vitesse variable.

2.8 EDPs du premier ordre non linéaires

Dans cette section, on s'intéresse à résoudre des EDPs ayant la forme suivante

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{2.18}$$

L'équation (2.18) est souvent écrite à l'aide de notation standard $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial u}{\partial y}$. Pour simplicité, les dérivées partielles seront notées par u_x, u_y..... L'exemple le plus approprié est celui de l'équation iconale, qui est utilisée en optique géométrique.

Exemple 2.10

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = a^2.$$

où a est une constante réelle. La résolution de cette équation passe par les étapes suivantes.
Etape 1 : A l'équation (2.18), associons une seconde équation de la forme

$$G(x, y, u, p, q) = \lambda \tag{2.19}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Voir le prochain exemple pour la construction de telle fonction G. La méthode de résolution de ce type des équations est basée d'abord sur la construction d'une EDP du premier ordre dont l'inconnue est G.

Etape 2: Condition de compatibilié

On tire p et q des deux équations (2.18) et (2.19). Ce sont des fonctions de x, y et u, c-à-d $p = p(x, y, u)$, $q = q(x, y, u)$ et l'on écrit

$$du = pdx + qdy.$$

D'après Théorème de Schwarz[1], on obtient

$$\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial u}. \tag{2.20}$$

Cette équation on l'appelle souvent " condition de compatibilité ". On calcule les dérivées de p et q en dérivant les 2 équations par rapport à x, y et u, considérées comme variables indépendantes

$$\begin{cases} F_x + \frac{\partial p}{\partial x}F_p + \frac{\partial q}{\partial x}F_q = 0, \\ F_y + \frac{\partial p}{\partial y}F_p + \frac{\partial q}{\partial y}F_q = 0, \\ F_u + \frac{\partial p}{\partial u}F_p + \frac{\partial q}{\partial u}F_q = 0, \\ G_x + \frac{\partial p}{\partial x}G_p + \frac{\partial q}{\partial x}G_q = 0, \\ G_y + \frac{\partial p}{\partial y}G_p + \frac{\partial q}{\partial y}G_q = 0, \\ G_u + \frac{\partial p}{\partial u}G_p + \frac{\partial q}{\partial u}G_q = 0. \end{cases}$$

On a ainsi

$$\begin{cases} (F_pG_q - F_qG_p)\frac{\partial p}{\partial y} = F_qG_y - F_yG_q \\ (F_pG_q - F_qG_p)\frac{\partial q}{\partial x} = F_xG_p - F_pG_x \\ (F_pG_q - F_qG_p)\frac{\partial p}{\partial u} = F_qG_u - F_uG_q \\ (F_pG_q - F_qG_p)\frac{\partial q}{\partial u} = F_uG_p - F_pG_u. \end{cases}$$

Comme F et G ne sont pas liées, on a

$$F_pG_q - F_qG_p \neq 0.$$

La condition de compatibilité (2.20) s'écrit donc

$$F_qG_y - F_yG_q + q\left(F_qG_u - F_uG_q\right) = F_xG_p - F_pG_x + p\left(F_uG_p - F_pG_u\right) = 0$$

soit

$$F_pG_x + F_qG_y + \left(pF_p - qF_q\right)G_u - \left(F_x + pF_u\right)G_p - \left(F_y + qF_u\right)G_q = 0. \tag{2.21}$$

Etape 3: Système caractéristique

L'équation (2.21) est une équation aux dérivées partielles, linéaire, homogène de la fonction G de 5 variables. Le système caractéristique associé est

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_u} = \frac{dq}{F_y + qF_u}.$$

Toute intégrale première de ce système contenant effectivement p ou q fournit une fonction $G(x, y, u, p, q)$.

Etape 4: Construction de la solution

[1]Soient $A \in \Omega$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$ et une f une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si les dérivées successives $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont continues, alors on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A)$.

Il n'est pas nécessaire de connaitre toutes les intégrales premières. Il suffit d'en connaitre une, puis on intègre le système

$$\begin{cases} F = 0 \\ G - \lambda = 0. \end{cases}$$

On tire alors p et q et on intègre la différentielle

$$du = pdx + qdy.$$

Exemple 2.11

Reprenons maintenant l'équation de l'exemple 2.10 et posons $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y}$ et $F(x, y, u, p, q) = p^2 + q^2 - a^2$. On doit résoudre $p^2 + q^2 = a^2$. On a

$$F_x = F_y = F_u = 0, F_p = 2p, F_q = 2q.$$

Le système caractéristique associé est

$$\begin{cases} \frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{du}{2(p^2+q^2)} \\ dp = dq = 0. \end{cases}$$

D'où

$$p = C_1$$

et

$$q = C_2.$$

D'autre part

$$\frac{dx}{C_1} = \frac{dy}{C_2} \Rightarrow \frac{x}{C_1} - \frac{y}{C_2} = C_3$$

et

$$\frac{dx}{C_1} = \frac{du}{(p^2 + q^2)} \Rightarrow \frac{dx}{C_1} = \frac{du}{a^2} \Rightarrow \frac{x}{C_1} - \frac{u}{a^2} = C_4.$$

Parmi ces quatre intégrales premières, il suffit d'en choisir une seule pour résoudre le problème. Prenons par exemple $p = C_1$, on doit intégrer le système

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = a^2 \\ p = C_1. \end{cases}$$

Si on pose $C_1 = a \cos \lambda$ alors

$$\begin{cases} p = a \cos \lambda = \frac{\partial u}{\partial x} \\ q = a \sin \lambda = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

d'où

$$du = a \cos \lambda dx + a \sin \lambda dy$$

ce qui donne

$$u = ax \cos \lambda + ay \sin \lambda + \mu$$

où μ une constante arbitraire.

2.9 Exercices

Systèmes differentiels, intégrales premières

Exercice 01: Résoudre les systèmes différentiels suivants

1. $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy^2}$;
2. $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = -\frac{xdz}{z^2}$;
3. $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y+2z} = \frac{dz}{3y+4z}$.

EDPs du 1^{er} ordre

Exercice 02: Résoudre les EDPs quasilinéaires suivantes

1. $x\frac{\partial u}{\partial x} + 2(y-a)\frac{\partial u}{\partial y} = y$;
2. $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{u^2}{x}$
3. $u\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{1-u^2}$;
4. $(y+u)\frac{\partial u}{\partial x} + (u+x)\frac{\partial u}{\partial y} = x+y$.

EDPs du 1^{er} ordre nonlinéaie

Exercice 03: Résoudre l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

avec la condition $u(x,0) = x$

Exercice 04: Trouver la solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0$$

sujet à la condition $u(x,0) = cx$, où c est une constante.

Dimension superieur

Exercice 05: Résoudre les EDPs quasilinéaires suivantes

1. $yz\frac{\partial u}{\partial x} + xz\frac{\partial u}{\partial y} - xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0$
2. $-y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} + (1+z^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 3zu$,
3. $yz\frac{\partial u}{\partial x} + xz\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} + xyz = 0$,
4. $x\,(cu-by)\,\frac{\partial u}{\partial x} + y(ax-cu)\frac{\partial u}{\partial y} = u(by-ax)$.

Problème de Cauchy

Exercice 06: Soit le problème

$$\begin{cases} y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ u(0,y) = e^{-y^2}. \end{cases}$$

1. Déterminer les courbes caractéristiques de cette équation. Tracez-les soigneusement.

2. Démontrer que la solution est constante le long des courbes caractéristiques.

3. Résoudre l'équation lorsque c'est possible. Que manque-t-il pour fermer le système ?

Exercice 07: Soit

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{t.q.} x > 0; y > 0\}.$$

On considère alors sur Ω le problème

$$\begin{cases} 2y\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), \ x > 0. \end{cases}$$

1. Rappeler ce qu'une solution de cette EDP vérifie le long des courbes caractéristiques.

2. Déterminer les courbes caractéristiques et tracez-les soigneusement.

3. Montrer que les solutions de l'EDP sont : $u(x, y) = f(y^2 - x)$.

4. Expliquer pourquoi ce problème n'est pas bien posé.

Exercice 08: On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ le problème

$$\begin{cases} y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Rappeler ce qu'une solution de cette EDP vérifie le long des courbes caractéristiques.

2. Montrer qu'il s'agit de demi-cercles.

3. Quelle condition doit vérifier f pour qu'il y ait existence d'une solution ?

4. Déterminer les solutions de l'EDP dans le cas $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^4}$.

Chapitre 3

Equations aux dérivées partielles du second ordre

Beaucoup de problèmes physiques liés à la mécanique des fluides, au transfert de chaleur, à la dynamique et à l'électromagnétisme sont décrits par des EDPs de second ordre. Par conséquent, l'étude de leur méthodes de résolution est très importante pour résoudre les problèmes du monde réel.

3.1 Classification des équations

Définition 3.1

On appelle équation aux dérivées partielles semi-linéaire du second ordre, d'inconnue u sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, une équation de la forme

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (\mathcal{E})$$

où a, b, c sont des fonctions données, et F une fonction définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

La classification des EDPs du second ordre est issue de la classification de l'équation quadratique des sections coniques en géométrie analytique. L'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

représente l'hyperbole, la parabole ou l'ellipse selon le signe de $b^2 - 4ac$ (positif, nul ou négatif). Alors, La classification de l'équation $(\mathcal{E})$ dépend des coefficients $a(x,y)$, $b(x,y)$ et $c(x,y)$ en un point donné (x,y). Conséquemment, on donne la définition suivante

Définition 3.2

Soit $\Delta(x,y) = b^2(x,y) - 4a(x,y)c(x,y)$, on a les cas suivants

1. Si $\Delta(x,y) > 0$, l'équation est dite hyperbolique.
2. Si $\Delta(x,y) = 0$, l'équation est dite parabolique.
3. Si $\Delta(x,y) < 0$, l'équation est dite elliptique.

Exemple 3.1

L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

est une équation hyperbolique sur le domaine $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ car $\Delta(t,x) = b^2(t,x) - 4a(t,x)c(t,x) = 4c^2 > 0$.

Exemple 3.2

Pour l'équation

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x+y),$$

$\Delta(x,y) = -3x^2y^2$. Donc si $x = 0$ ou $y = 0$, Δ s'annule. Alors sur le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ cette EDP est parabolique et elliptique sur $\mathbb{R}^2 \backslash D$.

Pour transformer l'équation $(\mathcal{E})$ en une forme canonique, on a besoin de faire un changement de variables indépendantes.

3.2 Changement de variables

Proposition 3.1

On considère le changement de variables $(\xi(x,y), \eta(x,y))$ supposé deux fois continument différentiable et tel que le Jacobien J ne s'annule pas, alors il existe des fonctions a', b', c' et F' telles que

$$a'(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b'(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c'(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F'\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \qquad (\mathcal{E}')$$

L'équation $(\mathcal{E}')$ s'appelle la forme standard ou canonique de l'équation $(\mathcal{E})$. De plus, on a

$$\Delta'(\xi,\eta) = b'^2(\xi,\eta) - 4a'(\xi,\eta)c'(\xi,\eta) = J^2\Delta(x,y).$$

Preuve

On pose $u(x,y) = v(\xi(x,y), \eta(x,y))$. On va écrire maintenant les différents dérivées dans l'équation $(\mathcal{E})$ en fonction des dérivées partielles de la fonction v. Pour cela, on utilise la règle de chaines pour exprimer les dérivées premières

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}.\end{aligned}$$

On base sur les deux équations précédentes et encore une fois sur la règle de chaines, on exprime les dérivées secondes comme suit

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial xy} &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta}.\end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans $(\mathcal{E})$, l'équation suivante est obtenue

$$a'(x,y)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + b'(x,y)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + c'(x,y)\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = F'\left(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial \xi},\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) \qquad (\mathcal{E}')$$

où

$$a' = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$b' = 2a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + b\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right] + 2c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right),$$

$$c' = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}F'\left(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial \xi},\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) &= a\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \xi} + a\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta} + b\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial \xi} \\ &\quad + b\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta} + c\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \xi} + c\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta} \\ &\quad + F''\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial v}{\partial \xi},\frac{\partial v}{\partial \eta}\right).\end{aligned}$$

L'équation $\mathcal{E}'$ est une EDP du second ordre dont son type est déterminer à l'aide de la formule suivante

$$b'^2(\xi,\eta) - 4a'(\xi,\eta)c'(\xi,\eta) = J^2\left(b^2(x,y) - 4a(x,y)c(x,y)\right)$$

comme $J \neq 0$, les deux équations $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont de même type.

3.3 Forme standard ou canonique

L'écriture d'une EDP du second ordre sous la forme canonique permet de la mettre sous une forme plus simple. Elle consiste d'éliminer certaines dérivées secondes. Cette procédure va aider à chercher des solutions comme l'équation des ondes (voir chapitre 6). La forme canonique d'une EDP du second ordre dépend du type de l'équation. Pour cela on a besoin d'introduire la notion d'une courbe caractéristique associe à l'équation $\mathcal{E}$.

Définition 3.3

Une caractéristique de l'équation $(\mathcal{E})$ est la courbe satisfaisant à l'équation différentielle

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0. \tag{3.1}$$

Dans ce qui suit, on traite chaque cas indépendamment en donnant la forme correspondante.

3.3.1 Cas hyperbolique

Soit $(\mathcal{E}_h)$ une équation de type hyperbolique. On sait que dans ce cas $b^2 - 4ac > 0$ et par conséquent l'équation (3.1) admet deux solutions séparées. Donc, il existe deux courbes caractéristiques réelles des équations $\psi_1(x,y) = c_1$ et $\psi_2(x,y) = c_2$ pour l'équation (3.1).

Théorème 3.1

Les équations des courbes caractéristiques sont données par

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

En posant $\xi = \psi_1(x,y)$ et $\eta = \psi_2(x,y)$ où ψ_i, $i = 1, 2.$, la forme canonique de $(\mathcal{E}_h)$ s'écrit

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = G\left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

Preuve

On cherche des coordonnées $(\xi,\ \eta)$ tels que $a' = 0$ ou $c' = 0$. Les expressions de a' et c' sont de la même forme

$$a\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Par factorisation, on obtient

$$\frac{1}{a}\left[a\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\right]\left[a\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\right] = 0.$$

Par conséquent, on doit résoudre les équations linéaires suivantes

$$2a\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = 0$$

et

$$2a\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)=0.$$

Les deux équations sont linéaires homogènes, ψ est constante sur chaque caractéristique. Les caractéristiques sont des solutions de l'équation

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Celles-ci sont appelées les équations caractéristiques. En trouvant les solutions de ces deux équations, on a les deux courbes caractéristiques $\psi_i\left(x,y\right)=C_i$, $i=1,2$.
En posant $\xi\left(x,y\right)=\psi_1\left(x,y\right)$ et $\eta\left(x,y\right)=\psi_2\left(x,y\right)$, on aura un bon changement de coordonnées qui simplifiera l'équation $(\mathcal{E})$ à l'équation $(\mathcal{E}')$ avec $a'=b'=0$. En dévisant par b', on obtient la première forme standard

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}=G\left(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial \xi},\frac{\partial v}{\partial \eta}\right). \tag{3.2}$$

Exemple 3.3

Considérons l'équation suivante

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$\Delta\left(x,y\right)=b^2(x,y)-4a(x,y)c(x,y)=4x^2y^2$. Donc si $x=0$ ou $y=0$, cette EDP est parabolique au point (x,y), sinon elle est hyperbolique au point (x,y). Considérons un domaine D pour lequel l'EDP est hyperbolique à tous ses points. A ces points, les équations caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0\pm\sqrt{4x^2y^2}}{2y^2}=\pm\frac{x}{y}$$

En utilisant la méthode de séparation de variables, on obtient: $\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)=C_1$ et $\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)=C_2$. C_1 et C_2 sont des constantes. Les courbes caractéristiques sont

$$\begin{cases}\varphi_1\left(x,y\right)=x^2+y^2,\\ \varphi_2\left(x,y\right)=x^2-y^2.\end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases}\xi=x^2+y^2,\\ \eta=x^2-y^2.\end{cases}$$

et $u(x,y)=v(\xi,\eta)$. En utilisant ce changement de coordonnées, on obtient

$$\begin{cases}x^2=\eta-\xi,\\ y^2=\xi+\eta.\end{cases}$$

Par la règle de chaînes, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=-x\frac{\partial v}{\partial \xi}+x\frac{\partial v}{\partial \eta},\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=y\frac{\partial v}{\partial \xi}+y\frac{\partial v}{\partial \eta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-x\frac{\partial v}{\partial \xi}+x\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\\ &= x^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-2x^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}+x^2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}-\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial v}{\partial \xi}+y\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\\ &= y^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+2y^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}+y^2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\end{aligned}$$

et finalement

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-4x^2y^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}-\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial v}{\partial \xi}+\left(y^2-x^2\right)\frac{\partial v}{\partial \eta}=0$$

ce qui implique aprés simplification

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}=\frac{\eta}{2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{\xi}{2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial v}{\partial \eta}.$$

C'est la forme canonique de l'EDP aux points pour lesquels celle-ci est hyperbolique.

3.3.2 Cas parabolique

Soit $(\mathcal{E}_p)$ une équation hyperbolique. On sait que dans ce cas $b^2-4ac=0$ et par conséquent l'équation (3.1) admet deux solutions confondues. Donc, il existe une seule courbe caractéristique réelle d'équation $\psi_1(x,y)=c_1$ pour l'équation (3.1).

Théorème 3.2

L'équation de la courbe caractéristique est donnée par

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{2a}.$$

En posant

$$\begin{cases}\xi=\varphi_1(x,y),\\ \eta=\varphi_2(x,y)\end{cases}$$

où φ_2 satisfait $J(\xi,\eta)\neq 0$, la forme canonique de $(\mathcal{E}_p)$ s'écrit

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}=G\left(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial \xi},\frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

Preuve

Dans ce cas, il faut trouver deux fonctions $\varphi_1(x,y)$ et $\varphi_2(x,y)$ telles que $b'(\xi,\eta) = c'(\xi,\eta) = 0$ pour tout $(x,y) \in D$. Il suffit de rendre $C = 0$, ceci implique que

$$a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{a}\left[a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right]^2 = 0.$$

Il en résulte que η est une solution de l'équation linéaire du premier ordre

$$a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = 0.$$

Par conséquent, la solution η est constante sur chaque caractéristique, c'est-à-dire sur une courbe qui est une solution de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a}.$$

En trouvant la solution de cette équation, on a la première courbe caractéristique $\varphi_2(x,y) = C$. Pour choisir φ_1, il suffit seulement de prendre en considération la contrainte sur la seconde variable indépendante, est que le $J(\xi,\eta) \neq 0$ en D.

Exemple 3.4

L'équation suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

est parabolique sur $\mathbb{R}^2$. L'équation des caractéristiques est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

dont la solution est $3x - y = C$. La première courbe caractéristique est $\varphi_1(x,y) = 3x - y$. On pose donc $\xi = 3x - y$. Pour obtenir une seconde coordonnée caractéristique η, on a beaucoup de choix. Pour cet exemple, on prendra $\eta(x,y) = x$. Cette fonction a bien des dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues et

$$J = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

pour tout point de $\mathbb{R}^2$. En utilisant ce changement de coordonnées

$$\begin{cases} \xi = 3x - y, \\ \eta = x \end{cases}$$

et on pose $u(x,y) = v(\xi,\eta)$, on obtient

$$\begin{cases} x = \eta, \\ y = 3\eta - \xi. \end{cases}$$

En utilisant la règle de chaînes, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 3\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta},\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial \xi},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(3\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)=9\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+6\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)=-3\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}$$

et finalement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}-5\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

ce qui implique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=5\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}.$$

3.3.3 Équation elliptique

Soit $(\mathcal{E}_e)$ une équation elliptique. On sait que dans ce cas $b^2-4ac<0$ et par conséquent l'équation (3.1) admet deux solutions complexes. Donc, les courbes caractéristiques sont définies à partir des parties réelle et imaginaire des solutions.

Théorème 3.3

Soit φ une solution de l'équation

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm i\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

La forme canonique de $(\mathcal{E}_e)$ s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=G\left(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial \xi},\frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

où (ξ,η) sont données par

$$\begin{cases}\xi=Re\varphi,\\ \eta=Im\varphi.\end{cases}$$

Preuve

On suppose que $a(x,y)\neq 0$ pour tout $(x,y)\in\Omega$. On cherche deux fonctions $\varphi_1(x,y)$ et $\varphi_2(x,y)$ telles que $b'(\xi,\eta)=c'(\xi,\eta)$ et $b'(\xi,\eta)=0$ pour tout $(x,y)\in\Omega$. On obtient un système de deux équations du premier ordre nonlinéaires

$$a\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+b\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+c\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=a\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+b\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+c\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2,$$

$$b'=2a\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+b\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\right]+2c\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=0.$$

On peut écrire le système sous la forme

$$a\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]+b\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\right]$$
$$+c\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]=0 \qquad ,$$

$$2ia\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+ib\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\right]+2ic\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=0$$

où $i=\sqrt{-1}$. Définissons la fonction complexe $\phi\left(x,y\right)=\xi+i\eta$. Ce système est équivalent à l'équation complexe

$$a\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+b\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+c\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2=0.$$

On est arrivé à la même équation que dans le cas hyperbolique. Mais dans le cas elliptique, l'équation n'admet aucune solution réelle ou, en d'autres termes, les équations elliptiques n'ont pas de caractéristiques. Comme dans le cas hyperbolique, on factorise l'EDP quadratique ci-dessus et on obtient deux équations linéaires, mais elles sont maintenant des équations différentièlles complexes (où x et y sont des variables complexes). Donc, on a besoin de résoudre les équations

$$a\frac{\partial\phi}{\partial x}+\left(b\pm i\sqrt{4ac-b^2}\right)\frac{\partial\phi}{\partial y}=0.$$

Comme précédent, le système caractéristique associé à cette équation est donnée par

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm i\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

En trouvant les solutions de ces deux équations $\phi_1\left(x,y\right)$ et $\phi_2\left(x,y\right)$. Maintenant, si on pose $\xi\left(x,y\right)=\phi_1\left(x,y\right)$ et $\eta\left(x,y\right)=\phi_2\left(x,y\right)$, l'équation $(\mathcal{E})$ prend la forme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}=G\left(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial\xi},\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)$$

Cette forme n'est pas la forme canonique d'une équation elliptique avec des coefficients réels. Pour l'obtenir, on pose

$$\begin{cases}\xi\left(x,y\right)=Re\phi,\\ \eta\left(x,y\right)=Im\phi.\end{cases}$$

où ϕ est l'une des fonctions ϕ_1 où ϕ_2.

Exemple 3.5

Considérons l'équation de Tricomi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ x > 0.$$

$b^2(x,y) - 4a(x,y)c(x,y) = -4x = 4i^2x$. Comme $x > 0$, cette EDP est elliptique sur le domaine D. A ces points, les équations caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = \pm i\sqrt{x}$$

En utilisant la méthode de séparation de variables, on obtient $\frac{3}{2}y \pm ix^{\frac{3}{2}} = C$ où C est une constante. On pose

$$\begin{cases} \xi = \frac{3}{2}y, \\ \eta = -x^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

et $u(x,y) = v(\xi,\eta)$. En utilisant la règle de chaînes, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\frac{\partial v}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{3}{2}\frac{\partial v}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = \frac{9}{4}x\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial v}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{2}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) = \frac{9}{4}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{9}{4}x\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{9}{4}x\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \\ &= \frac{9}{4}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\right). \end{aligned}$$

La forme canonique de l'équation de Tricomi est

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{3\eta}\frac{\partial v}{\partial \eta}.$$

3.4 Problème de Cauchy

Soit f une fonction d'une seule variable et $(\mathcal{C})$ la courbe définie par l'équation $y = f(x)$. Posons $F(x,y) = f(x) - y$. Alors, le vecteur $\vec{n} = \nabla F(x_0, f(x_0)) = (f'(x_0), -1)$ est perpendiculaire à $(\mathcal{C})$ en $(x_0, f(x_0))$.

Définition 3.4

Le problème de Cauchy relatif à une courbe $(\mathcal{C})$ régulière consiste à chercher (si elle existe) la solution de l'équation

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (\mathcal{E})$$

qui vérifie

$$u(x,y)=g(x,y) \text{ sur } (C)$$

et

$$\frac{du}{dn}(x,y)=h(x,y) \text{ sur } (C).$$

où $\frac{du}{dn}$ désigne la dérivée normal et f et g sont des fonctions de classe C^1 et C^2 sur C, respectivement.

Théorème 3.4

Si la courbe $(\mathcal{C})$ n'est pas caractéristique, le problème de Cauchy admet une solution unique.

Preuve

Montrons tout d'abord que la donnée de la fonction u et de sa dérivée normale permet de connaître l'ensemble des dérivées partielles d'ordre 1. On suppose que la courbe $(\mathcal{C})$ est définie par la représentation paramétrique $(x,y)=(x_0(s),y_0(s))=m(s)$. On a alors

$$\begin{cases} \vec{t}(s)=\frac{dx_0}{ds}(s)\vec{x}+\frac{dy_0}{ds}(s)\vec{y}, \\ \vec{n}(s)=-\frac{dy_0}{ds}(s)\vec{x}+\frac{dx_0}{ds}(s)\vec{y}, \end{cases}$$

avec $\left\|\vec{t}(s)\right\|=1$. Sachant que les fonctions suivantes sont connues

$$\begin{aligned}
u(x_0(s),y_0(s)) &= g(x_0(s),y_0(s))=G(s), \\
\frac{du}{dn}(x_0(s),y_0(s)) &= h(x_0(s),y_0(s))=H(s), \\
\frac{dG}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx_0}{ds}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy_0}{ds}=du_{m(s)}\vec{t}(s) \\
\frac{du}{dn}(x_0(s),y_0(s)) &= du_{m(s)}\vec{n}(s)=-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy_0}{ds}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx_0}{ds}=H(s).
\end{aligned}$$

On peut déduire les dérivées partielles d'ordre 1

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y}(x_0(s),y_0(s)) &= \frac{dx_0}{ds}H(s)+\frac{dy_0}{ds}\frac{\partial G}{\partial s}, \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x_0(s),y_0(s)) &= \frac{dx_0}{ds}\frac{\partial G}{\partial s}-\frac{dy_0}{ds}H(s).
\end{aligned}$$

Une condition nécessaire pour qu'il y ait une solution unique, est que l'équation $(\mathcal{E})$ permette de définir de façon unique sur (C) les dérivées partielles d'ordre un de u. On sait que

$$\begin{aligned}
u(x_0(s), y_0(s)) &= g(x_0(s), y_0(s)) = G(s), \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x_0(s), y_0(s)) &= h_1(x_0(s), y_0(s)) = H_1(s), \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x_0(s), y_0(s)) &= h_2(x_0(s), y_0(s)) = H_2(s).
\end{aligned}$$

Des 2 dernières équations on déduit

$$\begin{aligned}
x_0'(s)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0(s), y_0(s)) + y_0'(s)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_0(s), y_0(s)) &= H_1'(s), \\
x_0'(s)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_0(s), y_0(s)) + y_0'(s)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0(s), y_0(s)) &= H_2'(s).
\end{aligned}$$

L'équation $(\mathcal{E})$ permet d'obtenir

$$a(x_0(s), y_0(s))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x_0(s), y_0(s))\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x_0(s), y_0(s))\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{$\mathcal{E}$}$$

Pour que ce système linéaire de 3 équations à 3 inconnues $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ait une solution unique il faut et il suffit que le déterminant soit non nul, d'où

$$\begin{vmatrix} x_0'(s) & y_0'(s) & 0 \\ 0 & x_0'(s) & y_0'(s) \\ a & b & c \end{vmatrix} = a(y_0'(s))^2 - 2bx_0'(s)y_0'(s) + c(y_0'(s))^2 \neq 0.$$

Comme $x_0'(s) = dx_0/ds$ et que $y_0'(s) = dy_0/ds$, on reconnait la condition définissant une courbe qui n'est pas caractéristique. La construction de la solution se fait comme dans le cas d'une dimension 1 par un développement limité de la solution au voisinage de la courbe.

3.5 Exercices

Exercice 01: Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

1. Déterminer le domaine D où cette équation est parabolique.
2. Déterminer les courbes caractéristiques de cette équation sur D.
3. Effectuer le changement de coordonnées en basant sur (2) pour obtenir la forme canonique correspondante.
4. Trouver la solution générale de cette équation dans le domaine D.

Exercice 02: Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

1. Vérifier que cette équation est parabolique sur $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer les courbes caractéristiques de cette équation.

3. Effectuer le changement de coordonnées correspondant afin d'obtenir la forme canonique correspondante.

4. Trouver la solution générale de cette équation dans le domaine $\mathbb{R}^2$.

5. Trouver la solution générale de cette équation qui satisfait $u(0, y) = f(y), u_x(0, y) = g(y)$, où f et g sont des fonctions données.

Exercice 03: Considérons l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + [1 - a(y)]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

où

$$a(y) = \begin{cases} -1, \; y < -1, \\ 0, \; |y| \leq 1, \\ 1, \; y > 1. \end{cases}$$

1. Trouver le domaine où cette EDP est hyperbolique, parabolique et elliptique.

2. Pour chaque domaine, trouver la forme canonique correspondante.

Exercice 04: Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1. Trouver le domaine où cette EDP est hyperbolique et elliptique.

2. Pour chaque domaine, trouver la forme canonique correspondante.

Chapitre 4

Méthode de séparation des variables

La méthode de séparation des variables ou la méthode de Fourier est largement utilisée pour résoudre les problèmes aux limites relatives aux EDPs. Elle consiste de chercher des solutions particulière de la forme séparable $u(x, y) = X(x)Y(y)$, où X et Y sont des fonctions de x et y respectivement. Dans de nombreux cas, l'EDP se réduit à deux équations différentielles ordinaires pour X et Y. On obtient donc des problèmes aux limites impliquant des EDOs. Cependant, la question de la séparabilité d'une EDP en deux équations différentielles ordinaires ou plus n'est pas toujours possible. Dans ce chapitre, on va appliquer cette méthode sur des problèmes aux limites relatives aux EDPs linéaires.

4.1 Situation du problème

On décrit maintenant la méthode de séparation des variables et examine les conditions d'applicabilité de la méthode aux problèmes qui impliquent des EDPs de second ordre de deux variables indépendantes. On considère donc le problème aux limites dont l'inconnue $u(x, t)$ posé sur un domaine de la forme $I \times J$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$.

$$\begin{cases} a_1(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_2(x)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(t)\frac{\partial u}{\partial t} + (a_3(x) + b_3(t))\,u(x,t) = h(x,t), \ (x,t) \in I \times J \\ u(x,0) = f(x), \ x \in I\text{: Condition initiale,} \\ \text{Condition aux limites} \end{cases} \qquad (\mathcal{E})$$

où $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, , b_3, h(x, t), f(x)$ sont des fonctions données.
Condition aux limites: On distingue différents types de conditions aux limites (C.L)

- **Conditions de Dirichlet**: u est fixée sur le bord de I

$$u(a, t) = u(b, t) = 0.$$

- **Conditions de Neumann**: La dérivée normale de u est fixé sur I

$$u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0.$$

- **Conditions de Robin ou mixtes**

$$c_1(x)u(a, t) + c_2(x)u_x(b, t) = 0.$$

- **Conditions périodiques**

$$u(a, t) = u(b, t) \text{ et } u_x(a, t) = u_x(b, t).$$

Rapportons les principales étapes de cette méthode.

1. On recherche les solutions séparées de $(\mathcal{E})$. Ces solutions sont de la forme spéciale

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

et satisfont les condition aux limites et la condition initiale. Il se trouve que X et T doivent être des solutions des problèmes aux limites linéaires (P_1) et (P_2) relatives aux X et T, respectivement.

2. On résout les problème (P_1) et (P_2), les solutions de (P_1) nous permettent de construire une base hilbertienne $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On désigne par $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$. les solutions de (P_2)

3. On utilise le principe de superposition générale pour générer à partir de $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$une solution plus générale du problème, sous la forme d'une série infinie de solutions séparées.

4. Dans la dernière étape, on calcule les coefficients de cette série et étudie sa convergence.

Principe de superposition

Si u_1 et u_2 satisfont une EDP linéaire homogène, alors une combinaison linéaire arbitraire $c_1u_1 + c_2u_2$, c_1,$c_2 \in \mathbb{R}$ satisfait également la même équation.
Dans la suite, on va rappeler quelques notions essentielles sur les séries de Fourier qui serons utilisées dans le reste de ce chapitre.

4.2 Rappel sur les séries de Fourier

Définition 4.1

Une suite de fonctions $\{\phi_n(x)\}_n$, $n \geq 0$ définit sur un intervalle $[a,b]$, décrit un système orthonormal par rapport à la fonction de poids $q(x)$ si et seulement si

$$\forall n \geq 0, \forall m \geq 0, \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)q(x)dx = \begin{cases} 1 \text{ si } m \neq n, \\ 0 \text{ si } m = n. \end{cases}$$

Exemple 4.1

On va voir que les fonctions cos et sin peuvent former une base orthonormal. Pour cela, l'ensemble des fonctions $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \ldots\right\}$ est un système orthogonale de fonctions sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ pour la fonction de poids $q \equiv 1$.
Ceci est affirmé par les calculs suivants
Si $m, n \geq 1$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((m-n)\,x) - \cos((m+n)\,x)}{2} = \begin{cases} 1 \text{ si } m \neq n \\ 0 \text{ si } m = n \end{cases}$$

Si $m, n \geq 0$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((m-n)\,x) + \cos((m+n)\,x)}{2} = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n \\ \pi \text{ si } m = n \\ 2\pi \text{ si } m = n = 0 \end{cases}$$

Si $m \geq 0$ et $n \geq 1$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((m+n)\,x) - \cos((m-n)\,x)}{2} = 0.$$

Définition 4.2

Soient f une fonction et D_f son ensemble de définition. On dit que la fonction f est périodique s'il existe un nombre réel non nul p vérifiant la propriété suivante

$$\text{Si} \quad x \in D_f \quad \text{alors} \quad x+p \in D_f \quad \text{et} \quad f(x+p) = f(x).$$

Le nombre p est appelé la période de la fonction f.Séries de Fourier et coefficients de Fourier

4.2.1 Séries de Fourier et coefficients de Fourier

Le but de cette section est d'écrire une fonction $f(x)$ continue par morceaux et 2π-périodique sous la forme

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

où a_n, b_n pour $n \geq 0$ sont appelés les coefficients de Fourier associés à la fonction f.

Définition 4.3

Les coefficients de Fourier associé à la fonction f sont donnés par

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \;\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \text{ si } n \geq 1.$$

Exemple 4.2

Soit $f(x) = x + x^2$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, alors

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Si $n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+x^2)\cos(nx)dx = \frac{1}{n\pi}\left((x+x^2)\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2x)\sin(nx)dx \\ &= -\frac{1}{n^2\pi}\left\{(-(1+2x)\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}(2\sin(nx)]_{-\pi}^{\pi}\right\} = \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4\,(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+x^2)\sin(nx)dx = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n}$$

Donc la série de Fourier de $f(x)$ est

$$\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{4\,(-1)^n}{n^2}\right)\cos(nx)+\left(\frac{2\,(-1)^{n+1}}{n}\right)\sin(nx)\right)$$

Une remarque importante pour faciliter les calculs.

Remarque 4.1

1. Si f est une fonction paire, alors sa série de Fourier est

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx) \text{ avec } a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx \text{ pour } n\geq 0.$$

2. Si $f(x)$ est une fonction impaire, alors sa série de Fourier est

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx) \text{ avec } b_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx \text{ pour } n\geq 0.$$

4.3 Applications

4.3.1 Equation de la chaleur

Considérons le problème sur l'intervalle $[0, L]$ avec $L>0$, constitué de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}-k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ \ 0<x<L,\ \ t>0, \tag{4.1}$$

les conditions aux limites de type Dirichlet

$$u(0,t)=u(L,t)=0,\ \ t\geq 0, \tag{4.2}$$

et la condition initiale

$$u(x,0)=f(x), 0\leq x\leq L, \tag{4.3}$$

où f est une fonction donnée et k est une constante positive.

Ce problème modélise la conduction thermique dans un tige de longueur L. La chaleur est supposée nulle aux deux extrémités du tige et égale à $f(x)$ à l'instant $t=0$. Les conditions aux limites impliquent que

$$f(0)=u(0,0)=u(L,t)=0$$

et

$$f(L)=u(L,0)=u(L,0)=0.$$

Ces deux conditions s'appellent les conditions de compatibilité.

Etape 1: On commence à chercher des solutions de (4.1) sous la forme

$$u\,(x,t)=X\,(x)\,T\,(t) \tag{4.4}$$

qui satisfont les conditions (4.2) où X et T sont des fonctions de x et t, respectivement. Dans cette étape, on ne prend pas en compte la condition initiale (4.3) et on n'est pas intéressé par la solution zéro $u(x,t)=0$. On cherche donc des fonctions X et T qui ne s'annulent pas identiquement.

Par différentiation de (4.4) par rapport à t et deux fois par rapport à x et par substitution dans (4.1), on obtient

$$XT'(t)=kX''(x)\,T(t)\,,\ 0<x<L,\ t>0.$$

On peut réécrire

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=k\frac{X''(x)}{X(x)},\ 0<x<L,\ t>0, \tag{4.5}$$

Puisque x et t sont des variables indépendantes, cette relation implique qu'il existe une constante λ (appelée constante de séparation) telle que

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=k\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,\ 0<x<L,\ t>0. \tag{4.6}$$

Comme on cherche des solutions ne s'annulent pas identiquement, alors il existe $t_0\in\mathbb{R}$ tel que $T(t)\neq 0$. Conséquemment, on obtient

$$\begin{cases} u(0,t_0)=X(0)\,T(t_0)=0 \\ u(L,t_0)=X(L)\,T(t_0)=0 \end{cases} \Longrightarrow X(0)=X(L)=0$$

L'équation (4.6) conduit au système d'EDOs suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dx}+\lambda X=0,\ 0<x<L, \\ X(0)=X(L)=0 \end{cases} \tag{4.7}$$

et

$$\frac{dT}{dt}+\lambda T=0,\quad t>0, \tag{4.8}$$

où λ est une constante.

Etape 2: On commence d'abord à résoudre le système (4.7). Une solution non triviale de (4.7) est appelée fonction propre avec la valeur propre λ. On distingue 3 cas:

Cas 1: $\lambda=-\mu^2<0$, alors

$$X(x)=\alpha e^{-\mu x}+\beta e^{\mu x}$$

où α, β sont des réels arbitraires. Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0, \\ \alpha e^{-\mu L}+\beta e^{\mu L}=0. \end{cases}$$

De la première équation, on a $\alpha=-\beta$. La seconde équation implique donc $\alpha e^{-\mu L}=\alpha e^{\mu L}$, alors si $\alpha\neq 0$ on obtient $e^{2\mu L}=1$. Ceci n'est pas possible car μ et L sont différents de 0 et par conséquent $\alpha=\beta=0$. Alors, dans ce cas $X\equiv 0$ et $u(x;t)=0$ pour tout $0\leq x\leq L$ et $t\geq 0$. On doit donc exclure le cas $\lambda<0$.

Cas 2: Si $\lambda=0$, on obtient

$$X(x)=\alpha+\beta x,$$

où α, β sont des réels arbitraires. Les conditions aux limites impliquent

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0, \\ \alpha+\beta L=0. \end{cases}$$

Comme $L \neq 0$, il est claire que $\alpha = \beta = 0$. Alors, dans ce cas $X \equiv 0$ et $u(x;t) = 0$ pour tout $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$. On doit donc exclure le cas $\lambda = 0$.

Cas 3: Si $\lambda = \mu^2 > 0$, on obtient

$$X\left(x\right) = \alpha \cos\left(\mu x\right) + \beta \sin\left(\mu x\right)$$

où α, β sont des réels arbitraires. Les conditions aux limites impliquent que

$$\begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta \sin\left(\mu L\right) = 0 \end{cases}$$

Pour éviter la solution triviale $X \equiv 0$, on suppose que $\beta \neq 0$. Ceci implique que $\sin\left(\mu L\right) = 0$. Conséquemment

$$\mu L = n\pi, \ \lambda = \left(n\pi/L\right)^2, \ n \in \mathbb{Z}$$

Il en résulte que

$$\lambda_n = \left(n\pi/L\right)^2$$

sont les valeurs propres de et les fonctions

$$X_n\left(x\right) = \beta_n \sin\left(n\pi x/L\right)$$

sont les fonctions caractéristiques du problème (4.7). Comme $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit donc de considérer

$$\lambda_n = \left(n\pi/L\right)^2, \ X_n\left(x\right) = \beta_n \sin\left(n\pi x/L\right), \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Il reste maintenant à résoudre le problème (4.8), sa solution est donnée par

$$T\left(t\right) = \gamma_n e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

A la fin de cette étape, on peut considérer qu'on a bien construit une base hilbertienne $\left(X_i\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

Etape 3: On utilise le principe de superposition générale pour générer à partir de $\left(X_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ et $\left(T_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$une solution plus générale du problème, sous la forme d'une série infinie de solutions séparées. On a ainsi obtenu la suite suivante de solutions séparées

$$u_n\left(x,t\right) = \delta_n \sin\left(n\pi x/L\right) e^{-k(n\pi/L)^2}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Par le principe de superposition implique que toute combinaison linéaire

$$u\left(x,t\right) = \sum_{n=1}^{N} \delta_n \sin\left(n\pi x/L\right) e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

de solutions séparées est également une solution de l'équation de la chaleur qui satisfait les conditions aux limites de Dirichlet.

Considérons maintenant la condition initiale. Supposons qu'il ait la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \delta_n \sin\left(n\pi x/L\right)$$

c'est-à-dire qu'il s'agit d'une combinaison linéaire des fonctions propres. Ensuite, une solution au problème de chaleur (4.1) - (4.3) est donnée par

$$u\left(x,t\right) = \sum_{n=1}^{N} \delta_n \sin\left(n\pi x/L\right) e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

L'idée brillante de Fourier était qu'il était possible de représenter une fonction arbitraire f satisfaisant les conditions aux limites (4.2) comme une combinaison linéaire infinie unique des fonctions propres $\sin(n\pi x/L)$. En d'autres termes, il est possible de trouver des constantes δ_n telles que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x/L)$$

Une telle série est appelée une série (ou extension) de Fourier (généralisée) de la fonction f par rapport aux fonctions propres du problème, et δ_n, $n = 1, 2...$ sont appelés les coefficients de Fourier (généralisés) de la série. Dans ce cas, le principe de superposition généralisée implique que l'expression formelle

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x/L)\, e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

est un candidat naturel pour une solution généralisée du problème (4.1) - (4.3). On explique maintenant comment représenter une fonction «arbitraire» f sous la forme d'une série de Fourier. En d'autres termes, comment calculer les coefficients δ_n. Remarquons

$$\int_0^L \sin(m\pi x/L)\, f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \int_0^L \sin(m\pi x/L)\sin(n\pi x/L)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L/2, & m = n \end{cases}$$

Par conséquent, les coefficients de Fourier sont donnés par

$$\delta_n = \frac{\int_0^L \sin(m\pi x/L)\, f(x)dx}{\int_0^L \sin^2(m\pi x/L)\, ds} = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(n\pi x/L)\, f(x)dx.$$

On obtient la formule explicite de la solution formelle, qui est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x/L)\, e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

où

$$\delta_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(m\pi x/L)\, f(x)dx.$$

4.3.2 Equation de la chaleur avec conditions de Neumann

Considérons le problème de conduction thermique suivant dans un intervalle fini:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0, \tag{4.9}$$

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,\ t \geq 0, \tag{4.10}$$

$$u(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq L, \tag{4.11}$$

où f est une condition initiale donnée et k est une constante positive. Afin de rendre (4.10) consistant avec (4.11), on suppose la condition de compatibilité: $f_x(0) = f_x(L) = 0$.

Ce problème correspond à l'évolution de la température $u(x,t)$ dans une tige thermo-conductrice unidimensionnelle homogène de longueur L dont la température initiale (au temps $t = 0$) est connue et telle qu'il n'y a pas de flux de chaleur à travers les limites (La chaleur n'entre pas ou ne sort pas à travers le système).

On commence par rechercher des solutions de la forme spéciale

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \tag{4.12}$$

où X et T sont des fonctions des variables x et t, respectivement. Différencions la solution séparée (4.12) et remplaçons dans l'EDP, on obtient

$$XT_t = kX_{xx}T$$

On peut récrire par λ (appelée constante de séparation) telle que

$$\frac{T_t}{T} = k\frac{X_{xx}}{X} = -\lambda. \tag{4.13}$$

λ est une constante réelle. Comme on cherche des solutions ne s'annule pas identiquement, alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $T(t) \neq 0$. Conséquemment on obtient

$$\begin{cases} u_x(0,t_0) = X_x(0)\,T(t_0) = 0 \\ u_x(L,t_0) = X_x(L)\,T(t_0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow X_x(0) = X_x(L) = 0$$

L'équation (4.13) conduit au système d'EDOs suivant

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \;\; 0 < x < L, \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

et

$$T' + \lambda kT = 0, \quad t > 0, \tag{4.15}$$

où λ est une constante. On commence d'abord à résoudre le système (4.14).

Cas 1: $\lambda = -\mu^2 < 0$, alors $X(x) = \alpha e^{-\mu x} + \beta e^{\mu x}$ et $X'(x) = \mu\left[-\alpha e^{-\mu x} + \beta e^{\mu x}\right]$ où α, β sont des nombres réels arbitraires. Mais les conditions

$$\begin{aligned} \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} \mu(-\alpha + \beta) = 0 \\ \mu\left(-\alpha e^{-\mu L} + \beta e^{\mu L}\right) = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha \\ -\alpha e^{-\mu L} + \beta e^{\mu L} = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \beta = \alpha = 0 \Longrightarrow X \equiv 0 \text{ et } u(x;t) = 0 \end{aligned}$$

pour tout $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$. On doit donc exclure le cas $\lambda < 0$.

Cas 2: Si $\lambda = 0$, $X(x) = \alpha + \beta x$ et $X'(x) = \beta$, où α, β sont des nombres réels arbitraires. Mais

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \beta = 0$$

Donc $\lambda = 0$ est une valeur propre avec la fonction propre $X(x) = \alpha$ (constante).

Cas 3: Si $\lambda = \mu^2 > 0$, alors $X(x) = \alpha\cos(\mu x) + \beta\sin(\mu x)$ et $X'(x) = \mu\left[-\alpha\sin(\mu x) + \beta\cos(\mu x)\right]$ où α, β sont des nombres réels arbitraires. Mais

$$\begin{aligned} \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} \beta\cos(0) = 0 \\ -\alpha\sin(\mu x) + \beta\cos(\mu x) = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ -\alpha\sin(\mu x) + \beta\cos(\mu x) = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \beta = 0 \text{ et } \alpha\sin(\mu x) = 0 \end{aligned}$$

Comme $\alpha \sin(\mu l) = 0$, alors $\sin(\mu L) = 0$. Conséquemment $\mu L = n\pi$ et $\lambda = (n\pi/L)^2$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$. On obtient

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2 \text{ et } X_n(x) = \alpha_n \cos(n\pi x/L)$$

Parce que $\cos(-x) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et on prend en considération la valeur $\lambda = 0$, les valeurs et les fonctions propres sont définies par:

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2 \text{ et } X_n(x) = \alpha_n \cos(n\pi x/L),\ n \in \mathbb{N}.$$

On passe maintenant à l'équation (4.8) dont la solution générale est donnée par

$$T(t) = \gamma_n e^{-k(n\pi/L)^2 t},\ n \in \mathbb{N}.$$

On a ainsi obtenu la suite suivante de solutions séparées

$$u_n(x,t) = \delta_n \cos(n\pi x/L),\ n \in \mathbb{N}.$$

Le principe de superposition implique que toute combinaison linéaire

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \delta_n \cos(n\pi x/L),\ n \in \mathbb{N}$$

Supposons que l'on a

$$f(x) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos(n\pi x/L)$$

Dans ce cas, le principe de superposition généralisée implique la solution formelle

$$u(x,t) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos(n\pi x/L)\, e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

On sait que si $m, n \geq 0$, on a

$$\int_0^L \cos(mx)\cos(nx)dx = \int_0^L \frac{\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)}{2} = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n \\ \frac{L}{2} \text{ si } m = n \\ L \text{ si } m = n = 0 \end{cases}$$

On passe maintenant à expliquer comment calculer les coefficients $\delta_m, m = 0, 1, 2, ...$

Pour $m = 0$, multiplions f par $\cos(0\pi x/L)$ et on intègre sur $(0, L)$,on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^L \cos(0\pi x/L) f(x)dx &= \frac{\delta_0}{2}\int_0^L \cos(0\pi x/L)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \int_0^L \cos(0\pi x/L)\cos(n\pi x/L)\,dx \\ &= \frac{\delta_0 L}{2} + 0 \end{aligned}$$

Car $\int_0^L \cos(0\pi x/L)\cos(n\pi x/L)\,dx = 0$ puisque $n \neq (m = 0)$. alors

$$\delta_0 = \frac{2}{L}\int_0^L \cos(0\pi x/L) f(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$$

Pour $m \neq 0$, multiplions f par $\cos(m\pi x/L)$, $m \neq 0$ et on intègre sur $(0, L)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^L \cos(m\pi x/L) f(x)dx &= \frac{\delta_0}{2}\int_0^L \cos(m\pi x/L)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \int_0^L \cos(m\pi x/L)\cos(n\pi x/L)\,dx \\ &= \frac{\delta_0 L}{2m\pi}\left[\sin(0) - \sin(m\pi)\right] + \delta_m \int_0^L \cos(m\pi x/L)\cos(m\pi x/L)\,dx \\ &= \delta_m \frac{L}{2} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\delta_m = \frac{2}{L}\int_0^L \cos\left(m\pi x/L\right) f(x)dx$$

et

$$f(x) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(n\pi x/L\right)\int_0^L \cos\left(n\pi x/L\right) f(x)dx$$

Par conséquent, la solution formelle est maintenant donnée par

$$u\left(x,t\right) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(n\pi x/L\right)e^{-k(n\pi/L)^2 t}\int_0^L \cos\left(n\pi x/L\right) f(x)dx$$

Exemple 4.3

Soit $f(x) = x + x^2$ sur l'intervalle $[0,\pi]$, alors $L = \pi$ et

$$\delta_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+x^2\right)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} dx = \left[\pi + \frac{2}{3}\pi^2\right].$$

Si $n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\cos(nx)dx = \frac{1}{n\pi}\left((x+x^2)\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}(1+2x)\sin(nx)dx \\
&= -\frac{1}{n^2\pi}\left\{\left(-(1+2x)\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\left(2\sin(nx)\right]_0^{\pi}\right\} = -\frac{1}{n^2\pi}\left\{-(1+2\pi)\cos(n\pi)+1\right\} \\
&= \frac{1}{n^2\pi}\left\{(1+2\pi)(-1)^n - 1\right\}
\end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{2}{3}\pi^2\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2\pi}\left((1+2\pi)(-1)^n - 1\right)\right]\cos\left(n\pi x/L\right)$$

Dans ce cas, le principe de superposition généralisée implique la solution formelle

$$u\left(x,t\right) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2\pi}\left((1+2\pi)(-1)^n - 1\right)\right]\cos\left(n\pi x/L\right)e^{-k(n\pi/L)^2 t}.$$

4.4 Exercices

Exercice 01: Résoudre l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 17\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < \pi, t > 0,$$

avec les conditions aux limites

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0,$$

et les conditions initiales

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 2, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, t > 0. \end{cases}$$

Exercice 02:

1. En utilisant la méthode de séparation des variables, trouvez une solution (formelle) au problème
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < L, t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$
décrivant le dégagement de chaleur d'un tige unidimensionnel isolé (problème de Neumann).

2. Résoudre l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = 12\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dans $0 < x < \pi, t > 0$ sous réserve du conditions limites et initiales
$$\begin{array}{l} u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = 1 + \sin^3 x \end{array}$$

3. Trouve $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$ pour tout $0 < x < \pi$, et explique l'interprétation physique de ce résultat.

Exercice 03: Considérons le problème
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + hu,\ 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = x\,(\pi - x)\,,\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$
où h est une constante réelle.

1. Résoudre le problème en utilisant la méthode de séparations des variables.

2. $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$ existe-t-elle pour tout $0 < x < \pi$? Distinguer les cas suivants:
$$\text{(i) } h < 1,\ \text{(ii) } h = 1,\ \text{(iii) } h > 1.$$

Exercice 04:

1. Résoudre le problème
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u_x(L,t) = 0,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x),\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

2. Chercher la solution de problème dans les cas suivants:
$f(x) = \sin^3 \frac{5\pi}{2L}x$; $f(x) = 1 - \cos\frac{\pi}{L}x$.

Exercice 05: Résoudre le problème
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u,\ 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = x\,(2 - x)\,,\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Exercice 06:

1. En utilisant la méthode de séparation des variables, trouvez une solution (formelle) au problème de chaleur périodique suivant
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u,\ 0 < x < 2\pi, t > 0, \\ u(0,t) = u(2\pi,t), u_x(0,t) = u_x(2\pi,t),\ t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x),\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$
où f est une fonction périodique. Ce système décrit l'évolution de la chaleur sur une fil isolé circulaire de longueur 2π.

2. Trouver $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$ pour tout $0 < x < 2\pi$, et explique l'interprétation physique de ce résultat.

Chapitre 5

Equation de Laplace

Ce chapitre est consacré à l'équation de Laplace. On introduit deux de ses propriétés importantes, le principe maximum et l'invariance par rotation.

L'équation de Laplace est un cas particulier des équations de diffusion. Si la diffusion est stationnaire (indépendante du temps), les équations de diffusion se réduisent à l'équation de Laplace

En une seule dimension

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

En deux dimensions

$$\nabla.\nabla u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

En trois dimensions

$$\nabla.\nabla u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Une solution de l'équation de Laplace s'appelle une fonction harmonique. En une seule dimension, les fonctions harmoniques sont $u(x) = A+Bx$. L'équation de Laplace non homogène est

$$\Delta u = f,$$

avec f une fonction donnée, que l'on appelle l'équation de Poisson.

5.1 Principe de maximum

Soit D un ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. Soit $u(x, y)$ ou $u(x, y, z)$ une fonction harmonique dans D continue sur $\bar{D} = D \cup \partial D$ (frontière de D). Puis le maximum et les valeurs minimales de u sont atteintes sur ∂D et nulle part à l'intérieur (sauf si u - constant). Utilisons la notation abrégée $X = (x, y)$ en deux dimensions ou $X = (x, y, z)$ en trois dimensions. De plus, la coordonnée radiale est écrite comme suit: $|X| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ou $|X| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Proposition 5.1

Le principe de maximum affirme qu'il existe des points X_M et X_m sur ∂D tels que $\forall x \in \bar{D}$

$$u(X_m) \leq u(x) \leq u\,(X_M)$$

Preuve

Soit $\epsilon > 0$. On pose

$$v(x) = u(x) + \epsilon |x|^2$$

Puisque u est harmonique, on a

$$\Delta v(x) = \Delta u(x) + \epsilon \Delta \left(x^2 + y^2\right) = 0 + 4\epsilon > 0 \text{ dans } D.$$

Sur $\bar{D}$, la fonction continue v admet un maximum, atteint en un point $M_0(x_0, y_0)$ qui appartient nécessairement à ∂D. Sinon,(x_0, y_0) appartient à l'ouvert D et :
a. La fonction $x \to u(x, y_0)$ atteint son maximum en x_0 sur un intervalle ouvert centré en x_0.
b. La fonction $y \to u(x_0, y)$ atteint son maximum en y_0 sur un intervalle ouvert centré en y_0, de sorte que l'on a les relations:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = 0, & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\Delta v(x) = 4\epsilon \leq 0$, ce qui est contradictoire et prouve donc que la fonction v atteint son maximum en un point $M_0(x_0, y_0)$ qui appartient comme annoncé à la frontière de ∂D. On a donc pour tout point M appartenant à D

$$u(x) < v(x) \leq v(M_0) = u(M_0) + \epsilon |M_0|^2 \leq u(M_0) + \epsilon l^2,$$

où l est la distance maximale entre ∂D et l'origine. En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient : $u(x) \leq u(M_0)$, ce qui établit que u atteint son maximum sur ∂D. L'existence d'un point minimum X_m est démontrée de la même manière.

5.2 Invariance en deux dimensions

Une translation de vecteur (a, b) est donnée par

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Une rotation d'angle α est donnée par

$$\begin{cases} x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha \\ y' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha \end{cases}$$

Proposition 5.2

L'opérateur de Laplace est invariant par translation ou par rotation

Preuve

L'invariance signifie que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}$$

Pour la translation, la preuve est simple en utilisant la règle de chaîne. Pour la rotation, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x'} \cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial y'} \sin\alpha \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x'} \sin\alpha + \frac{\partial u}{\partial y'} \cos\alpha \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial u}{\partial x'} \cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial y'} \sin\alpha\right)\cos\alpha - \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial u}{\partial x'} \sin\alpha + \frac{\partial u}{\partial y'} \cos\alpha\right)\sin\alpha \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial u}{\partial x'} \sin\alpha + \frac{\partial u}{\partial y'} \cos\alpha\right)\sin\alpha + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial u}{\partial x'} \cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial y'} \sin\alpha\right)\cos\alpha
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}\right)\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + 0.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}.
\end{aligned}$$

5.3 Invariance en coordonnées polaires

Lorsque on cherche des fonctions harmoniques spéciales qui sont elles-mêmes invariantes par rotation. En deux dimensions, cela signifie qu'on utilise les coordonnées polaires (r, θ) et cherchons des solutions dépendant uniquement de r. Soit la transformation

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta,\ r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi[\\ y = r\sin\theta \end{array} \right. \tag{5.1}$$

a la matrice jacobienne

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

avec la matrice inverse

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

Donc, par la règle de chaînes, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}.
\end{aligned}$$

On somme les deux dernières quantités, on arrive à

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \tag{5.2}$$

si u ne dépend pas de θ, on obtient

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Cette équation différentielle ordinaire est facile à résoudre

$$u = c_1 \log r + c_2.$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires.

5.4 Invariance en trois dimensions

Le laplacien Δu prend la forme

$$\Delta_3 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

On utilise des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) telles que

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{s^2 + z^2},\\
s &= \sqrt{x^2 + y^2},\\
x &= s\cos\phi, z = r\cos\theta, y = s\sin\phi, s = r\sin\theta.
\end{aligned}$$

avec $r > 0$, $\phi \in [0, 2\pi[$ et $\pi \in [0, \pi[$. On a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

On somme ces deux équations et on annule $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta_3 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.
\end{aligned}$$

Dans le dernier terme, on substitue $s^2 = r^2 \sin\theta$, on a aussi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial s}\\
&= \frac{s}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

Enfin, examinons les fonctions harmoniques spéciales en trois dimensions qui ne sont pas liées aux rotations, c'est-à-dire qui ne dépendent que de r. Ils satisfont l'ODE

$$0 = \Delta_3 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0.$$

Elle a la solution

$$r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = c_1$$

d'où

$$u = -c_1 r^{-1} + c_2.$$

Cette fonction harmonique est importante.

$$\frac{1}{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

est l'analogue de la fonction spéciale à deux dimensions $\log(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ trouvée auparavant.

5.5 Résolution de l'équation de Laplace dans un disque

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq a^2\}$ un disque de rayon a centré à l'origine. On note par $C : x^2 + y^2 = a^2$ le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon a la frontière de D. On cherche une fonction harmonique dans D qui vérifie $u = f$ sur C comme le montre la figure suivante: Le

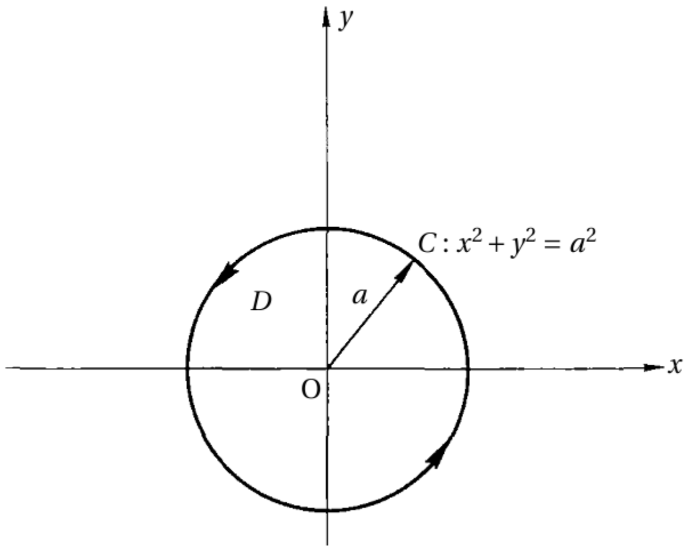

Figure 5.1: le probème de Dirichlet dans un disque D.

probème s'écrit donc: trouver une fonction u telle que

$$(P) : \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & \text{dans} \quad D, \\ u(x, y) = f(x, y), & \text{sur} \quad C, \end{cases}$$

où f étant donnée. On ne peut pas appliquer la méthode de séparation des variables car le domaine D n'est pas le produit de deux intervalles. Donc on peut essayer de chercher la solution sous la forme:

$$u(x, y) = w(r, \theta) \tag{5.3}$$

avec

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), & 0 < r \leq a, \\ y = r\sin(\theta), & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \tag{5.4}$$

Lemme 5.1

Soit u une fonction de classe $C^2(D)$. Alors, en utilisant (5.3) et (5.4), le problème (P) est équivalent à

$$(P') : \begin{cases} \Delta w(r,\theta) = w_{rr}(r,\theta) + \dfrac{1}{r} w_r(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2} w_{\theta\theta}(r,\theta) = 0, & 0 < r \leq a, \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ w(a,\theta) = h(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

avec $w(a,\theta) = h(\theta) = f\big(x(a,\theta),\, y(a,\theta)\big)$.

Preuve

Soit u une fonction deux fois différentiables, on pose:

$$w(r,\theta) = u(r\cos\theta,\, r\sin\theta). \tag{5.5}$$

Étape 1: on calcule les dérivées partielles d'ordre un de la fonction u, alors, on a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial u}{\partial x}(r\cos\theta,\, r\sin\theta) + \dfrac{\partial y}{\partial r}\dfrac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta,\, r\sin\theta) \\ \qquad\qquad = \cos\theta \dfrac{\partial u}{\partial x}(r\cos\theta,\, r\sin\theta) + \sin\theta \dfrac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta,\, r\sin\theta), \\ \dfrac{\partial w}{\partial \theta}(r,\theta) = \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial u}{\partial x}(r\cos\theta,\, r\sin\theta) + \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\dfrac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta,\, r\sin\theta) \\ \qquad\qquad = -r\sin\theta \dfrac{\partial u}{\partial x}(r\cos\theta,\, r\sin\theta) + r\cos\theta \dfrac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta,\, r\sin\theta). \end{cases} \tag{5.6}$$

Le système (5.6) est un système d'équations de deux inconnues $\dfrac{\partial u}{\partial x}(r\cos\theta,\, r\sin\theta)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta,\, r\sin\theta)$. Aussi, on peut résoudre le système (5.6) car son déterminant est égal à $r^2 \neq 0$, donc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(r\cos\theta,\, r\sin\theta) = \cos\theta \dfrac{\partial w}{\partial r}(r,\,\theta) - \dfrac{1}{r}\sin\theta \dfrac{\partial w}{\partial \theta}(r,\,\theta) = w_1(r,\,\theta), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta,\, r\sin\theta) = \sin\theta \dfrac{\partial w}{\partial r}(r,\,\theta) + \dfrac{1}{r}\cos\theta \dfrac{\partial w}{\partial \theta}(r,\,\theta) = w_2(r,\,\theta). \end{cases} \tag{5.7}$$

Étape 2: pour écrire le Laplacien en coordonnées polaires, on aura besoin de calculer les dérivées partielles d'ordre deux de la fonction u, alors, pour cela, on définit les fonctions u_1 et u_2 par:

$$u_1(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \quad u_2(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

On peut facilement voir que d'après (5.5), on a

$$u_1(r\cos\theta,\, r\sin\theta) = \frac{\partial u}{\partial x}(r\cos\theta,\, r\sin\theta) = w_1(r,\,\theta)$$

$$u_2(r\cos\theta,\, r\sin\theta) = \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta,\, r\sin\theta) = w_2(r,\,\theta).$$

D'après (5.5), donc en appliquant la première relation et la deuxième de (5.7) au couple (u_1, w_1) et (u_2, w_2) respectivement, nous obtenons

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)(r\cos\theta,\, r\sin\theta) = \cos\theta\dfrac{\partial w_1}{\partial r}(r,\, \theta) - \dfrac{1}{r}\sin\theta\dfrac{\partial w_1}{\partial \theta}(r,\, \theta), \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)(r\cos\theta,\, r\sin\theta) = \sin\theta\dfrac{\partial w_2}{\partial r}(r,\, \theta) + \dfrac{1}{r}\cos\theta\dfrac{\partial w_2}{\partial \theta}(r,\, \theta). \end{cases} \tag{5.8}$$

Notons qu'à partir de (5.7), on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial r} = \cos\theta\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\sin\theta\dfrac{\partial w}{\partial \theta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}, \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial \theta} = -\sin\theta\dfrac{\partial w}{\partial r} + \cos\theta\dfrac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta} - \dfrac{1}{r}\cos\theta\dfrac{\partial w}{\partial \theta} - \dfrac{1}{r}\sin\theta\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \end{cases} \tag{5.9}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_2}{\partial r} = \sin\theta\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \dfrac{1}{r^2}\cos\theta\dfrac{\partial w}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r}\cos\theta\dfrac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}, \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial \theta} = \cos\theta\dfrac{\partial w}{\partial r} + \sin\theta\dfrac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta} - \dfrac{1}{r}\sin\theta\dfrac{\partial w}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r}\cos\theta\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}. \end{cases} \tag{5.10}$$

Étape 3: l'injection (5.9) et (5.10) dans (5.8), on arrive à

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(r\cos\theta,\, r\sin\theta) = {}& \cos^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(r,\theta) - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}(r,\theta) + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}(r,\theta) \\ & + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial r}(r,\theta) + \frac{2\sin^2\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta^2}(r,\theta), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(r\cos\theta,\, r\sin\theta) = {}& \sin^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}(r,\theta) + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}(r,\theta) \\ & + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial r}(r,\theta) - \frac{2\sin^2\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta^2}(r,\theta). \end{aligned}$$

Finalement, le problème (P') découle en tenant compte de ces deux égalités.

5.5.1 Méthode de séparation des variables

On commence par chercher des solutions non-triviales du problème (P') à variables séparées sous la forme:

$$w(r,\, \theta) = F(r)G(\theta). \tag{5.11}$$

En substituant (5.11) dans (P'), on obtient

$$F''(r)G(\theta) + \frac{1}{r}F'(r)G(\theta) + \frac{1}{r^2}F(r)G''(\theta) = 0, \tag{5.12}$$

où F'' est la dérivée seconde de F par rapport à r, et G'' est la dérivée seconde de G par rapport à θ, et la division de l'équation (5.12) sur $F(r)G(\theta)$, nous donne

$$\frac{F''(r)}{F(r)} + \frac{1}{r}\frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{G''(\theta)}{G(\theta)} = 0,$$

et donc
$$r^2\frac{F''(r)}{F(r)}+r\frac{F'(r)}{F(r)}=-\frac{G''(\theta)}{G(\theta)}. \tag{5.13}$$
Le membre de gauche de (5.13) ne dépend que de la variable r, et celui de droite de θ uniquement, il existe donc un réel λ tel que:
$$r^2\frac{F''(r)}{F(r)}+r\frac{F'(r)}{F(r)}=-\frac{G''(\theta)}{G(\theta)}=\lambda. \tag{5.14}$$
Nous obtenons deux équations différentielles ordinaires
$$r^2F''(r)+rF'(r)-\lambda F(r)=0$$
et
$$G''(\theta)+\lambda G(\theta)=0$$
pour les fonctions F et G, respectivement.

Or la fonction w doit être 2π périodique par rapport à θ, c'est-à-dire
$$w(r,\,\theta+2\pi)=w(r,\,\theta).$$
Donc, la fonction G doit être périodique de période 2π. Par conséquent, on impose des conditions aux bords périodique sur G, c'est-à-dire
$$\begin{cases} G(0)-G(2\pi)=0,\\ G'(0)-G'(2\pi)=0.\end{cases}$$
En résumé, il nous faut étudier les problèmes suivants:
$$(P_1')\begin{cases} G''(\theta)+\lambda G(\theta)=0, & 0\le\theta\le 2\pi,\\ G(0)-G(2\pi)=0,\\ G'(0)-G'(2\pi)=0,\end{cases} \qquad \text{et} \qquad (P_2')\begin{cases} r^2F''(r)+rF'(r)-\lambda F(r)=0,\\ 0<r\le a.\end{cases}$$

Résolution du problème (P_1').

Comme classiquement, différents cas possibles interviennent suivant le signe de λ.

Cas 1: si $\lambda<0$, la solution générale du problème (P_1') est donnée sous la forme:
$$G(\theta)=c_1\cosh\big(\sqrt{-\lambda}\,\theta\big)+c_2\sinh\big(\sqrt{-\lambda}\,\theta\big),$$
où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires. Or, on $G(0)-G(2\pi)=0$ et $G'(0)-G'(2\pi)=0$ donc $c_1=c_2=0$, ce qu'est impossible. Donc le cas $\lambda<0$ est à rejeter.

Cas 2: si $\lambda=0$, la solution générale du problème (P_1') s'écrit sous la forme: $G(\theta)=c_1\theta+c_2$, où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires. D'après les conditions $G(0)-G(2\pi)=0$ et $G'(0)-G'(2\pi)=0$, on obtient $c_1=c_2=0$. D'où le cas $\lambda=0$ est à rejeter aussi.

Cas 3: si $\lambda>0$, alors la solution générale du problème (P_1') est
$$G(\theta)=c_1\cos\big(\sqrt{\lambda}\,\theta\big)+c_2\sin\big(\sqrt{\lambda}\,\theta\big),$$
où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires. Les conditions $G(0)=G(2\pi)$ et $G'(0)=G'(2\pi)$, nous donne
$$(s):\ \begin{cases} c_1=c_1\cos\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)+c_2\sin\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)\\ c_2\sqrt{\lambda}=\sqrt{\lambda}\Big[c_2\cos\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)-c_1\sin\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)\Big]\end{cases}$$

qu'est équivalent à

$$(s):\ \begin{cases} c_1\Big(\cos\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)-1\Big)+c_2\sin\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)=0\\ -c_1\sin\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)+c_2\Big(\cos\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)-1\Big)=0.\end{cases}$$

Si le déterminant de (s) est non nul, alors $c_1=c_2=0$ et $G\equiv 0$. Les solutions non-triviales sont alors obtenues pour $\det(s)=0$. On a

$$\begin{aligned}\det(s)=0 &\Longleftrightarrow \begin{vmatrix}\cos\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)-1 & \sin\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)\\ -\sin\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big) & \cos\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)-1\end{vmatrix}=0\\ &\Longleftrightarrow \Big(\cos\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)-1\Big)+\sin^2\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)=0\\ &\Longleftrightarrow \cos^2\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)-2\cos\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)+1+\sin^2\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)=0\\ &\Longleftrightarrow -2\cos\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)+2=0\\ &\Longleftrightarrow \cos\big(2\pi\sqrt{\lambda}\big)=1\Longleftrightarrow 2\pi\sqrt{\lambda}=2n\pi,\quad n\in\mathbb{N},\\ &\qquad\qquad\qquad\quad\ \Longleftrightarrow \lambda_n=n^2,\quad n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

D'où les solutions non-triviales de (P_1') pour les valeurs propres $\lambda_n=n^2,\quad n\in\mathbb{N}$ sont les fonctions propres suivantes:

$$G_n(\theta)=C_n\cos\big(n\theta\big)+D_n\sin\big(n\theta\big),\quad (n=0,1,2,...),$$

avec C_n et D_n sont des constantes arbitraires.

Résolution du problème (P_2').

En substituant $\lambda_n=n^2,\quad n\in\mathbb{N}$ dans (P_2'), on obtient

$$r^2F_n''(r)+rF_n'(r)-n^2F_n(r)=0,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{5.15}$$

1) Si $\lambda_n=n=0$ dans l'éqt. (5.15), on aura

$$\begin{aligned} rF_0''(r)+F_0'(r)=0 &\Longleftrightarrow \Big(rF_0'(r)\Big)'=0\\ &\Longleftrightarrow rF_0'(r)=B_0\\ &\Longleftrightarrow F_0(r)=A_0+B_0\ln|r|,\end{aligned}$$

où A_0 et B_0 sont des constantes arbitraires.

2) Si $\lambda_n=n$, avec $n\in\mathbb{N}^*$ l'éqt. (5.15) c'est une équation de Euler. Posons $F_n(r)=r^\alpha$ dans l'éqt. (5.15), nous obtenons

$$\alpha(\alpha-1)r^\alpha+\alpha r^\alpha-n^2r^\alpha=0\Longleftrightarrow \alpha(\alpha-1)+\alpha-n^2=0,$$

d'où $\alpha=\pm n$, et la solution cherchée est de la forme: $F_n(r)=A_nr^n+B_nr^{-n}$, $n\geq 1$, où A_n et B_n sont des constantes arbitraires.

Enfin, la solution générale du problème (P') est donnée par:

$$w_n(r,\,\theta)=A_0+B_0\ln(r)+\Big(A_nr^n+B_nr^{-n}\Big)\Big(C_n\cos\big(n\theta\big)+D_n\sin\big(n\theta\big)\Big),\quad n\in\mathbb{N},\quad r>0.$$

Or, d'après le problème (P_1'), on doit poser $B_n=0$, $n\in\mathbb{N}$ pour assurer que le produit $F(r)G(\theta)$ définit une fonction continue à l'origine de $\mathbb{R}^2$. Donc, finalement la solution générale du problème (P') par la méthode de séparation des variables s'écrit sous la forme suivante

$$w_n(r,\,\theta)=r^n\Big(C_n'\cos\big(n\theta\big)+D_n'\sin\big(n\theta\big)\Big),\quad n\in\mathbb{N}$$

où C'_n et D'_n sont des constantes arbitraires avec $C'_n = A_n C_n$ et $D'_n = A_n D_n$. Aussi, en appliquant la méthode de Fourier, on cherche la solution u sous la forme:

$$w(r,\,\theta) = \frac{C'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \Big(C'_n \cos\big(n\theta\big) + D'_n \sin\big(n\theta\big)\Big), \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.16}$$

est une solution du problème (P') qui définit une fonction w continue à l'origine de $\mathbb{R}^2$. Il reste à choisir les coefficients C'_n et D'_n, (n=0,1,2,...) de sorte que w vérifie la condition $w\big(r = a,\,\theta\big) = h(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} w\big(r = a,\,\theta\big) = h(\theta) &= \frac{C'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \Big(C'_n \cos\big(n\theta\big) + D'_n \sin\big(n\theta\big)\Big) \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\alpha_n \cos\big(n\theta\big) + \beta_n \sin\big(n\theta\big)\Big), \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{aligned}$$

avec $\alpha_n = a^n C'_n$ et $\beta_n = a^n D'_n$. Les coefficients α_n et β_n sont donc proportionnels aux coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction 2π périodique qui coïncide avec h sur $[0,\,2\pi]$. Dans ce cas, ils sont déterminés par:

$$\begin{cases} \alpha_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} h(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad (n = 0, 1, 2, ...), \\ \beta_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} h(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad (n = 1, 2, 3, ...). \end{cases} \tag{5.17}$$

Par conséquent, en substituant (5.17) dans (5.16), on obtient

$$w(r,\,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \Big(\alpha_n \cos\big(n\theta\big) + \beta_n \sin\big(n\theta\big)\Big)$$

est une solution du problème (P').

5.6 Exercices

<u>**Exercice 01:**</u> Montrer qu'une fonction qui est une série de puissances dans la variable complexe $x + iy$ doit satisfaire les équations de Cauchy-Riemann et donc celle de Laplace.

<u>**Exercice 02:**</u> Trouver les solutions qui ne dépendent que de r de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k^2 u,$$

où k est une constante positive. (Indication: remplacer $u = v/r$).

<u>**Exercice 03:**</u> Résoudre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

dans la coque sphérique $0 < a < r < b$ avec les conditions aux limites $u = A$ sur $r = a$ et $u = B$ sur $r = b$, où A et B sont des constantes. (Astuce: cherchez une solution dépendant uniquement de r).

Exercice 04: Résoudre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1,$$

dans $r < a$ avec $u(x, y)$ s'annule sur $r = a$.

Exercice 05: Résoudre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1,$$

dans $a < r < b$ avec $u(x, y)$ s'annule sur $r = a$ et $r = b$.

Exercice 06: Résoudre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 1,$$

dans $a < r < b$ avec $u(x, y, z)$ s'annule sur les bords intérieurs et extérieurs.

Exercice 07: Résoudre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 1,$$

dans $a < r < b$ avec $u(x, y, z) = 0$ sur $r = a$ et $\partial u/\partial r = 0$ sur $r = b$.

Exercice 08: Une coque sphérique de rayon intérieur 1 et de rayon extérieur 2 présente une répartition de la température en régime permanent. Sa frontière intérieure est maintenue à 100 degré. Sa frontière extérieure satisfait $\partial u/\partial r = -\gamma < 0$, où γ est une constante.

1. Trouver la température.
2. Quelles sont les températures les plus chaudes et les plus froides?
3. Peut-on choisir γ pour que la température sur sa frontière extérieure soit de 20 degré? (Indication: la température ne dépend que du rayon.)

Chapitre 6

Equation des ondes

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie l'équation des ondes.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f \tag{6.1}$$

où c est une constante. Dans le cas de dimension 1, la forme canonique de l'équation sera utilisée pour montrer que le problème de Cauchy est bien posé. De plus, on va tirer des formules simples explicites pour les solutions.

On discute également certaines propriétés importantes des solutions de l'équation des ondes, qui sont également typiques pour les problèmes hyperboliques plus généraux.

6.2 Dérivation physique

En physique ou en mécanique, l'équation des ondes sert de modèle simplifié pour les oscillations sur une corde vibrante ($n = 1$), une membrane ($n = 2$) ou un solide élastique ($n = 3$). Dans ces modèles, $u(x, t)$ est le déplacement de la masse en pointe dans certaines directions du point x à l'instant $t \geq 0$. Dans (6.1), f modélise la force externe.

Par exemple, on suppose qu'un solide élastique occupe une région Ω dans $\mathbb{R}^3$ sans force externe. Pour toute sous-région $G \subset \Omega$, $F(x, t)$ est la densité de force de contact agissant sur G à travers la frontière ∂G. La densité de masse est normalisée à l'unité. Soit ν le vecteur normal externe unitaire de ∂G. L'accélération dans G est

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_G u dx = \int_G \frac{d^2}{dt^2} u dx$$

tandis que la force de contact nette est

$$- \int_G \vec{F} \nu dS$$

alors, par la loi de Newton, on a

$$\int_G \frac{d^2}{dt^2} u dx = - \int_G \vec{F} \nu dS = \int_G \nabla . \vec{F} dx$$

où on a appliqué le théorème de divergence[1]. Par conséquent, on conclue que

$$\frac{d^2}{dt^2}u = -\nabla.\vec{F}.$$

Pour un corps élastique, $\vec{F} = \vec{F}(\nabla u)$, donc

$$\frac{d^2}{dt^2}u + \nabla.\vec{F}\,(\nabla u) = 0.$$

Dans le cas de petites oscillations, $|\nabla u|$ est très petit, et donc $\vec{F}(\nabla u) \approx -c^2\nabla u$, donc,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u = 0.$$

On remarque que, d'après l'interprétation physique, il est mathématiquement approprié de spécifier deux conditions initiales, à savoir le déplacement u et la vitesse $\frac{\partial u}{\partial t}$ à $t = 0$. Cela apparaîtra souvent dans la suite de ce chapitre.

6.3 Forme canonique et solution générale

L'équation des ondes homogène en dimension 1 d'espace a la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty \le a < x < b \le +\infty, \; t > 0, \tag{6.2}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est appelé la vitesse de l'onde. Pour obtenir la forme canonique de l'équation (6.2), on utilise le changement de variables

$$\begin{cases} \xi = x + ct, \\ \eta = x - ct \end{cases}$$

et on pose $w(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$. La règle de chaînes permet d'obtenir

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial \eta}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\partial \eta} = 0.$$

C'est la forme canonique de l'équation des ondes. Comme $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\partial \eta} = 0$, il s'ensuite que $\frac{\partial w}{\partial \xi} = f(\xi)$, puis $w = \int f(\xi)\,d\xi + G(\eta)$. La solution générale de l'équation $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\partial \eta} = 0$ a la forme

$$w(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

où $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ sont deux fonctions arbitraires. Le fait que $w(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ implique

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct) \tag{6.3}$$

[1] Il affirme que l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel $\vec{F}$ sur un volume V dans $\mathbb{R}^3$ est égal au flux de ce champ à travers la frontière du volume

$$\int_V \nabla\vec{F}dV = \int_{\partial V}\vec{F}d\vec{S}$$

Où $\vec{S}$ est le vecteur normal à la surface, dirigé vers l'extérieur.

6.4 Problème de Cauchy et la formule de d'Alembert

Le problème de Cauchy pour l'équation des ondes homogène unidimensionnelle est donné par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, -\infty < x \leq +\infty, t > 0, \tag{6.4}$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ \ -\infty < x \leq +\infty \tag{6.5}$$

Une solution classique du problème de Cauchy (6.4)-(6.5) est une fonction u qui est deux fois continument différentiable pour tout $t > 0$, telle que u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ sont continues pour $t > 0$, et tels que (6.4)-(6.5) sont satisfaits.

Théorème 6.1

La solution du problème de Cauchy (6.4)-(6.5) est donnée par la formule suivante (appelée formule de d'Alembert)

$$u\left(x,t\right) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g\left(s\right)ds.$$

Si en plus, $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $g \in C^1(\mathbb{R})$, cette solution est classique telle que $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ donnée par la formule de D'Almebert

Preuve

Rappelons que la solution générale de l'équation des ondes est de la forme

$$u\left(x,t\right) = F\left(x+ct\right) + G\left(x-ct\right). \tag{6.6}$$

Notre objectif est de trouver F et G telles que les conditions initiales de (6.5) soient satisfaites.
En $t = 0$, on obtient

$$u\left(x,0\right) = F\left(x\right) + G\left(x\right) = f(x). \tag{6.7}$$

En différenciant (6.6) par rapport à t et en substituant $t = 0$, on obtient également

$$u_t\left(x,0\right) = cF'\left(x\right) - cG'\left(x\right) = g(x). \tag{6.8}$$

Intégration de (6.8) sur $[0,x]$ donne

$$F\left(x\right) - G\left(x\right) = \frac{1}{c}\int_0^x g\left(s\right)ds + C$$

où $C = F(0) - G(0)$. Les équations (6.7) et (6.8) sont deux équations algébriques linéaires pour $F(x)$ et $G(x)$. La solution de ce système d'équations est donnée par

$$F\left(x\right) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g\left(s\right)ds + \frac{C}{2}, \tag{6.9}$$

$$G\left(x\right) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g\left(s\right)ds - \frac{C}{2}. \tag{6.10}$$

En substituant ces expressions pour F et G dans la solution générale (6.6), on obtient la formule

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

qui s'appelle la formule de D'Alembert.
L'unicité vient directement de la formule d'Alembert. En effet, cette formule nous fournit une solution et on a montré que toute solution du problème de Cauchy est nécessairement égale à la solution de D'Alembert. Notons que, dans notre hypothèse de régularité ($f \in C^2(\mathbb{R}), g \in C^1(\mathbb{R})$).

L'exemple suivant illustre l'utilisation de la formule d'Alembert.

Exemple 6.1

Considérons le problème de Cauchy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x \leq +\infty, \; t > 0,$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -1, \\ x+1, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < \infty, \end{cases}, \\ u_t(x,0) &= g(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < \infty, \end{cases} \end{aligned}$$

Donner $u(1,1/2)$ et discuter la régularité de la solution u.
La formule de d'Alembert implique

$$\begin{aligned} u(1,1/2) &= \frac{1}{2}\left[f(3/2) + f(1/2)\right] + \frac{1}{2}\int_{1/2}^{3/2} g(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \int_{1/2}^{1} g(s)\,ds + \int_{1}^{3/2} g(s)\,ds\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \int_{1/2}^{1} 1.ds\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Comme g et $f\prime$ ne sont pas continues aux points $x = -1, 0, 1.$, alors u n'est peut être pas de classe C^1. Le problème est posé quand $x \pm t = Const$. La solution est régulière au voisinage du point $(1, 1/2)$, ceci a permet de calculer $u(1, 1/2)$.

6.5 Le problème de Cauchy non homogène

Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \; t > 0, \tag{6.11}$$

$$u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x)\ \ -\infty<x<+\infty,\ t>0, \tag{6.12}$$

Ce problème modélise, par exemple, la vibration d'une très longue chaîne en présence d'une force externe F.

Théorème 6.2

Soient $f\in C^2(\mathbb{R})$, $g\in C^1(\mathbb{R})$ et F, $F_x\in C\left(\mathbb{R}^2\right)$, alors le problème (6.11) - (6.12) admet une unique solution $u\in C^2(\mathbb{R}\times(0,\infty))\cap C^1(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ donnée par la formule

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds+\frac{1}{2c}\int_{\tau=0}^{\tau=t}\int_{\xi=x-c(t-\tau)}^{\xi=x+c(t-\tau)}F\left(\xi,\tau\right)d\xi d\tau. \tag{6.13}$$

Preuve

L'équation (6.11) peut s'écrire

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)u=F\left(x,t\right),\ \ -\infty<x<+\infty,\ t>0,$$

Pour simplification, on pose

$$v(x,t)=\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{6.14}$$

On obtient le problème

$$\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial t}-c\frac{\partial v}{\partial x}=F\left(x,t\right),\ \ -\infty<x<+\infty,\ t>0,\\ v(x,0)=g(x)-cf'(x)\end{cases} \tag{6.15}$$

dont la solution s'écrit

$$v\left(x,t\right)=g(x+ct)-cf'(x+ct)+\int_0^t F\left(x+c\left(t-r\right),r\right)dr. \tag{6.16}$$

Pour trouver u, on résout l'équation (6.14) avec la condition $u(x,0)=f(x)$ où v est donnée dans (6.16), on obtient

$$u\left(x,t\right)=f(x-ct)+\int_0^t g(x+cs)ds-c\int_0^t f'(x+cs)ds+\int_0^t\int_0^s F\left(x-c(t-s)+c\left(s-r\right),r\right)drds.$$

Pour le dernier terme, on considère le changement de variable $\xi=x-c(t-s)+c\left(s-r\right)$, on a $d\xi dr=2cdsdr$ et on remplace dans la formule précédente, on trouve la formule (6.13).

Exemple 6.2

Considérons le problème de Cauchy

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-9\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=e^x-e^{-x},\ \ -\infty<x\leq+\infty,\ t>0,$$

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= x, \quad -\infty < x \leq +\infty, \\
u_t(x,0) &= \sin x, \quad -\infty < x \leq +\infty.
\end{aligned}
$$

En utilisant la formule de d'Alembert, on a

$$
u\left(x,t\right)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds+\frac{1}{2c}\int_{\tau=0}^{\tau=t}\int_{\xi=x-c(t-\tau)}^{\xi=x+c(t-\tau)}F\left(\xi,\tau\right)d\xi d\tau.
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
u\left(x,t\right) &= \frac{1}{2}\left[x+3t+x-3t\right]+\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t}\sin s ds+\frac{1}{2c}\int_{\tau=0}^{\tau=t}\int_{\xi=x-3(t-\tau)}^{\xi=x+3(t-\tau)}\left(e^{\xi}-e^{-\xi}\right)d\xi d\tau \\
&= x+\frac{1}{3}\sin x\sin 3t-\frac{2}{9}\sinh x+\frac{2}{9}\sinh x\cosh 3t.
\end{aligned}
$$

6.6 Formule de Kirchhoff

6.6.1 Problème de Cauchy sur $\mathbb{R}^3$

On considère le problème suivant

$$
\begin{cases}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u\left(x,t\right)=0, \;\; x\in\mathbb{R}^3, \;\; t>0, \\
u(x,0)=f(x), \;\; x\in\mathbb{R}^3, \\
u_t(x,0)=g(x), \;\; x\in\mathbb{R}^3
\end{cases}
\tag{6.17}
$$

où $\Delta u\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\left(x,t\right)$. On introduit S_r et B_r la sphère et la boule de $\mathbb{R}^3$

$$
S_r=\left\{x\in\mathbb{R}^3:\|x\|=r\right\}
$$

et

$$
B_r=\left\{x\in\mathbb{R}^3:\|x\|\leq r\right\}.
$$

Pour $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, la moyenne de u est donnée par

$$
\bar{u}(r,t)=\frac{1}{S.(B(x;r))}\int_{S_r}u(y,t)dS\left(y\right)=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{S_r}u(y,t)dS\left(y\right)
$$

où $dS(y)$ désigne la mesure de surface de B_r .

Lemme 6.1

Si u résout (6.17) alors $\bar{u}$ résout

$$
\begin{cases}
\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial r^2}-\frac{(n-1)}{r}\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}=0, \;\; 0<r<1, \;\; t\geq 0 \\
\bar{u}(r,0)=\bar{f}(r), \\
\bar{u}_t(r,0)=\bar{g}(r).
\end{cases}
\tag{6.18}
$$

Preuve

Pour obtenir l'équation satisfaite par $\bar{u}$, on applique la formule de Green sur B_r

$$\int_{B_r} \Delta u = \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

où ν est le vecteur normal unitaire sur S_r, sortant de B_r. On utilise l'équation principale, on trouve

$$\int_{B_r} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

En utilisant les coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

où $\theta \in \left]0, \pi\right[$ et $\varphi \in \left]0, 2\pi\right[$. On obtient donc

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr = c^2 r^2 \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial r} d\theta d\varphi.$$

D'autre part

$$\bar{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Il en résulte que

$$\int_0^r \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} r^2 dr = c^2 r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}.$$

En dérivant par rapport r, on obtient l'équation dans (6.18). Pour les condition initiales

$$\bar{u}(r,0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} u(y,0) dS\left(y\right) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} f(y) dS\left(y\right) = \bar{f}$$

et

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(r,0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} u(y,0) dS\left(y\right) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} g(y) dS\left(y\right) = \bar{g}$$

Théorème 6.3

Soient $f \in C^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ et $g \in C1\left(\mathbb{R}^3\right)$, alors le problème (6.17) admet une solution unique donnée par

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\|x-x_0\|=ct} f\left(s\right) dS\left(s\right)\right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\|x-x_0\|=ct} g\left(s\right) dS\left(s\right)$$

Preuve

Dans (6.18), on pose $v := r\bar{u}$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0, \\ v\left(r,0\right) = r\bar{f}, \\ \frac{\partial v}{\partial t}\left(r,0\right) = r\bar{g} \end{cases}$$

D'après la formule de de D'Alembert, la solution de ce problème s'écrit

$$v\left(r,t\right) = \frac{1}{2}\left[\left(r+ct\right)\bar{f}(x+ct) + \left(r-ct\right)\bar{f}(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct} s\bar{g}\left(s\right)ds$$

que l'on peut réécrire

$$v\left(r,t\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct} s\bar{f}(s)ds\right] + \frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct} s\bar{g}\left(s\right)ds$$

On récupère ensuite $u(0,t) = \bar{u}(0,t)$ par dérivation, puisque $\bar{u}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial r}(0,t)$. Comme

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct} s\bar{g}\left(s\right)ds\right]\right)_{r=0} = t\bar{g}\left(ct\right) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}} g\left(s\right)dS\left(s\right)$$

avec la même formule pour f, on en déduit

$$u(0,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}} f\left(s\right)dS\left(s\right)\right] + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}} g\left(s\right)dS\left(s\right)$$

On a la même formule lorsqu'on translate 0 en x_0. Finalement, on a obtenu la formule générale, dite de Kirchhoff :

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\|x-x_0\|=ct} f\left(s\right)dS\left(s\right)\right] + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\|x-x_0\|=ct} g\left(s\right)dS\left(s\right).$$

6.7 Exercices

Exercice 01: Résoudre le problème

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$$

$$\begin{aligned} u(0,t) &= t^2,\ t > 0, \\ u(x,0) &= x,\ 0 \leq x < \infty, \\ u_t(x,0) &= 6x,\ 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

et évaluer $u(4,1)$ et $u(1,4)$.

Exercice 02: Considérons le problème

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ \ -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1-x^2, & |x| \leq 1, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$
$$u_t(x,0) = \begin{cases} 4, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer $u(x,1)$.
2. Trouver $\lim_{t\to\infty} u(5,t)$.
3. Trouver l'ensemble des points où la solution est singulière (non classique).
4. Trouver l'ensemble de tous les points où la solution n'est pas continue.

Exercice 03:

1. Résoudre le problème suivant de valeur limite initiale pour une chaîne vibrante semi-infinie fixée à $x = 0$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ 0 < x < \infty, \ t > 0,$$
$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \ t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \ 0 \leq x < \infty, \\ u_t(x,0) &= g(x), \ 0 \leq x < \infty. \end{aligned}$$
où $f \in C^2([0,\infty))$ et $g \in C^1([0,\infty))$ satisfassent les conditions de compatibilité: $f(0) = f''(0) = g(0) = 0$.
2. Résoudre le problème avec $f(x) = x^3+x^6$ et $g(x) = sin2x$ et évaluer $u(1,i)$ pour $i = 1,2,3$. La solution est-elle classique?

Exercice 04: Résoudre le problème

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1, \ -\infty < x < \infty, \ t > 0,$$
$$\begin{aligned} u(x,0) &= x^2, \ -\infty < x < \infty, \\ u_t(x,0) &= 1, \ -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Exercice 05:

1. Résoudre le problème de Darboux
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ t > \max\{-x, x\}, \ t \geq 0,$$
$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi(t), & x = t, \ t \geq 0, \\ \psi(t), & x = -t, \ t \geq 0, \end{cases} \quad -\infty < x < \infty,$$
où $\varphi, \psi \in C^2([0,\infty)$ vérifie $\varphi(0) = \psi(0)$.
2. Prouver que le problème est bien posé.

Exercice 06: (Formule de Kirchhoff) Considérons le problème de Cauchy en trois dimensions (avec $c = 1$) où les données de Cauchy sont données par

$$f(x) = 0 \text{ et } g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \ \|x\| \leq 1, \\ 0 \text{ si } \ \|x\| > 1. \end{cases}$$

Exercice 07: (Formule de Kirchhoff) Considérons le problème de Cauchy en trois dimensions (avec $c = 1$) où les données de Cauchy sont données par

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \ \|x\| \leq 1, \\ 0 \text{ si } \ \|x\| > 1 \end{cases} \quad \text{et } g(x) = 0$$

Exercice 08: Une onde de pression générée à la suite d'une explosion satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - 16\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0,$$

où $P(x, t)$ est la pression au point x et au temps t. Les conditions initiales au temps d'explosion $t = 0$ sont

$$P(x, 0) = \begin{cases} 10, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}, \frac{\partial P}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

Un bâtiment est situé au point $x_0 = 10$. L'ingénieur qui a conçu le bâtiment a déterminé qu'il maintiendrait une pression jusqu'à $P = 6$. Trouvez l'instant t_0 où la pression au bâtiment est maximale. Le bâtiment s'effondrera-t-il?

Chapitre 7

Equation de La chaleur

Dans ce chapitre, On étudie l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = 0 \tag{7.1}$$

où u est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$. Cette équation modélise certaines phénomènes d'évolution comme la diffusion de chaleur, la répartition de substances chimiques,. . .

Remarque 7.1

Un changement de variable, $t^* = kt$, transforme cette équation en

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0. \tag{7.2}$$

Il suffit donc d'étudier le cas $k = 1$.

7.1 Modélisation

7.1.1 Equations de réaction-diffusion

On va modéliser le comportement de diffusion d'une population (cellules, insectes) ou de particules (substances chimiques). On suppose l'existence d'une source de particules (naissance, resp. décès, d'insectes).

Soit $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$, avec Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\partial\Omega$ régulier. On note

- $u(x, t)$ la fonction de densité des particules (la concentration),
- $q(x, t, :::)$ le taux de création net de particules (naissances moins décés) et
- $F(x; t; ...)$ la densité du flux de particules, c'est-à-dire $F(x; t).n$ est le flux de particules (par unité de temps) à travers un élément de surface plane, perpendiculaire à n en x et d'aire 1.

On suppose pour la suite que u et F sont régulières et on considère $O \subset \Omega$ de bord régulier. La variation de masse dans O est due à la création/destruction de particules dans O et au flux de particules à travers $\partial\Omega$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_O u(x, t)dx = \int_O q(x, t)dx - \int_{\partial O} F(x, t).n(x)dS_x,$$

d'où, pour tout $O \subset \Omega$,

$$\int_O \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)dx = \int_O -\mathrm{div}\,(F(x,t)) + q(x,t))dx,$$

dont on tire la loi d'équilibre de la population

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -\mathrm{div} F + q \text{ dans } \Omega.$$

Suivant la loi de Fourier[1], la chaleur va des régions chaudes vers les régions froides à une vitesse proportionnelle à la variation de température $F = -k\nabla u$ où k est la constante de conductivité de chaleur. On suppose que l'on ne peut perdre de la chaleur que par $\partial\Omega$ et $q = 0$. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -\mathrm{div} F = -\mathrm{div}\,(k\nabla u) \quad = k\Delta u.$$

On a obtenu l'équation de la chaleur.

7.2 Calcul d'une solution

On considère le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \text{ sur } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(x,0) = g(x), \text{ sur } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

On va déterminer, de façon formelle, une solution en utilisant la transformée de Fourier de u par rapport aux variables d'espace x :

$$v(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u(x,t) e^{-ix.\xi} dx.$$

On obtient l'équation différentielle ordinaire en v

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t) - |\xi|^2 v(\xi, t) = 0, \\ v(\xi, 0) = \hat{g}(\xi) \end{cases}$$

dont la solution est

$$v(\xi, t) = \hat{g}(\xi) e^{-|\xi|^2 t}$$

ce qui donne

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} e^{ix.\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t) g(y) dy$$

où

$$K(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i(x-y).\xi - |\xi|^2 t) d\xi = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

où $x^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ est le produit scalaire de x avec lui même. La fonction K est appelée le noyau de la chaleur.

[1](1807), il décrit le phénomène de conductivité thermique, Flux de chaleur (flux) = conductivité thermique x surface de contact x gradient de température ou flux

Lemme 7.1

K possède les propriétés suivantes

1. $K \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ et pour $x \in \mathbb{R}^n$et $t > 0$: $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) K(x,t) = 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}^d} K(x,t)dx = 1$ pour tout $t > 0$.

Preuve

La démonstrations de la première propriété est simple. Pour la démonstration de la deuxième propriété, il faut savoir que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} K(x,t)dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2} dx \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} ... e^{-x_n^2} dx_n ... dx_1 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^n = 1.
\end{aligned}$$

Théorème 7.1

Soit $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ et soit

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t) g(y) dy.$$

Alors
(i) Si $g \geq 0$ et g non identiquement nulle, alors $u(t,x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$.
(ii) $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ et

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

(iii) Si $g \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et si g est continue en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\lim_{(x,t) \to (x_0,0)} u(x,t) = g(x_0).$$

En particulier, si g est continue et bornée, alors u est continue sur $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ et $u(0,x) = g(x)$.
(iv) Pour tout $t > 0$ on a $\|u(.,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Preuve

La propriété (i) suit immédiatement de (1) du Lemme 7.1 et (ii) suit de de (2) du Lemme 7.1.
Pour (iii) en utilisant Fubini. Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ continue en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, en utilisant (ii) de Lemme précédent, on obtient

$$\begin{aligned}
& |u(x,t) - g(x_0)| \\
= & \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)\,(g(y) - g(x_0))\,dy \right| \\
\leq & \|g\|_{L^\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\varepsilon)} K(x-y,t)dy \right| + \left| \int_{B(x_0,\varepsilon)} K(x-y,t)\,(g(y) - g(x_0))\,dy \right| \\
\leq & \frac{\|g\|_{L^\infty}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\varepsilon)} e^{-y^2/4t} dy + \sup_{y \in B(x_0,\varepsilon)} |g(y) - g(x_0)| \\
= & \frac{\|g\|_{L^\infty}}{(\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\varepsilon/\sqrt{4t})} e^{-y^2} dy + \sup_{y \in B(x_0,\varepsilon)} |g(y) - g(x_0)|
\end{aligned}$$

et donc

$$\limsup_{(x,t)\to(x_0,0)} |u(x,t) - g(x_0)| \leq \sup_{y \in B(x_0,\varepsilon)} |g(y) - g(x_0)|$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Comme g est continue en x_0, on obtient

$$\limsup_{(x,t)\to(x_0,0)} |u(x,t) - g(x_0)| = 0.$$

La propriété (iv) suit de l'inégalité de Young appliquée à $k(.,t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

7.3 Principe de maximum et unicité

On va traiter deux cas, celui d'un domaine spatial borné et celui de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné régulier.

Théorème 7.2

Soient $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ et $\lambda \geq 0$ tels que

$$\lambda u - \Delta u \leq 0.$$

Alors

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Preuve

Dans le cas de $\lambda = 0$, on retrouve le principe du maximum du chapitre précédent. On suppose que $\max_{\partial\Omega} u = 0$. Alors il suffit de montrer que $u \leq 0$. Pour $\varepsilon > 0$ on définit

$$g_\varepsilon(\eta) = \begin{cases} 0, & \eta \leq 0, \\ \frac{\eta^2}{2\varepsilon}, & 0 < \eta < \varepsilon, \\ \eta - \frac{\varepsilon}{2}, & \eta \geq 0. \end{cases}$$

Donc, $g_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ et $0 \leq g\prime \leq 1$. En plus, $\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(\eta) = \eta$ pour tout $\eta \geq 0$. Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lambda \int_\Omega u g_\varepsilon(u) - \int_\Omega \Delta u g_\varepsilon(u) \\ &= \lambda \int_\Omega u g_\varepsilon(u) + \int_\Omega \nabla u \nabla g_\varepsilon(u) - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n} g_\varepsilon(u) \\ &= \lambda \int_\Omega u g_\varepsilon(u) + \int_\Omega |\nabla u|^2 g'_\varepsilon(u) - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n} g_\varepsilon(u). \end{aligned}$$

Comme $\max_{\partial\Omega} u = 0$, on a $g_\varepsilon(u) = 0$ sur $\partial\Omega$, et donc le troisième terme à droite est nulle. De plus, $\lim_{\eta \to 0} g\prime_\varepsilon(u) = 1_{\{u \geq 0\}}$ presque partout. Le théorème de convergence dominée implique

$$0 \geq \lambda \int_{\{u \geq 0\}} u^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 .1_{\{u \geq 0\}}.$$

Les deux termes à droite sont positifs ($\lambda \geq 0$!), et donc cette inégalité implique

$$\lambda \int_{\{u \geq 0\}} u^2 = 0 \text{ et } \int_\Omega |\nabla u|^2 .1_{\{u \geq 0\}} = 0.$$

Si $\lambda > 0$, alors $\int_{\{u \geq 0\}} u^2 = 0$ ce qui implique $u \leq 0$ presque partout sur Ω, et par continuité, $u \leq 0$. Si on a seulement $\lambda \geq 0$, on déduit au moins que u est constante sur l'ensemble $1\{u \geq 0\}$. Par continuité, ça implique $u = 0$ sur $1\{u \geq 0\}$, et donc $u \leq 0$ sur Ω.

Définition 7.1

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert on définit le spectre de l'opérateur de Laplace avec conditions au bord de Dirichlet

$$\Lambda(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{R} : \exists e \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), e \neq 0 \\ \text{solution de } \lambda e - \Delta u = 0 \text{ et } e|_{\partial\Omega.} = 0 \end{array} \right\}$$

Corollaire 7.1

Pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné, régulier on a $\Lambda \subset (0, \infty)$.

Preuve

Soit $\lambda \geq 0$ et soit $e \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ une solution de

$$\lambda e\,(x) - \Delta u\,(x) = 0, \quad e|_{\partial\Omega} = 0.$$

Le principe du maximum implique $e \leq 0$, et comme $-e$ est aussi une solution de ce problème, on a aussi $e \geq 0$. Donc, $e = 0$, c.à.d. le problème ci-dessus n'admet pas de solutions non-triviales. Donc $\lambda \notin \Lambda(\Omega)$, ou $\Lambda(\Omega) \subset (-\infty, 0)$.

7.4 Exercices

Exercice 01: Résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0. \\ u\,(x, 0) = e^x. \end{cases}$$

Exercice 02: Soit f une fonction mesurable et supposons que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $|f(y)| \leq Me^{a|y|^2}$ avec a, M des constantes fixées.

1. Montrer que la fonction u du Théorème 7.1, qui vérifie $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \left]0, \frac{1}{4a}\right[$.

2. Montrer que si f est continue en x_0 on a en plus $\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = g(x_0)$.

Exercice 03: (Exemple de Tikhonov) Soit

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} \text{ pour } t > 0 \\ 0 \text{ pour } t \leq 0 \end{cases}$$

et pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, posons

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^k(t)}{(2k)!} x^{2k}.$$

1. Vérifier que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $u(x, 0) = 0$.

2. En déduire que la solution u du Théorème 7.1 n'est pas unique.

Exercice 04: On suppose que la donnée initiale g est continue et uniformément bornée sur $\mathbb{R}$. Vérifier que

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-t-y|^2}{4t}} g(y)dy$$

pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$, est bien une solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exercice 05: (Cas où le domaine spatial est $\mathbb{R}^n$) Soit $g \in C(\mathbb{R}^n)$ et soit $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ telles que $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ existent et soient continues dans $\mathbb{R}^n \times]0, T[$, si de plus,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq 0 \ \text{ pour } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, T[, \\ u\,(x, 0) = g(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,t) \leq Me^{a|x|^2} \text{ pour } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, T[. \end{cases}$$

Montrer que
$$u(x,t) \leq \sup_{z\in\mathbb{R}^n} f(z) \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,T[.$$

Exercice 06: (Cas où le domaine spatial est $\mathbb{R}^n$) Soit $\phi \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, $g \in C(\mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe au moins une solution $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq 0 \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,T[, \\ u(x,0) = g(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,t) \leq Me^{a|x|^2} \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,T[\end{cases}$$

qui vérifie $|u(x,t)| \leq Me^{a|x|^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,T[$ et pour des constantes $M, a > 0$.

Tests et examens

Examen 2017

<u>Exercice 01:</u> (6pts) On s'intéresse à chercher les solutions $u(x,y)$ de classe C^2 du problème

$$\left\{\begin{array}{l} x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(y-4x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-4y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}=0 \\ u(0,y)=y^2,\ \frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0. \end{array}\right. \quad ......(P)$$

1. Soit $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Vérifier que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-4\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(y-4x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-4y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}.$$

2. Trouver toutes les fonctions $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telles que

$$\frac{\partial v}{\partial x}-4\frac{\partial v}{\partial y}=0; ....(E_1)$$

3. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On veut trouver toutes les fonctions $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de telle sorte que

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=f(4x+y)..........(E_2)$$

On pose $\xi=\frac{x}{y}$ et $\eta=4x+y$ et l'on note $w(\xi,\eta)=u(x,y)$.
a. Quelle équation vérifie w lorsque u est solution de (E_2) ?
b. Résoudre cette équation. En déduire les solutions de (E_2).
c. De ce qui précède, donner la solution de (P).
<u>Exercice 02:</u> (6pts) On considère l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+u=0..........(E_3)$$

1. Déterminer le type de (E_3), les courbes caractéristiques et les coordonnées caractéristiques (ξ,η) associés à (E_3).
2. On pose $v(\xi,\eta)=u(x,y)$, montrer que ces coordonnées conduisent à la forme standard

$$2\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{v}{2}=0..........(E_4)$$

3. Afin de résoudre (E_4), on pose le changement de fonction

$$v(\xi,\eta)=\varphi(\xi,\eta)e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)},$$

déterminer l'équation vérifiée par v, déduire alors la solution de (E_4) puis celle de (E_3).
<u>Problème:</u> (**8pts**) On considère l'EDP pour $x\in]1,e[$, $t\in\mathbb{R}^+$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3x\frac{\partial u}{\partial x}.........(E_5)$$

avec les conditions aux limites et les conditions initiales

$$\begin{aligned} u(1,t) &= u(e,t)=0,\ t>0.....(CL)\,, \\ u(x,0) &= 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=f(x)....(CI)\,. \end{aligned}$$

où f est une fonction continue sur $]1,e[$. On cherche ici la solution de ce problème par la méthode de séparation des variables, c-à-d

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t).$$

I) On pose $u(x,t)=X(x)T(t)$, on suppose qu'il existe $t_0>0$ tel que $T(t_0)\neq 0$.
1. Montrer que pour que cette forme satisfasse (E_5), il doit exister λ telle que

$$\begin{cases} x^2X''(x)+3xX(x)-\lambda X(x)=0...(edo\ 1) \\ T''(t)-\lambda T(t)=0.............(edo\ 2) \end{cases}$$

2. En utilisant les conditions aux limites, donner les valeurs de $X(1)$ et $X(e)$.
II) Pour résoudre $(edo\ 1)$, on utilise le changement de variable $x=e^z$ et $Z(z)=X(x)$.
1. Montrer que $(edo\ 1)$ devient

$$Z''(z)+2Z'(z)-\lambda Z(z)=0,\ \ z\in]0,1[........(edo\ 3)$$

2. Donner les valeurs de $Z(0)$ et $Z(1)$.
3. Donner selon les valeurs de λ la forme générale de la solution de $(edo\ 3)$.
4. Parmi ces cas, lequel est compatible avec les conditions aux limites (qui donne des solutions non triviales)?
5. En déduire alors la solution générale de $(edo\ 3)$ notée Z_k puis celle de $(edo\ 1)$ notée X_k.
III) Dans cette partie, on s'intéresse à conclure la solution $u(x,t)$.
1. Donner la solution T_k de $(edo\ 2)$.
2. En exploitant les conditions initiales (CI), donner l'expression de $u(x,t)$.

Examen de Rattrapage 2017

Exercice 01: **(6pts)** On s'intéresse à chercher les solutions $u(x,y)$ de classe C^2 du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(0,y) = y^2, \ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0. \end{cases} \quad ......(P)$$

1. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Vérifier que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - 4\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

2. Trouver toutes les fonctions $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$\frac{\partial v}{\partial x} - 4\frac{\partial v}{\partial y} = 0; ....(E_1)$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On veut trouver toutes les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de telle sorte que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f(4x+y)..........(E_2)$$

On pose $\xi = -x + y$ et $\eta = 4x + y$ et l'on note $w(\xi,\eta) = u(x,y)$.
a. Quelle équation vérifie w lorsque u est solution de (E_2) ?
b. Résoudre cette équation. En déduire les solutions de (E_2).
c. De ce qui précède, donner la solution de (P).

Exercice 02: **(6pts)** Si on considère une ligne électrique, dont les propriétés linéiques sont : résistance R, inductance L, capacité C, conductivité G. Le voltage E à l'instant t au point d'abscisse x est solution de l'équation dite des télégraphistes.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + (RC + LG)\frac{\partial E}{\partial t} + RGE..........(E_3)$$

Afin d'étudier cette équation, on peut la mettre sous la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta u = 0..........(E_4)$$

où c, α et β sont des constantes.
1. Déterminer le type, les courbes caractéristiques et les coordonnées caractéristiques (ξ,η) associés à (E_4).
2. On pose $v(\xi,\eta) = u(x,y)$, déterminer la forme canonique associée à (E_4).
3. Montrer en utilisant ce changement de fonction inconnue

$$v(\xi,\eta) = \varphi(\xi,\eta)e^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

que la forme canonique peut se simplifier à l'équation

$$k_1\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + k_2\varphi = 0....(E_5)$$

où λ, μ, k_1 et k_2 sont des constantes à déterminer.

Problème **(8pts)**: On considère un barreau cylindrique métallique, d'axe (Ox), de longueur L, de chaleur massique c, de masse volumique ρ, et de conductibilité thermique K. Le problème aux frontières (P) modélisant la diffusion de la chaleur $\theta(x,t)$ dans le barreau est

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t}(x,t) = \frac{K}{\rho c}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x,t), & x \in]0,L[, \ t > 0, \\ \theta(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(L,t) + h\theta(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ \theta(x,0) = \theta_0(x), & x \in]0,L[, \\ \theta_0(0) = 0 \text{ et } \frac{\partial \theta_0}{\partial x}(L) + h\theta_0(L) = 0. & \end{cases} \quad .... \text{(P)}$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, donner la solution de (P).

Test d'évaluation 2018

Exercice 01: **(5.5pts)** On considère l'EDP linéaire suivante

$$\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \ldots\ldots\ldots.(E_1)$$

1) Donner les solutions (de classe C^1) de (E_1).
2) Trouver toutes les solutions du problème de Cauchy.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(0,y) = y^2. \end{cases}$$

3) Le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(x,0) = x^2, \end{cases}$$

a-t-il des solutions ?

Exercice 02: **(6.5pts)** On étudie l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u.....(E_2)$$

où la fonction inconnue $u(x,y)$ est de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.
1) Montrer l'existence de solutions non nulles.
2) Soit $g : t \to u(tx,ty)$ avec (x,y) un couple de $\mathbb{R}^2$
a) Montrer que g est de classe C^1 et calculer sa dérivée.
b) Vérifier que g satisfait une équation différentielle, on demande à la déterminer.
c) Exploiter cette fonction pour résoudre l'équation (E_2).

Examen Final 2018

Exercice 01: (7pts) Soit l'EDP du premier ordre suivant

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{u^2}{x}; \dots\dots\dots (E_1)$$

1) Déterminer le système caractéristique et les intégrales premières associés à (E_1).
2) Donner alors la solution générale de (E_1) sous forme implicite puis sous forme explicite.
3) Déterminer la solution passant par la courbe définie par

$$y = 1 \text{ et } u = \frac{x}{x^2-1}.$$

Exercice 02: (7pts) On considère l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + u = 0 \dots\dots\dots (E_2)$$

1. On pose $\xi = x - y$ et $\eta = x + y$ et l'on note $v(\xi, \eta) = u(x, y)$, montrer que ces coordonnées conduisent à l'équation

$$2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{2} = 0 \dots\dots\dots (E_3)$$

2. Afin de résoudre (E_3), on pose le changement de fonction

$$v(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta)e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)},$$

déterminer l'équation vérifiée par φ, déduire alors la solution de (E_3) puis celle de (E_2).

Exercice 03: (6pts) On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ le problème

$$\begin{cases} y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Rappeler ce qu'une solution de cette EDP vérifie le long des courbes caractéristiques.
2. Montrer qu'il s'agit de demi-cercles, tracez les soigneusement.
3. Quelle condition doit vérifer f pour qu'il y ait existence d'une solution ?
4. Déterminer les solutions de l'EDP dans le cas $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^4}$.

Test d'évaluation 2019

Exercice 01: **(7pts)** On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(0,y) = y^2. \end{cases} \quad .....(E_1)$$

1) Donner la définition d'une courbe caractéristique de (E_1). 2)Donner le théorème d'existence et d'unicité pour (E_1).
3) Définir les caractéristiques de (E_1).
4) Déterminer les courbes caractéristiques de (E_1).
5) Démontrer que la solution de (E_1) est constante le long des caractéristiques.
6) Résoudre (E_1) si c'est possible.
7) Le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(x,0) = x^2 \end{cases} \quad .....(E_2)$$

admet-il des solutions? **Exercice 02:** **(5pts)** Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

1) Déterminer la nature de cette équation.
2) Donner la forme canonique correspondante. 3) Résoudre cette équation.

Examen Final 2019

Exercice 01: (6pts) Soit

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x > 0;\ y > 0\}.$$

On considère alors sur Ω le problème

$$\begin{cases} 2y\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(x,0) = f(x),\ x > 0, \end{cases}$$

où f est une fonction donnée.
1. Déterminer les courbes caractéristiques et tracez-les.
2. Rappeler ce qu'une solution de cette EDP vérifie le long des courbes caractéristiques (justifier).
3. Montrer que les solutions du problème est : $u(x,y) = f(y^2 - x)$ en déterminant son domaine d'existence.
4. Expliquer pourquoi ce problème n'est pas bien posé.
Exercice 02: (6pts) On considère l'équation suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0..........(E)$$

1. Écrire (E) sous la forme canonique correspondante.
2. Trouver la solution générale de l'équation (E).
3. Trouver une solution spécifique satisfaisant

$$u\,(x, 8x) = 0, \quad u_x\,(x, 8x) = 4e^{-2x}.$$

Problème: (**8pts**) On considère le problème d'évolution de la température $u(x,t)$ dans une tige thermoconductrice unidimensionnelle homogène, d'axe (Ox), de longueur L dont la température initiale (au temps $t = 0$) est connu. Les conditions aux limites sont homogènes, de type Dirichlet sur le bord gauche ($x = 0$) et de type Robin sur le bord droit ($x = L$), le coefficient d'échange est noté h. Toutes les constantes introduites sont bien sûr strictement positives.
Le problème aux frontières $(P\ )$ modélisant la diffusion de la chaleur dans le tige est

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ t \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}\,(L,t) + hu(L,t) = 0,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad .....\,(P)$$

I) **1.** Donner une brève interprétation physique de ce problème. (avec un dessin)

2. Écrire la condition de compatibilité satisfaite par la fonction f.
II) On cherche ici la solution de ce problème par la méthode de séparation des variables, c-à-d

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t).$$

On pose $u(x,t) = X(x)T(t)$, on suppose qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $T(t_0) \neq 0$.
1. Montrer que pour que cette forme satisfasse l'équation dans (P), il doit exister λ telle que

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0,\ 0 < x < L, ...(edo\ 1), \\ T'(t) + \lambda k T(t) = 0.............(edo\ 2). \end{cases}$$

2. En utilisant les conditions aux limites dans (P), trouver les conditions aux limites concernant $(edo\ 1)$.
3. Montrer que les valeurs propres de $(edo\ 1)$ vérifie l'équation

$$\frac{\mu}{h} + \sin(\mu L) = 0 \text{ où } \lambda = \mu^2.$$

4. Prouver que l'équation $\frac{x}{h} + \sin(xL) = 0$ admet une infinité dénombrable de solutions que l'on note (x_n). En déduire l'expression des fonctions propres de $(edo\ 1)$.
III) Dans cette partie, on s'intéresse à conclure la solution $u(x,t)$.
1. Donner la solution T_n de $(edo\ 2)$.
2. En exploitant les conditions initiales, donner l'expression de $u(x,t)$.

Rattrapage 2019

Exercice 01: (6pts) On considère sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ le problème

$$\begin{cases} y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(x,0) = f(x).\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

1. Vérifier que les solutions de cette EDP sont constantes le long des courbes caractéristiques.
2. Répresenter graphiquement les courbes caractéristiques.
3. Quelle condition doit vérifer f pour qu'il y ait existence d'une solution ?
4. Déterminer les solutions de l'EDP dans le cas $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^4}$.

Exercice 02: (6pts) On considère l'équation suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 4e^y = 0..........(E)$$

1. Ecrire (E) sous la forme canonique correspondante.
2. Trouver la solution générale de l'équation (E).
3. Trouver une solution spécifique satisfaisant

$$u(0,y) = f(y),\quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = g(y).$$

Problème: (8pts) On considère le problème d'évolution de la température $u(x,t)$ dans une tige thermoconductrice unidimensionnelle homogène, d'axe (Ox), de longueur L dont la température initiale (au temps $t=0$) est connu. Les conditions aux limites sont homogènes, de type Dirichlet sur le bord gauche $(x=0)$ et de type Neumann sur le bord droit $(x=L)$. Toutes les constantes introduites sont bien sûr strictement positives.
Le problème aux frontières $(P\ )$ modélisant la diffusion de la chaleur dans le tige est

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0<x<L,\ t>0, \\ u(0,t)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0,\ t\geq 0, \qquad .....(P) \\ u(x,0) = f(x), 0\leq x\leq L. \end{cases}$$

I) 1. Donner une brève interprétation physique de ce problème. (avec un dessin)

2. Ecrire la condition de compatibilité satisfaite par la fonction f.
II) On cherche ici la solution de ce problème par la méthode de séparation des variables, c-à-d

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t).$$

On pose $u(x,t) = X(x)T(t)$, on suppose qu'il existe $t_0>0$ tel que $T(t_0)\neq 0$.
1. Montrer que pour que cette forme satisfasse l'équation dans (P), il doit exister λ telle que

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0,\ 0<x<L, ...(edo\ 1) \\ T'(t) + \lambda k T(t) = 0.............(edo\ 2) \end{cases}$$

2. En utilisant les conditions aux limites dans (P), trouver les conditions aux limites concernant $(edo\ 1)$.
3. Trouver l'expression des valeurs propres de $(edo\ 1)$.
III) Dans cette partie, on s'intéresse à conclure la solution $u(x,t)$.
1. Donner la solution T_n de $(edo\ 2)$.
2. En exploitant les conditions initiales, donner l'expression de $u(x,t)$.

Solutions des exercices

Chapitre 1

Exercice 01: Pour chaque équations aux dérivées partielles, on va déterminer son ordre, si elle est linéaire ou non, si elle est homogène ou non
1. Cette EDP est linéaire, non homogène et d'ordre 2. Pour la linéarité, on considère l'opérateur $L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial y}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soient f, g deux fonctions de classe C^2, on a

$$\begin{aligned} L(au+bv) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(au+bv) + x\frac{\partial}{\partial y}(au+bv) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ax\frac{\partial u}{\partial y} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx\frac{\partial u}{\partial y} \\ &= aL(u) + bL(v) \end{aligned}$$

d'où L est linéaire et par conséquent L'EDP est linéaire.
2. Cette EDP est d'ordre 1 non homogène. Elle est de la forme $L(u) = 1$ où $L = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$. Elle n'est pas linéaire. En effet, il suffit de prendre $a = b = 1, u = (2x+y)$ et $v = y^2$ pour vérifier que $L(au+bv) \neq aL(u) + bL(v)$.
3. Cette EDP est linéaire, homogène et d'ordre 4.
4. Cette EDP est linéaire, non homogène et d'ordre 2.
5. Cette EDP n'est pas linéaire. Elle est d'ordre 2.

Exercice 03: Par la règle de la dérivation des fonctions composées, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cf'(x-ct) = -c\frac{\partial u}{\partial x}.$$

2. $u(0,t) = t^2$ donne $f(-ct) = t^2$. Le changement de variable $t' = -ct$ permet d'obtenir $f(t') = \left(\frac{t'}{c}\right)^2$. On déduit dans ce cas que $f(t) = \left(\frac{t'}{c}\right)^2$. Par conséquent

$$u(x,t) = \left(\frac{x-ct}{c}\right)^2.$$

3. Cette question se traite de la même manière que (2). La solution est

$$u(x,t) = g\left(\frac{x-ct}{c}\right).$$

Exercice 04: 1) Cette EDP s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 1.$$

Posons $v(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$, on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

On voit donc que nécessairement
$$v(x,y)=C(x)+y$$
pour une certaine fonction C. On est ramené au problème suivant: trouver u telle que
$$\frac{\partial u}{\partial y}=C(x)+y.$$
Ceci donne
$$u(x,y)=C(x)y+D(y)+\frac{1}{2}y^2.$$
pour certaines fonctions C et D suffisamment régulières.
2. Fixons x et posons $v(y)=u(x,y)$, on trouve
$$v''-v=0$$
dont les solutions sont de la forme
$$v(x,y)=Ae^y+Be^{-y}.$$
Revenant à u, on obtient
$$u(x,y)=A(x)e^y+B\left(x\right)e^{-y}$$
où A et B sont deux fonctions quelconques.
3. Profitons de la linéarité de cette équation, d'après l'exemple 1.12, la solution homogène est donnée par
$$u(x,y)=G(x)+F(y).$$
Il suffit maintenant de chercher une solution particulière, qui est facile à trouver, c'est $u(x,y)=xy$. Alors la solution est donc
$$u(x,y)=G(x)+F(y)+xy.$$
4. Pour cette équation, on considère le changement $\frac{\partial u}{\partial x}=v(x,y)$, qui nous amène à l'équation
$$\frac{\partial v}{\partial y}=v$$
dont la solution est
$$v(x,y)=A(x)e^y$$
où A est une fonction arbitraire. Comme $\frac{\partial u}{\partial x}=v(x,y)$, alors
$$u(x,y)=B(x)e^y+C(y)$$
où B est une primitive de A et C est une fonction arbitraire.
Exercice 06: Soient les nouvelles coordonnées
$$\xi=x \text{ et } \eta=y/(x^2+1)$$
et soit $v(\xi,\eta)=u(x,y)$. L'application $(x,y)\mapsto(\xi,\eta)=(x,y/(x^2+1))$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et en particulier un C^1-difféormorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même. D'abord, écrivons x et y en fonction de ξ et η. Il est facile de voir que
$$x=\xi,\ y=\eta\left(\xi^2+1\right).$$

La règle de chaine permet de calculer

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial \xi}-2\frac{xy}{(x^2+1)^2}\frac{\partial v}{\partial \eta}=\frac{\partial v}{\partial \xi}-2\frac{\xi\eta}{\xi^2+1}\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{\xi^2+1}\frac{\partial v}{\partial \eta}.$$

En remplaçant x, y, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ par leurs expressions correspondantes en fonction de ξ et η dans (E), on obtient

$$\left(\xi^2+1\right)\frac{\partial v}{\partial \xi}=0. \qquad (E')$$

On a $\frac{\partial v}{\partial \xi}=0 \Longrightarrow v(\xi,\eta)=h(\eta)$ où h est de classe $C^1(\mathbb{R})$. Alors

$$u(x,y)=h(y/(x^2+1))$$

est la solution de (E) sur D.

Chapitre 2

Exercice 01: 1) On prend l'équation

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}$$

qui implique que

$$d(\log x)=d\left[\log(1/y)\right].$$

Les fonctions $\log x$ et $\log(1/y)$ ayant la même différentielle. Alors $\Phi_1(x,y,z)=xy$ est une intégrale première du système. Prenons maintenant

$$-\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xy^2}.$$

Cette relation peut s'écrire

$$-xydy=dz.$$

Comme xy est une intégrale première donc elle est constante. On obtient $d(cy+z)=0$ et par conséquent $\Phi_2(x,y,z)=xy^2+z$ est une intégrale première du système. Les fonctions de la forme $(x,y,z)\mapsto\Psi(x,y,z)=F(xy,xy^2+z)$ décrivent l'ensemble des intégrales premières où F est une fonction quelconque.
2. $\Phi_1(x,y,z)=xy$ est une intégrale première du système. Prenons maintenant

$$-\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z^2}$$

qui donne

$$d(\log y)=d(-1/z).$$

Les fonctions $\log y$ et $(-1/z)$ ayant la même différentielle. Alors $\Phi_2(x,y,z)=zy$ est une intégrale première du système. Les fonctions de la forme $(x,y,z)\mapsto\Psi(x,y,z)=F(xy,zy)$ décrivent l'ensemble des intégrales premières où F est une fonction quelconque.
3. Le système conduit à

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y+2z}=\frac{dz}{(3y+4z)}=\frac{d(y+z)}{2(y+z)}.$$

Les fonctions $\log\left(\sqrt{(y+z)}\right)$ et $\log x$ ayant des différentielles proportionnelles, on a donc

$$\Phi_1(t,x,y) = \frac{y+z}{x^2}.$$

est une intégrale première du système. D'autre part

$$\frac{dx}{x} = -\frac{(-3)\,dy}{(-3)(y+2z)} = \frac{(-2)\,dz}{(-2)(3y+4z)} = \frac{d(3y+2z)}{2(3y+2z)}.$$

Il s'est produit que les fonctions $\log(3y+2z)$ et $\log x$ ont des différentielles égales, on a donc

$$\Phi_2(t,x,y) = \frac{3y+2z}{x}.$$

est une intégrale première du système. Les fonctions de la forme $(x,y,z) \mapsto \Psi(x,y,z) = F\left(\frac{y+z}{x^2}, \frac{3y+2z}{x}\right)$ décrivent l'ensemble des intégrales premières où F est une fonction quelconque.

Exercice 02:

1. Le système caractéristique est

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2(y-a)} = \frac{dz}{y}.$$

Pour ce système, on obtient deux intégrales premières

$$\begin{cases} \Phi_1(x,y,z) = z/x, \\ \Phi_2(x,y,z) = x^2/(y-a). \end{cases}$$

La forme implicite est donnée par

$$(x,y) \mapsto F\left(u/x, x^2/(y-a)\right) = \text{Constante}.$$

où F est une fonction quelconque. Par le théorème des fonctions implicites[1], il existe une fonction g de classe C^1 telle que

$$\frac{u}{x} = g\left(x^2/(y-a)\right)$$

or

$$u(x,y) = xg\left(x^2/(y-a)\right)$$

pour une certaine fonction g de classe C^1, voir [2].

2. Le système caractéristique est

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = -\frac{xdz}{z^2}.$$

Pour ce système, on obtient une intégrale première $\Phi_1(x,y,z) = xy$. Prenons

$$\frac{dx}{x} = -\frac{xdz}{z^2},$$

qui donne

$$d(-1/x) = d(1/z).$$

[1] Comme F est quelconque, on la choisit de sorte que les conditions d'applicabilité du théorème des fonctions implicites soient satisfaites.

[2] Pour déterminer la fonction g il faut des conditions initiales ou des conditions aux limites.

Les fonctions $(-1/x)$ et $(1/z)$ ayant la même différentielle. Alors $\Phi_2(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ est une intégrale première du système. La forme implicite est donnée par

$$(x,y) \mapsto F\left(xy, \frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right) = \text{Constante}.$$

Par le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction g de classe C^1 telle que

$$u(x,y) = \frac{x}{xg(xy) - 1}$$

à condition que $g(x) \neq y/x$, $\forall y \in \mathbb{R}$.
3. La recherche de solutions est conditionnée par $1 - u^2 \geq 0$.
a. $1 - u^2 = 0$ définit deux solutions triviales: $u(x,y) = +1$ et $u(x,y) = -1$.
b. Dans le cas où $|u| < 1$: le système caractéristique (S) est donné par :

$$\begin{cases} dy = 0, \\ \frac{dx}{z} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}. \end{cases}$$

L'équation $dy = 0$ donne la première intégrale $\Phi_1(x,y,z) = y$. La deuxième équation implique que les fonctions x et $-\sqrt{1-z^2}$ ayant la même différentielle, alors $\Phi_2(x,y,z) = x + \sqrt{1-z^2}$ est une intégrale première. Les deux fonctions sont indépendantes, alors la forme implicite des solutions est donnée par

$$(x,y) \mapsto F\left(y, x + \sqrt{1-u^2}\right) = \text{Constante}$$

ce qui implique par le théorème des fonctions implicites que

$$\sqrt{1-u^2} = g(y) - x$$

où g est une fonction de classe C^1. On obtient

$$u^2(x,y) = 1 - (g(y) - x)^2.$$

La condition $|u| < 1$ implique que $|g(y) - x| < 1$. Sous cette condition, on a

$$u(x,y) = \sqrt{1 - (g(y) - x)^2}.$$

Exercice 03: Posons $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial u}{\partial y}$. On doit résoudre $pq = 1$. On pose $F(x,y,u,p,q,) = pq - 1$, on a

$$F_x = F_y = F_u = 0, F_p = q, F_q = p.$$

Le système caractéristique associé est

$$\begin{cases} \frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{du}{2pq}, \\ dp = dq = 0 \end{cases}.$$

d'où

$$p = C_1,\ q = C_2.$$

D'autre part

$$\frac{dx}{C_2} = \frac{dy}{C_1} \Rightarrow \frac{x}{C_2} - \frac{y}{C_1} = C_3$$

et

$$\frac{dx}{C_2} = \frac{du}{2} \Rightarrow \frac{x}{C_1} - \frac{u}{2} = C_4.$$

Prenons par exemple $p = C_1$, on doit intégrer le système

$$\begin{cases} pq = 1, \\ p = C_1. \end{cases}$$

Alors $q = 1/C_1$, d'où

$$du = C_1 dx + \frac{1}{C_1} dy.$$

Par intégration, on obtient

$$u(x, y) = C_1 x + \frac{1}{C_1} y + \mu,$$

où μ une constante arbitraire. La condition $u(x, 0) = x$ donne $C_1 = 1$ et $\mu = 0$. La solution du problème est

$$u(x, y) = x + y.$$

Exercice 06:

1. Le système caractéristique de l'équation principale est

$$\begin{cases} \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}, \\ dz = 0. \end{cases}$$

La première équation implique que

$$\varphi(x, y) = x^2 - y^2$$

est une intégrale première. Comme l'équation est linéaire homogène, l'équation cartésienne des courbes caractéristiques est

$$x^2 - y^2 = k, k \in \mathbb{R}.$$

2. On définit les caractéristiques comme des courbes de $\mathbb{R}^3$ données par $(x_c(s), y_c(s), z_c(s))$. Les équations satisfaisant $(x_c(s), y_c(s), z_c(s))$ sont

$$\begin{cases} x_c'(s) = y(s), \\ y_c'(s) = x(s), \\ z_c'(s) = 0. \end{cases}$$

La solution de l'équation est constante le long $(x_c(s), y_c(s))$. Le long des caractéristiques, la solution vérifie

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} u(x_c(s), y_c(s)) &= x_c'(s) \frac{\partial u}{\partial x}(x_c(s), y_c(s)) + y_c'(s) \frac{\partial u}{\partial x}(x_c(s), y_c(s)) \\ &= y(s) \frac{\partial u}{\partial x}(x_c(s), y_c(s)) + x(s) \frac{\partial u}{\partial x}(x_c(s), y_c(s)) = 0. \end{aligned}$$

3. Ce problème est posé sur la courbe $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, qui n'est pas caractéristique. Comme toutes les caractéristiques coupent la courbe de $(\mathcal{C})$, le problème de Cauchy admet une solution unique.

Soit (x_0, y_0) un point du plan correspondant à $s = s_0$. Soit $(x_*(s), y_*(s))$ la caractéristique passant par ce point et coupe la courbe $(\mathcal{C})$ au (x_1, y_1) avec $x_1 = 0$, on obtient

$$\begin{cases} x_0^2 - y_0^2 = k_*, \\ -y_1^2 = k_*. \end{cases}$$

Ce système implique que $y_1^2 = y_0^2 - x_0^2$. Remarquons que cette égalité est valable uniquement lorsque $x_0^2 \leq y_0^2$. autrement, lorsque $|x_0| \leq |y_0|$. Comme la solution est constante le long de $(x_*(s), y_*(s))$, il en résulte que

$$u(x_0, y_0) = u(0, y_1) = f\left(\sqrt{y_0^2 - x_0^2}\right) = e^{x_0^2 - y_0^2}.$$

Alors le domaine d'existence de la solution est

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq |y|\right\}$$

tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$u(x, y) = e^{x^2 - y^2}.$$

3. Le problème donc est mal posé, la solution ne peut pas exister sur tout le domaine $\mathbb{R}^2$. Il faudrait ici une condition du type $u(x, 0) = ...$ pour avoir des solutions sur tout $\mathbb{R}^2$. Dans la situation proposée, il y a des points non atteints par les courbes caractéristiques partant des points du type $(0, y)$. (Voir la figure ci-dessous).

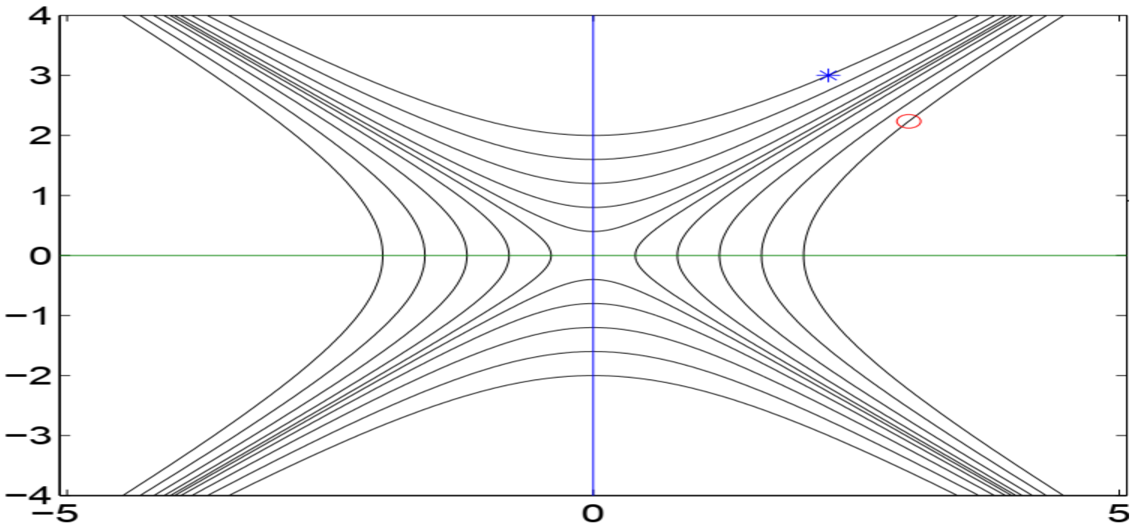

Figure 7.1: Caractéristiques du problème.

On voit qu'il existe une caractéristique croisant le support des données passant par le point *, mais que ce n'est pas le cas pour le point o.

Chapitre 3

Exercice 01:

1. $b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y) = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0$. L'équation est parabolique sur tout $\mathbb{R}^2$. L'équations caractéristique est

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{2x^2} = -\frac{y}{x}.$$

La courbe caractéristique associée est donc $\varphi(x, y) = xy$. On pose

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = xy \end{cases}$$

et $u(x, y) = v(\xi, \eta)$. En utilisant ce changement de coordonnées. Par la règle de chaînes, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + y\frac{\partial v}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x\frac{\partial v}{\partial \eta}, \end{cases}$$

et
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + y\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2y\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + y^2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = x^2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial v}{\partial \eta} + x\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + xy\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}. \end{cases}$$
Finalement
$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \xi^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \xi\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0.$$
Aprés simplification, on obtient la forme canonique associée
$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}.$$
où $\xi \neq 0$, ce qui est équivalent à $x \neq 0$. Maintenant si $x = 0$, cette EDP prend la forme simplifiée $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}$. Il s'agit de la forme canonique d'une EDP parabolique pour $y \neq 0$. Si $x = y = 0$, l'équation est vérifiée en tout les points sauf l'origine. On peut considérer comme forme canonique que la forme l'équation
$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}.$$
En posant $w = \frac{\partial v}{\partial \xi}$, on arrive à l'ODE du premier ordre $w' + (1/\xi)w = 0$ dont la solution est $\ln w = -ln\xi + \hat{f}(\eta)$, ou $w = f(\eta)/\xi$, où f et $hatf$ sont deux fonctions quelconques. Par intégration
$$v = \int v d\xi = \int w d\xi = \int \frac{f(\eta)}{\xi} d\xi = f(\eta)\ln\xi + g(\eta).$$
Par conséquent, la solution générale est $u(x, y) = f(xy)\ln x + g(xy)$, où $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ sont des fonctions réelles arbitraires.

Exercice 02:

1. $b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y) = 4\sin^2 x + 4\cos^2 x = 4$. L'équation est hyperbolique sur tout $\mathbb{R}^2$. L'équation caractéristique est
$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \pm 1.$$
La courbe caractéristique associée est donc
$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = \cos x + x - y, \\ \varphi_1(x, y) = \cos x - x - y. \end{cases}$$
On pose
$$\begin{cases} \xi = \cos x + x - y, \\ \eta = \cos x - x - y. \end{cases}$$
et $u(x, y) = v(\xi, \eta)$. Par la règle de chaînes, on arrive à
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$
Alors
$$v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta).$$
et par conséquent
$$u(x, y) = F(\cos x + x - y) + G(\cos x - x - y)$$

où $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ sont des fonctions réelles arbitraires.
3. La condition $u(0,y) = f(y)$ implique

$$F(1-y) + G(1-y) = f(y).$$

D'autre part

$$u_x(x,y) = (-\sin x + 1)\, F'(\cos x + x - y) + (-\sin x - 1)\, G'(\cos x - x - y).$$

La seconde condition donne

$$u_x(0,y) = F'(1-y) - G'(1-y) = g(y).$$

On a alors

$$\begin{cases} F(1-y) + G(1-y) = f(y), \\ F'(1-y) - G'(1-y) = g(y). \end{cases}$$

De ce système, on trouve

$$F'(1-y) = \frac{1}{2}\left(-f'(y) + g(y)\right)$$

qui implique par intégration

$$-F(1-y) = -\frac{1}{2} f(y) + \frac{1}{2}\int_0^y g(s)ds + k_1.$$

Par un changement de variable, on obtient

$$F(s) = \frac{1}{2} f(1-s) - \frac{1}{2}\int_0^{1-s} g(s)ds - k_1$$

De même manière, on obtient

$$G(s) = \frac{1}{2} f(1-s) + \frac{1}{2}\int_0^{1-s} g(s)ds + k_2.$$

En substituant F et G par ses expressions dans la formule de la question précedente, on trouve

$$\begin{aligned} u(x,y) &= F(\cos x + x - y) + G(\cos x - x - y) \\ &= \frac{1}{2} f(1 - (\cos x + x - y)) - \frac{1}{2}\int_0^{1-(\cos x + x - y)} g(s)ds \\ &\quad + \frac{1}{2} f(1 - (\cos x - x - y)) + \frac{1}{2}\int_0^{1-(\cos x - x - y)} g(s)ds - k_1 + k_2. \end{aligned}$$

Eu utilisant encore une fois la condition $u(0,y) = f(y)$, on trouve que $-k_1 + k_2 = 0$. La solution générale est donnée donc par

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left[f(1 - \cos x - x + y) + f(1 - \cos x + x + y)\right] + \frac{1}{2}\int_{1-\cos x - x + y}^{1-\cos x + x + y} g(s)ds.$$

Chapitre 4

Exercice 01: D'après le résultat du cours dans le cas des conditions aux limites du type Dérichlet avec $k = 17$ et $L = \pi$, la solution est donnée par la formule suivante

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x/L)\, e^{-17n^2 t}$$

où

$$\begin{aligned}\delta_n &= \frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{4}{\pi n}\left[-\cos nx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{\pi n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right)\\ &= \frac{4}{\pi n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right).\end{aligned}$$

d'où

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right)\sin(nx)\, e^{-17n^2 t}$$

Exercice 02:
a. D'après le résultat du cours dans le cas des conditions aux limites du type Neumann avec $k = 17$ et $L = \pi$, la solution est donnée par la formule suivante

$$u(x,t) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\delta_n \cos(n\pi x/L)\, e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

où

$$\delta_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\pi x/L)\,dx, n \geq 1$$

et

$$\frac{\delta_0}{2} = \frac{\int_0^L f(x)dx}{L}.$$

b.

$$\delta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1+\sin^3 x\right)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1 - \sin 3x + 3\sin x)\cos(nx)\,dx.$$

Pour calculer cette intégrale, voir la section (Rappel sur les séries de Fourier).
c. Si f est continue, la fonction u est une solution classique de l'équation pour tout $t > 0$. La décroissance exponentielle implique que pour chaque $\varepsilon > 0$ la série et toutes ses dérivées convergent uniformément pour tout $t > \varepsilon > 0$. Pour la même raison, la série (sans $\frac{\delta_0}{2}$) converge uniformément vers zéro (en fonction de x). Donc

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{\delta_0}{2}.$$

Exercice 03: On pose

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

où X et T sont des fonctions des variables x et t, respectivement. Par Différenciations, on obtient

$$XT_t = kX_{xx}T + hX(x)\,T(t).$$

On peut la réécrire sous la forme

$$\frac{T_t}{T} - h = k\frac{X_{xx}}{X}.$$

Ceci implique que

$$\frac{1}{k}\left(\frac{T_t}{T} - h\right) = k\frac{X_{xx}}{X} = -\lambda.$$

Cette dernière équation conduit au système d'EDOs suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dx} + \lambda X = 0, \ 0 < x < L, \ X(0) = X(L) = 0, \\ \frac{T_t}{T} = -k\lambda + h. \end{cases}$$

D'après les résultats du cours, on obtient

$$X_n(x) = \beta_n \sin(n\pi x/L), \lambda_n = (n\pi/L)^2.$$

La solution générale du seconde équation est donnée par

$$T(t) = \gamma_n e^{\left[-k(n\pi/L)^2+h\right]t}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

On a ainsi obtenu la suite suivante des solutions séparées

$$u_n(x,t) = \delta_n \sin(n\pi x/L)\, e^{\left[-k(n\pi/L)^2+h\right]t}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Le principe de superposition généralisée dans le cas $k = 1$ et $L = \pi$ implique que la solution est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(nx)\, e^{\left[-n^2+h\right]t}$$

où

$$\delta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \frac{4\left[(-1)^n - 1\right]}{\pi n^3}, n \geq 1.$$

b. La limite $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ existe si et seulement si $h \leq 1$. Lorsque $h < 1$ la série converge uniformément vers 0. Si $h = 1$, la série converge vers $\delta_1 \sin x$.

Exercice 05: On raisonne comme dans l'exercice précedent, mais cette fois-ci avec des conditions aux limites mixtes. La solution s'écrit

$$u(x,t) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos(n\pi x/L)\, e^{\left[-(n\pi)^2+1\right]t}$$

où pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \delta_n &= 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x(2-x)\cos(n\pi x)\,dx \\ &= 2\left[\frac{x(2-x)}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_0^1 - \frac{4}{n\pi}\int_0^1 (1-x)\sin(n\pi x)\,dx \\ &= -\frac{4}{n\pi}\left[-\frac{(1-x)}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^1 + \frac{4}{(n\pi)^2}\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx \\ &= -\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2} + \frac{4}{(n\pi)^3}\left[\sin(n\pi x)\right]_0^1 = -\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2}. \end{aligned}$$

et

$$\delta_0 = 2\int_0^1 f(x)dx = 2\left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Alors

$$u(x,t) = \frac{2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}\cos(n\pi x/L)\, e^{\left[-(n\pi)^2+1\right]t}.$$

Chapitre 5

Exercice 1: On écrit $z = x + iy$ et

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

où u et v sont deux fonctions réelles de deux variables réelles. Une fonction analytique est une fonction qui peut être exprimée comme une série de puissances en z. Cela signifie que les puissances sont $z^n = (x + iy)^n$. Donc

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

(a_n des constantes complexe). C'est

$$u(x, y) + iv(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x + iy)^n.$$

La différenciation formelle[1] de cette série montre que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x + iy)^{n-1}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = i\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x + iy)^{n-1}. \end{cases}$$

Par identification de deux équations, on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Il s'agit des équations de Cauchy-Riemann. Si on les différencie, on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

de sorte que $\Delta u = 0$. De même $\Delta v = 0$, où Δ est le laplacien bidimensionnel. Ainsi, les parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique sont harmoniques.

Exercice 2: Examinons les fonctions harmoniques spéciales qui ne sont pas liées aux rotations, c'est-à-dire qui ne dépendent que de r. Ils satisfont l'EDO

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = u.$$

Pour cela, on pose $u = v/r$, les dérivées partielles s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2}v \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= -\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2}{r^3}v \end{aligned}$$

On remplace dans l'équation principale, on obteint

$$r^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - k^2 v = 0$$

dont la solution est

$$v(r) = Ae^{kr} + Be^{-kr}.$$

[1] On dérive la série des sommes partièlles en ignorant les conditions de convergence et de dérivabilité.

Par conséquent
$$u(r,\theta,\phi)=\frac{1}{r}\left(Ae^{kr}+Be^{-kr}\right)$$
où A et B sont des constantes.
Exercice 3: On a
$$u=-c_1r^{-1}+c_2.$$
(Voir la section 5.4) Les conditions aux limites impliquent
$$\begin{cases} u(a)=-c_1a^{-1}+c_2=A,\\ u(b)=-c_1b^{-1}+c_2=B.\end{cases}$$
Alors $c_2=\frac{1}{b^{-1}-a^{-1}}\left(b^{-1}A-a^{-1}B\right)$ et $c_1=\frac{1}{b^{-1}-a^{-1}}\left(A-B\right)$. Donc
$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{b^{-1}-a^{-1}}\left(A-B\right)r^{-1}+\frac{1}{b^{-1}-a^{-1}}\left(b^{-1}A-a^{-1}B\right)\\ &= \frac{1}{b^{-1}-a^{-1}}\left[\left(b^{-1}A-a^{-1}B\right)-\left(A-B\right)r^{-1}\right].\end{aligned}$$

Exercice 6: Cherchons les fonctions harmoniques qui ne sont pas liées aux rotations,autrement, on cherche des solutions de l'EDO
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=1.$$
Pour ce faire, on pose le changement d'inconnue $u=v/r$. On arrive à
$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=\frac{1}{r^2}$$
dont la solution est
$$v(r)=\ln\frac{1}{r}+Ar+B.$$
où A et B sont des constantes réelles. Par conséquent
$$u(r,\theta,\phi)=\frac{1}{r}\left(\ln\frac{1}{r}+Ar+B\right)$$
où A et B sont des constantes. La condition $u(x,y,z)=0$ sur $r=a$ implique
$$\ln\frac{1}{a}+Aa+B=0$$
et la condition $\partial u/\partial r=0$ sur $r=b$ implique
$$\frac{\ln b}{b}+\frac{B}{b}-\frac{1}{b^2} = 0.$$
Ceci entraine que $B=-\ln b+\frac{1}{b}$ et $A=-\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}+\frac{\ln b}{a}-\frac{1}{ab}$. Alors
$$u(r,\theta,\phi)=\frac{1}{r}\left[\ln\frac{1}{r}+\left(-\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}+\frac{\ln b}{a}-\frac{1}{ab}\right)r-\ln b+\frac{1}{b}\right]$$

Chapitre 6

Exercice 01: D'après la formule de d'Alembert

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[(x+t)^2+(x-t)^2\right]+3\int_{x-t}^{x+t} sds \\ &= \left(x^2+t^2\right)+\frac{3}{2}\left[(x+t)^2-(x-t)^2\right] \\ &= \left(x^2+t^2\right)+6xt. \end{aligned}$$

On trouve que

$$u(4,1)=4^2+1^2+(6\times 4\times 1)=29.$$

Exercice 4: Résoudre le problème

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=1,\quad -\infty<x<\infty,\ t>0,$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x^2,\quad -\infty<x<\infty, \\ u_t(x,0) &= 1,\quad -\infty<x<\infty. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de d'Alembert, on a

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[(x+t)^2+(x-t)^2\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 1ds+\frac{1}{2c}\int_{\tau=0}^{\tau=t}\int_{\xi=x-(t-\tau)}^{\xi=x+(t-\tau)} 1d\xi d\tau.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[(x+t)^2+(x-t)^2\right]+t+\int_{\tau=0}^{\tau=t}(t-\tau)\,d\tau \\ &= x^2+t^2+t+\left[t\tau-\frac{1}{2}\tau^2\right]_0^t=x^2+\frac{3}{2}t^2+t. \end{aligned}$$

Exercice 06: Comme $f\equiv 0$, la formule de Kirchhoff se réduit à (Voir Théorème 6.3)

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)} g(y)\,dS(y).$$

Cas1: Si La sphère se trouve complètement à l'extérieur de la sphère unitaire: $t>\|x\|+1$ ou $t<\|x\|-1$, on a $u(x,t)=0$.
Cas2: La sphère se trouve complètement à l'intérieur de la sphère unitaire: $t<1-\|x\|$, on a

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)} g(y)\,dS(y)=\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)} 1dS(y)=\frac{4\pi t^2}{4\pi t}=t.$$

Cas3: Pour t tel que $\|x\|-1<t<\|x\|+1$ ou $t>1-\|x\|$, on obtient

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)} g(y)\,dS(y)=\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)\cap B(0,1)} 1dS(y)=\frac{4\pi t^2}{4\pi t}=t.$$

La surface de la partie de la sphère $\partial B(x,t)\cap B(0,1)$ (appelée calotte sphérique) est égale

$$\frac{\pi t}{\|x\|}\left(1-(t-\|x\|)^2\right).$$

Ainsi, la solution est donnée par

$$u(x,t)=\begin{cases} t, \text{ si } t<1-\|x\|, \\ \frac{1}{4\|x\|}\left(1-(t-\|x\|)^2\right), \text{ si } \|x\|-1<t<\|x\|+1, \\ 0, \text{ si } t>\|x\|+1 \text{ou } t<\|x\|-1. \end{cases}$$

Considérons un x avec $\|x\|=2$. D'après l'expression de $u(x,t)$, on obtient $u(x,t)=0$ pour $t<1$ et aussi pour $t>3$. La fonction $u(x,t)$ est croissante dans l'intervalle $[1,2]$ et décroissante dans l'intervalle $[2,3]$.

Exercice 07: On sait que la formule de Kirchhoff peut s'ècrire (avant la simplification)

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[t\int_{\partial B(x,t)} f(y)dS(y)\right]+t\int_{\partial B(x,t)} g(y)dS(y).$$

Si $g\equiv 0$, on obtient

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[t\int_{\partial B(x,t)} f(y)dS(y).\right]$$

On raisonne comme dans l'exercice précedent, la solution est obtenue facilement

$$u(x,t)=\begin{cases} 1, \text{ si } t<1-\|x\|, \\ \frac{t-\|x\|}{2\|x\|}, \text{ si } \|x\|-1<t<\|x\|+1, \\ 0, \text{ si } t>\|x\|+1 \text{ou } t<\|x\|-1. \end{cases}$$

Considérons un x avec $\|x\|=2$. D'après l'expression de $u(x,t)$, on obtient $u(x,t)=0$ pour $t<1$. La fonction $u(x,t)$ décroît dans l'intervalle $[1,3]$ (de $1/4$ à $t=1$ à $-1/4$ à $t=3$), puis devient nul pour $t>3$.

Exercice 08: La formule de D'Alembert implique

$$P(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+4t)+f(x-4t)]+\frac{1}{8}[H(x+4t)-H(x-4t)],$$

où $H(x)=\int_0^x g(s)ds$. Par conséquent,

$$H(x)=\begin{cases} x, & |x|\le 1 \\ 1, & x>1, \\ -1, & x<-1. \end{cases}$$

Notons qu'à $x_0=10$: $f(10+4t)=0$, $f(10-4t)\le 10$, $|H(t)|\le 1, t>0$. Par conséquent, $P(10,t)\le 5+1/4=21/4<6$, et la structure ne s'effondrera pas.

Chapitre 7

Exercice 01: On a

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/4kt}e^{y}dy=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}} e^{\left(-x^2-y^2+2xy+4kty\right)/4kt}dy.$$

On ecrit

$$\begin{aligned}\frac{-x^2-y^2+2xy+4kty}{4kt} &= \frac{-x^2-y^2+(2x+4kt)y}{4kt}=\frac{-(-x+y-2kt)^2+4ktx+4k^2t^2}{4kt} \\ &= -\frac{(-x+y-2kt)^2}{\sqrt{4kt}}+x+kt.\end{aligned}$$

On a alors

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\mathbb{R}} e^{\left[(-x+y-2kt)/\sqrt{4kt}\right]^2} e^{x+kt} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{x+kt} \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} ds = e^{x+kt}.$$

Exercice 04: On pose $G(x,t,y) = e^{-\frac{|x-t-y|^2}{4t}}$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x} &= -\frac{(x-t-y)}{2t} G(x,t,y), \\
\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= \left[-\frac{1}{2t} + \frac{(x-t-y)^2}{4t^2}\right] G(x,t,y), \\
\frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{(x-t-y)(x+t-y)}{4t^2} G(x,t,y).
\end{aligned}$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on en déduit que

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-t-y|^2}{4t}} g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{|x-t-y|^2}{4t}} g(y)dy = -\int_{\mathbb{R}} \frac{(x-t-y)}{2t} G(x,t,y) g(y)dy.$$

Pour les conditions d'applicabilité de ce théorème: on a $y \to e^{-\frac{|x-t-y|^2}{4t}} g(y)$ est intégrable puisque la fonction g est uniformément bornée. $x \to e^{-\frac{|x-t-y|^2}{4t}} g(y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En plus $\left|\frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{|x-t-y|^2}{4t}} g(y)\right| = \left|\frac{(x-t-y)}{2t} G(x,t,y) g(y)\right| \leq \varphi(y)$ puisque g est uniformément bornée. De même, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-t-y|^2}{4t}} g(y)dy &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-\frac{|x-t-y|^2}{4t}} g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \left[-\frac{1}{2t} + \frac{(x-t-y)^2}{4t^2}\right] G(x,t,y) g(y)dy, \\
\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-t-y|^2}{4t}} g(y)dy &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} e^{-\frac{|x-t-y|^2}{4t}} g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{(x-t-y)(x+t-y)}{4t^2} G(x,t,y) g(y)dy.
\end{aligned}$$

Ainsi, $u(t,x)$ est dérivable pour tout $t > 0$ et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(x-t-y)}{2t} G(x,t,y) g(y)dy,, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \left[-\frac{1}{2t} + \frac{(x-t-y)^2}{4t^2}\right] G(x,t,y) g(y)dy, \\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{(x-t-y)(x+t-y)}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right] G(x,t,y) g(y)dy.
\end{aligned}$$

On vérifie alors aisément que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0.$$

On prouve que $u(x,t)$ est prolongeable en $t = 0$ et vérifie bien la condition initiale, c'est à dire que

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-t-y|^2}{4t}} g(y)dy = g(y).$$

Corrigés des examens

Test 2018

<u>Exercice 01:</u> (6.5 pts)

1) a) Système caractéristique

$$\begin{cases} dx = -\frac{dy}{xy}, \\ dz = 0. \end{cases} \quad \text{....}\textbf{(0.5pts)}$$

b) Les intégrales premières sont données par

$$\begin{aligned} \Phi_1(x,y,z) &= z, \text{....}(\textbf{0.5pts}) \\ \Phi_2(x,y,z) &= y^2 e^{x^2} \text{....}(\textbf{1pts}) \end{aligned}$$

Les fonctions de la forme

$$(x,y,z) \mapsto \Phi(x,y,z) = F(\Phi_1(x,u,z), \Phi_2(x,y,z))\textbf{....(0.5pts)}$$

(où F est une fonction quelconque) décrivent l'ensemble des intégrales premières.
On peut donc donner les solutions sous forme implicite

$$(x,y,z) \mapsto F\left(z, y^2 e^{x^2}\right) = \text{Constante}\textbf{....(0.5pts)}$$

ce qui conduit à la forme explicite des solutions

$$u(x,y) = f\left(y^2 e^{x^2}\right)\textbf{....(0.5pts)}$$

où f est une fonction quelconque de classe C^1.
2) Déterminons la solution vérifiant $u(0,y) = y^2$, on a

$$u(0,y) = f\left(y^2\right) = y^2.$$

Remarquons que f est définie seulement sur $\mathbb{R}_+$, on peut alors déterminer f, c'est $f(x) = x$. Donc le problème de Cauchy admet une solution unqiue donnée par

$$u(x,y) = y^2 e^{x^2}\textbf{....(1pts)}$$

3) Déterminons la solution vérifiant $u(x,0) = x^2$, on a

$$u(x,0) = f(0) = x^2.$$

Impossible de déterminer la fonction f dans ce cas, il n'existe aucune fonction f qui satisfait cette condition. Donc le problème de Cauchy n'admet pas des solutions**................................(1pts)**
<u>Exercice 02:</u> (6.5 pts)

1) Les fonctions données par $u(x,y) = ax + by$ sont solutions**....(0.5pts)**

2.a) Par composition, la fonction g est de classe C^1 et

$$g'(t) = x\frac{\partial u}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial u}{\partial y}(tx,ty).....(\mathbf{1pts})$$

2.b) De sorte que

$$tg'(t) = u(tx,ty) = g(t).....(\mathbf{1pts})$$

La résolution de l'équation différentielle $ty = y$ après raccord donne

$$g(t) = \lambda t,\ \ \lambda \in \mathbb{R}.....(\mathbf{1pts})$$

2.c) On en déduit

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, u(tx,ty) = tu(x,y).....(\mathbf{0.5pts})$$

En dérivant cette relation par rapport à x, on obtient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, t\frac{\partial u}{\partial x}(tx,ty) = t\frac{\partial u}{\partial x}(x,y).....(\mathbf{0.5pts})$$

En simplifiant par t

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{\partial u}{\partial x}(tx,ty) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y).....(\mathbf{0.5pts})$$

Or la relation implique des fonctions continues, elle donc encore valable en $t = 0$, ce qui donne

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y).....(\mathbf{0.5pts})$$

De même, on obtient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y).....(\mathbf{0.5pts})$$

Enfin, en posant

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) \text{ et } b = \frac{\partial u}{\partial y}(0,0),$$

l'équation initiale donne

$$u(x,y) = ax + by.....(\mathbf{0.5pts})$$

Examen 2018

<u>Exercice 01:</u> (6.5 pts)

1) a) Système caractéristique

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = -\frac{xdz}{z^2}....\mathbf{(0.5pts)}$$

b) Les intégrales premières sont données par :

$$\begin{aligned} \Phi_1(x,y,z) &= xy, ...(\mathbf{1pts}) \\ \Phi_2(x,y,z) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{z}....(\mathbf{1pts}) \end{aligned}$$

Les fonctions de la forme

$$(x,y,z) \mapsto \Phi(x,y,z) = F(\Phi_1(x,u,z), \Phi_2(x,y,z))\textbf{....(0.5pts)}$$

(où F est une fonction quelconque) décrivent l'ensemble des intégrales premières.
2) On peut donc donner les solutions sous forme implicite

$$(x,y,z) \mapsto F\left(xy, \frac{1}{x} + \frac{1}{u(x,y)}\right) = \text{Constante}\textbf{....(1pts)}$$

ce qui conduit à :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{u(x,y)} = f(xy)$$

où f est une fonction quelconque de classe C^1, et alors la forme explicite des solutions est donnée par

$$u(x,y) = \frac{x}{xf(xy) - 1}\textbf{....(1pts)}$$

3) Déterminons la solution passant par la courbe définie par

$$y = 1 \text{ et } u = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

On a

$$u(x,1) = \frac{x}{xf(x) - 1} = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Par identification

$$f(x) = x\textbf{.....(0.5pts)}$$

La solution souhaitée est

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2 y - 1}\textbf{....(1pts)}$$

<u>**Exercice 02:**</u> **(7pts)** On considère l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + u = 0..........(E_2)$$

1) On pose $\xi = x - y$ et $\eta = x + y$ et l'on note $v(\xi,\eta) = u(x,y)$ Par la règle de chaine, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}, \end{cases} \textbf{(0.5pts} \times \textbf{2)}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}. \end{cases} \textbf{(0.5pts} \times \textbf{2)}$$

En remplaçant dans (E_2), on obtient

$$2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{2} = 0..........(E_3).....\textbf{(0.5pts)}$$

2) Afin de résoudre (E_3), on pose le changement de fonction

$$v(\xi,\eta) = \varphi(\xi,\eta)e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)}, ...\textbf{(0.5pts)}$$

D 'où
$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\varphi\right) e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)}, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{1}{2}\varphi\right) e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{1}{4}\varphi\right) e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)}. \end{cases} \qquad \textbf{(0.5pts} \times \textbf{3)}$$

En remplaçant dans (E_3), on arrive à

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)} = 0......\textbf{(0.5pts)}$$

Ceci conduit à

$$\varphi(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)\textbf{.....(0.75pts)}$$

où f, g sont deux fonctions arbitraires de classe C^2. On obtient finalement

$$v(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)} = (f(\xi) + g(\eta))\, e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)}\textbf{.....(0.5pts)}$$

Par conséquent

$$u(x, y) = v(\xi, \eta) = (f(x-y) + g(x+y))\, e^{-x}....\textbf{(0.75pts)}$$

Exercice 03: **(6.5 pts)** On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ le problème

$$\begin{cases} y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1) De manière générale, une EDP d'ordre 1 vérifie une équation différentielle ordinaire le long des courbes caractéristiques. Comme ici, il s'agit d'une EDP homogène, toute solution de l'EDP sera constante le long des courbes caractéristiques**........(1pts)**
2) Le système caractéristique associé à ce problème est

$$\begin{cases} dz = 0; \\ \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}. \end{cases} \quad \textbf{.....(0.5pts)}$$

Par intégration de ce système, les courbes caractéristiques sont des demi-cercles puisque $y \geq 0$**........(1pts avec dessin**)
3) On parvient alors à décrire explicitement la solution de l'EDP, il s'agit

$$u(x, y) = g(x^2 + y^2), \; y \geq 0\textbf{. ......(0.5pts)}$$

où g est une fonction quelconque de classe C^1. Remarquons que la fonction g est définie seulement sur $\mathbb{R}_+$, . On a alors

$$u(x, 0) = g(x^2) = f(x)\textbf{......(0.5pts)}$$

Si l'on pose $x^2 = t$, on aboutit à $g(t) = f(\pm\sqrt{t})$ et comme u est constante le long des courbes caractéristiques, on arrive à

$$u(x, 0) = u(-x, 0) = f(-x)\textbf{......(0.5pts)}$$

Donc f doit etre paire**...........(0.5pts)**
Finalement,

$$g(t) = f(\sqrt{t}).......\textbf{(0.5pts)}$$

et la solution du problème est donnée par

$$u(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\text{.......}\mathbf{(0.5pts)}$$

4) La fonction $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^4}$ est paire, la solution dans ce cas est donnée par

$$u(x,y) = \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)^2}\text{.......}\mathbf{(1pts)}$$

Rattrapage 2018

<u>Exercice 01:</u> (05 pts)
1) a) Système caractéristique

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z^2+1}\text{....}\mathbf{(0.5pts)}$$

b) Les intégrales premières sont données par

$$\begin{aligned}\Phi_1(x,y,z) &= \frac{x}{y},\text{....}\mathbf{(1pts)}\\ \Phi_2(x,y,z) &= \ln x - \arctan z\text{....}\mathbf{(1pts)}\end{aligned}$$

Les fonctions de la forme

$$(x,y,z) \mapsto \Phi(x,y,z) = F(\Phi_1(x,u,z), \Phi_2(x,y,z))\mathbf{....(0.5pts)}$$

(où F est une fonction quelconque) décrivent l'ensemble des intégrales premières.
2) On peut donc donner les solutions sous forme implicite

$$(x,y,z) \mapsto F\left(\frac{x}{y}, \ln x - \arctan z\right) = \text{Constante}\mathbf{....(1pts)}$$

Ceci conduit à

$$\ln x - \arctan z = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

où f est une fonction quelconque de classe C^1. Alors la forme explicite des solutions est donnée par

$$u(x,y) = \tan\left(\ln x - f\left(\frac{x}{y}\right)\right)\ \mathbf{....(1pts)}$$

<u>Exercice 02:</u> (8pts) On considère l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta u = 0\text{..........}(E_3)$$

où c, α et β sont des constantes.
1) 1. On pose $\xi = cx - y$ et $\eta = cx + y$ et l'on note $v(\xi,\eta) = u(x,y)$. Par la règle de chaine, on a

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial \eta} = c\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right),\\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta},\end{array}\right. \quad \mathbf{(0.5pts \times 2)}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}. \end{cases} \quad \textbf{(0.75pts} \times \textbf{2)}$$

En remplaçant dans (E_2), on en déduit que

$$4c^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + 2\alpha c\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) + \beta v = 0..........(E_4), ...\textbf{(1pts)}$$

2) Afin de résoudre (E_3), on pose le changement de fonction

$$v(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta)e^{\lambda\xi + \mu\eta}.$$

D 'où

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \lambda\varphi\right)e^{\lambda\xi+\mu\eta}, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \mu\varphi\right)e^{\lambda\xi+\mu\eta}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \lambda\mu\varphi\right)e^{\lambda\xi+\mu\eta}. \end{cases} \quad \textbf{(0.5pts} \times \textbf{3)}$$

Par suite

$$\begin{aligned} &4c^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + 2\alpha c\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) + \beta v \\ = \; &\left\{2c\left((\alpha + 2\mu c)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + (\alpha + 2\mu c)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)\right\}e^{\lambda\xi+\mu\eta} \\ &+\left\{4c^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \left(2\alpha(\lambda+\mu)c + 4\lambda\mu c^2 + \beta\right)\varphi\right\}e^{\lambda\xi+\mu\eta}, ...\textbf{(1pts)} \end{aligned}$$

En choisissant

$$\lambda = \mu = -\frac{\alpha}{2c}, ...\textbf{(1pts)}$$

on obtient

$$\begin{aligned} &4c^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + 2\alpha c\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) + \beta v \\ &+\left\{2c^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\beta - \alpha^2\right)\varphi\right\}e^{\lambda\xi+\mu\eta} \end{aligned}$$

Ceci conduit à

$$2c^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\beta - \alpha^2\right)\varphi = 0, , ...\textbf{(1pts)}$$

Pour finir, on prend

$$k_1 = 2c^2 \text{ et } k_2 = \beta - \alpha^2.$$

<u>**Exercice 03:**</u> **(7pts)** Soit

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x > 0; y > 0; x > y\}.$$

On considère sur Ω le problème

$$\begin{cases} y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = u, \\ u(x, 0) = f(x), \; x > 0. \end{cases}$$

1. Ω est le domaine triangulaire entre l'axe des x et la première bissectrice. Au passage, il a été choisi pour éviter de s'embeter avec le signe de $x^2 - y^2$ dans les calculs subséquents.,.....**(1pts)**

2. C'est une EDP du premier ordre avec second membre. Elle n'est donc pas constante le long des carcatéristiques, mais vérifie une EDO le long de ces dernières.,.....**(1pts)**

3. Le système caractéristique est

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}.$$

Première intégrale première est

$$\Phi_1(x, y, z) = x^2 - y^2 = C.....\textbf{(1 pts)}$$

On remarque au passage que la constante C est forcément positive, eu égard au domaine Ω choisi. Ce sont des branches d'hyperboles coupant l'axe des x verticalement.

Deuxième intégrale première se calcule comme suit

$$\frac{d\,(x+y)}{x+y} = \frac{dz}{z}.$$

Ceci donne

$$\Phi_2(x, y, z) = \frac{x+y}{z} = C......\textbf{(1 pts)}$$

4. On peut donc donner les solutions sous forme implicite

$$(x, y, z) \mapsto F\left(x^2 - y^2, \frac{x+y}{z}\right) = \text{Constante},.$$

On déduit que

$$\frac{x+y}{z} = g\left(x^2 - y^2\right).$$

où g est une fonction quelconque de classe C^1. Alors la forme explicite des solutions

$$u(x, y) = \frac{x+y}{g\left(x^2 - y^2\right)}....\textbf{(1 pts)}$$

5. Déterminer la solution du problème dans le cas $f(x) = xe^{-x^2}$.

$$u(x, 0) = \frac{x}{g\left(x^2\right)} = xe^{-x^2}.....\textbf{(0.5 pts)}$$

Par identification $g\,(t) = e^t$, la solution est donnée par

$$u(x, y) = (x+y)\,e^{\left(y^2 - x^2\right)}.....\textbf{(1.5 pts)}$$

Test 2019

<u>Exercice 01:</u> (7pts) On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(0, y) = y^2. \end{cases} .....(E_1)$$

1) Une courbe caractéristique associé à (E_1) est une solution de son système caracatéristique (S) **(0.5pts)**

$$dx = -\frac{dy}{xy},\ dz = 0.....(S)$$

2) Le problème de Cauchy est posé sur la courbe $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\}$ (L'axe des ordonnés): **(1pts)**

a) Si la courbe $(\mathcal{C})$ n'est pas caractéristique, le problème (E_1) admet une solution unique.

b) Si la courbe $(\mathcal{C})$ est une courbe caractéristique, le problème (E_1) peut ne pas avoir de solution ou il peut en avoir une infinité.

3) On définit les caractéristiques comme des courbes de $\mathbb{R}^2$ données par $(x_c(s), y_c(s))$. Les équations qui satisfassent $(x_c(s), y_c(s))$ sont

$$\begin{cases} x_c'(s) = 1, \\ y_c'(s) = -x_c(s)\, y_c(s), \quad ....(\mathbf{1pts}) \\ z_c'(s) = 0. \end{cases}$$

4) Déterminons les courbes caractéristiques de (E_1).

Intégrons l'équation

$$dx = -\frac{dy}{xy} \Longrightarrow xdx = -\frac{dy}{y} \Longrightarrow \frac{1}{2}x^2 + \ln y = c.$$

Ceci donne

$$ye^{\frac{x^2}{2}} = K.....(\mathbf{1pts})$$

une intégrale première. Comme l'équation est linéaire homogène, l'équation cartésienne des courbes caractéristiques est

$$ye^{\frac{x^2}{2}} = K, K \in \mathbb{R}.$$

Pour tracer cette courbe, on trace la graphe des fonctions ......**(0.5pts)**

$$y_K = Ke^{\frac{-x^2}{2}},\ \ K \in \mathbb{R}.$$

5) Démontrons que la solution de (E_1) est constante le long $(x_c(s), y_c(s))$. Le long des caractéristiques, la solution vérifie

$$\frac{d}{ds}u\left(x_c(s), y_c(s)\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(x_c(s), y_c(s)\right) - x_c(s)\, y_c(s)\, \frac{\partial u}{\partial x}\left(x_c(s), y_c(s)\right) = 0....(\mathbf{1pts}).$$

ce qui implique que les solutions sont constantes le long des caractéristiques

6) Résolvons (E_1) si c'est possible: Comme la courbe $(\mathcal{C})$ n'est pas caractéristique et comme toutes les caractéristiques coupent la courbe $(\mathcal{C})$, le problème (E_1) admet une solution unique.

Soit (x_0, y_0) un point du plan correspondant à $s = s_0$. Soit $(x_*(s), y_*(s))$ la caractéristique passant par ce point et coupe la courbe de Cauchy au (x_1, y_1) avec $x_1 = 0$, alors on obtient

$$\begin{cases} y_0 e^{\frac{x_0^2}{2}} = K_* \\ y_1 = K_* \end{cases}$$

ce qui implique que $y_1 = y_0 e^{\frac{x_0^2}{2}}$. Comme la solution est constante le long de $(x_*(s), y_*(s))$, il en resulte que

$$u(x_0, y_0) = u(0, y_1) = u\left(0, y_0 e^{\frac{x_0^2}{2}}\right) = y_0^2 e^{x_0^2}.$$

On obtient donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$u(x, y) = y^2 e^{x^2}......(\mathbf{1.5pts})$$

7) Le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(x,0) = x^2 \end{cases} .....(E_2)$$

n'admet pas de solution d'aprés le théorème d'existence et d'unicité car il es posé sur un caractéristique.......**(1pts)**

Exercice 02: **(5pts)** Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

1) $b^2 - 4ac = 4x^4 \geq 0$. L'équation donnée est hyperbolique en dehors de l'axe des ordonnées........**(0.5pts)**

Les courbes caractéristiques sont

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y, \\ \varphi_2(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - y. \end{cases} .....(\mathbf{1pts})$$

On pose

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2}x^2 + y, \\ \eta = \frac{1}{2}x^2 - y. \end{cases} .....(\mathbf{0.5pts})$$

et $u(x,y) = v(\xi,\eta)$, Par règle de chaînes, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = x\frac{\partial v}{\partial \xi} + x\frac{\partial v}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}, \end{cases} .....(\mathbf{1pts})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial v}{\partial \xi} + x\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) \\ &= x^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}....(\mathbf{0.5pts}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial v}{\partial \xi} + y\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.....(\mathbf{0.5pts})$$

En remplaçant dans l'équation, on déduit

$$\begin{aligned} x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\frac{\partial u}{\partial x} &= x^3\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right) + x\frac{\partial v}{\partial \xi} + x\frac{\partial v}{\partial \eta} \\ &\quad -x^3\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right) \\ &\quad -x^2\frac{\partial v}{\partial \xi} - x^2\frac{\partial v}{\partial \eta} \\ &= 4x^3\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta} + x(1-x)\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)......(\mathbf{0.5pts}) \end{aligned}$$

On a

$$\xi + \eta = x^2, \to x = \sqrt{\xi + \eta}\ .$$

La forme canonique est donnée par

$$4x^3\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta} + x(1-x)\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 0,$$

ce qui donne comme $x \neq 0$

$$4(\xi + \eta)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta} + \left(1 - \sqrt{\xi + \eta}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 0......(\mathbf{0.5pts})$$

Examen 2019

Exercice 01: **(6pts)** On considère le problème de Cauchy suivant sur Ω

$$\begin{cases} 2y\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0, \\ u(x,0)=f(x),\ x>0. \end{cases}$$

1) Intégrons l'équation

$$\frac{dx}{2y}=dy \Longrightarrow dx=2ydy \Longrightarrow y^2-x=c$$

ce qui donne une intégrale première

$$\varphi(x,y)=y^2-x.....(\mathbf{1pts})$$

Comme l'équation est linéaire homogène, l'équation cartésienne des courbes caractéristiques est

$$y^2-x=k, k\in\mathbb{R}.$$

Pour tracer cette courbe, on trace la graphe des fonctions

$$g_k(y)=y^2-k, k\in\mathbb{R}.......(\mathbf{0.5pts})$$

2) On définit les caractéristiques comme des courbes de $\mathbb{R}^3$ définies par $(x_c(s),y_c(s),z_c(s))$. Les équations qui satisfassent $(x_c(s),y_c(s),z_c(s))$ sont

$$\begin{cases} x_c'(s)=2y(s), \\ y_c'(s)=1, \\ z_c'(s)=0. \end{cases} ......(\mathbf{0.5pts})$$

La solution de (E_1) est constante le long $(x_c(s),y_c(s))$. Le long des caractéristiques, la solution de vérifie

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}u(x_c(s),y_c(s)) &= x_c'(s)\frac{\partial u}{\partial x}(x_c(s),y_c(s))+y_c'(s)\frac{\partial u}{\partial x}(x_c(s),y_c(s)) \\ &= 2y(s)\frac{\partial u}{\partial x}(x_c(s),y_c(s))+\frac{\partial u}{\partial x}(x_c(s),y_c(s))=0......(\mathbf{1pts}) \end{aligned}$$

3) Ce problème est posé sur la courbe $\mathcal{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x>0,\ y=0\}$, comme la courbe $(\mathcal{C})$ n'est pas caractéristique et comme toutes les caractéristiques coupent la courbe $(\mathcal{C})$, le problème (E_1) admet une solution unique.

Soit (x_0,y_0) un point du plan correspondant à $s=s_0$. Soit $(x_*(s),y_*(s))$ la caractéristique passant par ce point et coupe la courbe de Cauchy au (x_1,y_1) avec $y_1=0$ et $x_1>0$, alors, on obtient

$$\begin{cases} y_0^2-x_0=k_*, \\ x_1=k_*. \end{cases}$$

Ce système implique que $x_1=y_0^2-x_0$. Comme la solution est constante le long de $(x_*(s),y_*(s))$, il en résulte que

$$u(x_0,y_0)=u(x_1,y_1)=u\left(y_0^2-x_0,0\right)=f\left(y_0^2-x_0\right)$$

à condition que $y_0^2-x_0>0$. Puisque la solution est connue seulement pour $x>0$ (Sur la demi droite). La solution existe uniquement sur le domaine

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y^2>x\right\}$$

tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$u(x,y) = f\left(y^2 - x\right) ....(\mathbf{2pts})$$

4) Le problème donc est mal posé, la solution ne peut pas exister sur tout le domaine Ω, donc il est preféable que le problème soit posé sur tout $\mathbb{R}$.......(**1pts**)

<u>Exercice 02:</u> (7pts) Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

1) $b^2 - 4ac = 16$. L'équation donnée est hyperbolique sur tout $\mathbb{R}$.......(**0.5pts**)

Les courbes caractéristiques sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x,y) = y - 4x, \\ \varphi_2(x,y) = y. \end{array} \right. ......(\mathbf{0.5pts})$$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = y - 4x, \\ \eta = y \end{array} \right.$$

et $u(x,y) = v(\xi,\eta)$. Par règle de chaîne, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = -4\frac{\partial v}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{array} \right. ......(\mathbf{0.5pts})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) = 16\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, ...(\mathbf{0.5pts})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = -4\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\right) ....(\mathbf{0.5pts})$$

En remplaçant dans l'équation, on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 16\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 16\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\right) - 4\frac{\partial v}{\partial \xi} \\ &= -16\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - 4\frac{\partial v}{\partial \xi} ....(\mathbf{1pts}) \end{aligned}$$

La forme canonique est donnée par

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4}\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0.....(\mathrm{FC})$$

3) On pose $w = \frac{\partial v}{\partial \xi}$, (FC) est équivalente à $\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{1}{4}w = 0$. Si on fixe ξ, cette dernière équation est une EDO du premier ordre $w' + \frac{1}{4}w = 0$ dont la solution est: $w(\xi,\eta) = k(\xi)\, e^{-\frac{\eta}{4}}$. Ceci implique que $v(\xi,\eta) = e^{-\frac{1}{4}n} \int k(\xi)\, d\xi + g(\eta)$ d'où $v(\xi,\eta) = f(\xi)\, e^{-\frac{1}{4}n} + g(\eta)$. La solution de l'équation (E) est maintenant donnée par

$$u(x,y) = f(y - 4x)\, e^{-\frac{y}{4}} + g(y) ....(\mathbf{2pts})$$

4) Trouvons une solution spécifique satisfaisant

$$u(x, 8x) = 0, \quad u_x(x, 8x) = 4e^{-2x}.$$

On a

$$\begin{cases} f(4x)\, e^{-2x} + g(8x) = 0, \\ f'(4x) = -1. \end{cases}$$

Une intégration de la deuxième équation implique

$$\int f'(4x)\, dx = -\int dx \Rightarrow \frac{1}{4} f(4x) = -x + cst \Rightarrow f(4x) = 4(-x + cst).$$

Par conséquent, la première équation devient

$$4(-x + cst)\, e^{-2x} + g(8x) = 0,$$

qui implique en posant $8x = s$ que

$$g(s) = 4\left(\frac{s}{8} - cst\right) e^{-\frac{s}{4}}.$$

En remplaçant dans la première equation, on trouve

$$f(4x)\, e^{-2x} = 4(-x + cst)\, e^{-2x}.$$

Si on pose $4x = s$, on obtient: $f(s) = 4\left(-\frac{s}{4} + cst\right)$. Finalement, on arrive à

$$u(x, y) = [-(y - 4x) + 4cst]\, e^{-\frac{y}{4}} + \left(\frac{y}{2} - 4cst\right) e^{-\frac{y}{4}} = \left(-\frac{y}{2} + 4x\right) e^{-\frac{y}{4}} \text{.......}(\mathbf{1.5pts})$$

<u>Exercice 03:</u> (8pts):

I) 1. Ce problème modélise l'évolution de la température $u(x,t)$ dans une tige thermoconductrice unidimensionnelle homogène, d'axe (Ox), de longueur L dont la température initiale (au temps $t = 0$) est connue et tel que la température à l'extrémité $x = 0$ est nulle (ce qui correspond que cet extrimité est attaché à un corp isolé: eau, bois, ect...). Le flux de la chaleur au deuxième extrimité $x = L$ est propotionelle à la température à cet extrimité.........(**1pts**)

2. La condition de compatibilité s'écrit

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \ t \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) + hu(L,t) = 0, \ t \geq 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(0) = 0 \text{ et } f'(L) + hf(L) = 0 \text{ ......}(\mathbf{1pts})$$

II) 1. On pose $u(x,t) = X(x)T(t)$ et on suppose qu'il exite $t_0 > 0$ tel que $T(t_0) \neq 0$. Il doit exister une constante λ telle que

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \ 0 < x < L, ...(edo\ 1) \\ T'(t) + \lambda k T(t) = 0.............(edo\ 2) \end{cases} \text{......}(\mathbf{1pts})$$

2. On a

$$\begin{cases} u(0, t_0) = X(0)\, T(t_0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) + hu(L,t) = (X'(L) + hX(L))\, T(t_0) = 0 \end{cases} \text{......}(\mathbf{0.5pts})$$

$$\Longrightarrow \quad X(0) = 0 \text{ et } X'(L) + hX(L) = 0.$$

3.Cas 1: $\lambda = -\mu^2 < 0$, alors $X(x) = \alpha e^{-\mu x} + \beta e^{\mu x}$ et $X'(x) = \mu\left[-\alpha e^{-\mu x} + \beta e^{\mu x}\right]$ où α, β sont des nombres réels arbitraires. Mais les conditions

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} X(0)=0 \\ X'(L)+hX(L)=0 \end{array}\right. & \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta=0 \\ \alpha(h-\mu)e^{-\mu L}+\beta(h+\mu)e^{\mu L}=0 \end{array}\right. \\
& \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta=-\alpha \\ -\alpha\left[-(h-\mu)e^{-\mu L}+(h+\mu)e^{\mu L}\right]=0 \end{array}\right. \\
& \Longrightarrow \beta=\alpha=0.
\end{aligned}$$

Sinon: $(h+\mu)e^{2\mu L} = (h-\mu)$, pour $h=\mu$. On arrive à $2he^{2\mu L}=0$, ce qui implique que $h=\mu=0$. Donc absurde, alors $X \equiv 0$ et $u(x;t)=0$ pour tout $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$. On doit donc exclure le cas $\lambda < 0$..........(**1pts**)

Cas 2: Si $\lambda = 0$, $X(x) = \alpha + \beta x$, et $X'(x) = \beta$ où α, β sont des nombres réels arbitraires. Mais les conditions

$$X(0)=0 \text{ et } X'(L)+hX(L)=0 \Longrightarrow \alpha=0 \text{ et } \beta=0.$$

Ainsi dans le cas où $\lambda = 0$, alors $X \equiv 0$ et $u(x;t)=0$ pour tout $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$. On doit donc exclure le cas $\lambda = 0$.......(**0.5pts**)

Cas 3: Si $\lambda = \mu^2 > 0$, alors $X(x) = \alpha\cos(\mu x)+\beta\sin(\mu x)$ et $X'(x) = \mu\left[-\alpha\sin(\mu x)+\beta\cos(\mu x)\right]$ où α, β sont des nombres réels arbitraires. Mais les conditions aux limites ont comme conséquence que $\alpha = 0$ et $\beta(\mu\cos(\mu L)+h\sin(\mu L))=0$.

Les solutions non triviales ($\beta \neq 0$) sont donc obtenues pour

$$\frac{\mu}{h} + \tan(\mu L) = 0 \text{.......}(\mathbf{1pts})$$

Cette équation admet une infinité dénombrable de solutions que l'on note $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Conséquemment $\lambda_n = (\mu_n)^2$ sont les valeurs propres et les fonctions propres sont

$$X_n(x) = \beta_n \sin(\mu_n x) \text{......}(\mathbf{0.5pts})$$

III) 1. La solution T_n de $(edo\ 2)$ est

$$T(t) = \gamma_n e^{-k\lambda_n t},\ n \in \mathbb{N}^* \text{.......}(\mathbf{0.5pts})$$

2. L'expression de $u(x,t)$

$$u_n(x,t) = \delta_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)e^{-k\lambda_n t},\ n \in \mathbb{N}^* \text{.......}(\mathbf{0.5pts})$$

Le principe de superposition implique que toute combinaison linéaire

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)e^{-k\lambda_n t} \text{......}(\mathbf{0.5pts})$$

Rattrapage 2019

<u>**Exercice 01:**</u> **(6pts)** On considère le problème de Cauchy suivant sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$$\left\{\begin{array}{l} y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R}, \end{array}\right.$$

1) Par intégration, on a

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \Longrightarrow x^2 + y^2 = c, \ c \ \in \mathbb{R}^+$$

ce qui donne

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2.....(\mathbf{0.5pts})$$

une integrale première. Comme l'équation est linéaire homogène, l'equation cartésienne des courbes caractéristiques est

$$x^2 + y^2 = c, c \in \mathbb{R}^+.$$

Il s'agit des demi-cercles de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{c}$. (**0.5pts**)
2) On définit les caractéristiques comme des courbes de $\mathbb{R}^3$ $(x_c(s), y_c(s), z_c(s))$. Les équations qui satisfassent $(x_c(s), y_c(s), z_c(s))$ sont

$$\begin{cases} x_c'(s) = y(s), \\ y_c'(s) = -x(s), \\ z_c'(s) = 0. \end{cases} ......(\mathbf{0.5pts})$$

La solution de (E_1) est constante le long $(x_c(s), y_c(s))$. Le long des caractéristiques, la solution vérifie

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} u(x_c(s), y_c(s)) &= x_c'(s) \frac{\partial u}{\partial x}(x_c(s), y_c(s)) + y_c'(s) \frac{\partial u}{\partial y}(x_c(s), y_c(s)) \\ &= y(s) \frac{\partial u}{\partial x}(x_c(s), y_c(s)) - x(s) \frac{\partial u}{\partial y}(x_c(s), y_c(s)) = 0......(\mathbf{0.5pts}) \end{aligned}$$

3) Ce problème est posé sur la courbe $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \text{ et } y = 0\}$, comme la courbe $(\mathcal{C})$ n'est pas caractéristique et comme toutes les caractéristiques coupent la courbe de Cauchy $(\mathcal{C})$, le problème de Cauchy admet une solution unique (**0.5pts**).
Soit (x_0, y_0) un point du plan correspondant à $s = s_0$. Soit $(x_*(s), y_*(s))$ la caractéristique passant par ce point et coupe la courbe de Cauchy au (x_1, y_1) avec $y_1 = 0$ et $x_1 \in \mathbb{R}$, alors, on obtient

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = k_*, \\ x_1^2 = k_*. \end{cases} \quad (\mathbf{0.5pts})$$

Ceci implique que $x_1^2 = x_0^2 + y_0^2$ alors $x_1 = \pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.(**0.5pts**)
Comme la solution est constante le long de $(x_*(s), y_*(s))$, il en resulte que

$$u(x_0, y_0) = u(x_1, y_1) = u\left(\pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, 0\right) = f\left(\pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right).(\mathbf{0.5pts})$$

La condidtion pour que la solution doit exister est $f\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right) = f\left(-\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right)$. Autrement dit, la fonction f soit paire. (**0.5pts**)
Si le cas, alors, on obtient pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$$u(x, y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)......(\mathbf{0.5pts})$$

Comme la fonction $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^4}$ est paire, on déduit de ce qui précede que

$$u(x, y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \frac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{1 + (x^2 + y^2)^2}......(\mathbf{1pts})$$

<u>Exercice 02:</u> (6pts) Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4e^y = 0.$$

1) $b^2 - 4ac = 4$. L'équation donnée est hyperbolique sur tout $\mathbb{R}$.......(**0.5pts**)
Les courbes caractéristiques sont

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) = y + 2x, \\ \varphi_2(x,y) = y. \end{cases} \quad ......(\mathbf{0.5pts})$$

On pose

$$\begin{cases} \xi = y + 2x, \\ \eta = y \end{cases}$$

et $u(x,y) = v(\xi,\eta)$, Par la règle de chaîne, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial v}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{cases} \quad ......(\mathbf{0.5pts})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) = 4\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, ...(\mathbf{0.5pts})$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\right) ....(\mathbf{0.5pts})$$

En remplaçant dans l'équation, on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4e^y &= 4\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 4\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\right) + 4e^\eta \\ &= -4\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + 4e^\eta. \end{aligned}$$

La forme canonique est donnée par

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = e^\eta .....(\mathbf{0.5pts})(\mathrm{FC})$$

3) On pose $w = \frac{\partial v}{\partial \xi}$, (FC) est équivalente à

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = e^\eta.$$

Si on fixe ξ, cette dernière équation est une EDO du premier ordre dont la solution est

$$w(\xi,\eta) = e^\eta + k_1'(\xi),$$

ce qui implique que

$$v(\xi,\eta) = \int k_1'(\xi)\, d\xi + k_2(\eta) + \xi e^\eta$$

d'où

$$v(\xi,\eta) = k_1(\xi) + k_2(\eta) + \xi e^\eta.$$

La solution de l'équation (E) est maintenant donnée par

$$u(x,y) = k_1(y+2x) + k_2(y) + (y+2x)e^y ....(\mathbf{1.5pts})$$

4) Trouvons une solution spécifique satisfaisant

$$u(0,y) = f(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = g(y).$$

On a

$$\begin{cases} k_1(y) + k_2(y) + ye^y = f(y), \\ 2k_1'(y) + 2e^y = g(y). \end{cases}$$

Une intégration de la deuxième équation implique

$$\begin{aligned} 2\int (k_1'(y) + e^y)\, dy &= \int g(y)dy \Rightarrow 2(k_1(y) + e^y) + cst_1 = G(y) \\ &\Rightarrow \ k_1(y) = \frac{1}{2}G(y) - e^y - \frac{1}{2}cst_1 \end{aligned}$$

où G est la primitive de g. Par conséquent, la première équation devient

$$\begin{aligned} k_2(y) &= f(y) - k_1(y) - ye^y \\ &= f(y) - \frac{1}{2}G(y) - ye^y + e^y + \frac{1}{2}cst_1. \end{aligned}$$

Finalement, on arrive à

$$u(x,y) = \frac{1}{2}G(y+2x) + f(y) - \frac{1}{2}G(y) + (1-y)e^y + (y+2x)e^y + C.......(\mathbf{1.5pts})$$

où $C = cst = 0$ car $u(0,y) = f(y)$.

<u>Exercice 03:</u> (8pts):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ 0 < x < L, \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \ t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad .....(P)$$

I) 1. Ce problème modélise l'évolution de la température $u(x,t)$ dans une tige thermoconductrice unidimensionnelle homogène, d'axe (Ox), de longueur L dont la température initiale (au temps $t = 0$) est connue et tel que la température à l'extrémité $x = 0$ est nulle (ce qui correspond que cet extrimité est attaché à un corp isolé: eau, bois, ect...). Le flux de la chaleur au deuxième extrimité $x = L$ est nul.........(**1.5pts**)

2. La condition de compatibilité

$$\begin{aligned} &\begin{cases} u(0,t) = 0, \ t \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \ t \geq 0, \end{cases} \\ \Rightarrow \quad & f(0) = 0 \text{ et } f'(L) = 0 \ ......(\mathbf{1pts}) \end{aligned}$$

II) 1. On pose $u(x,t) = X(x)T(t)$ et on suppose qu'il exite $t_0 > 0$ tel que $T(t_0) \neq 0$. Il doit exister une constante λ telle que

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \ 0 < x < L, ...(edo\ 1) \\ T'(t) + \lambda k T(t) = 0.............(edo\ 2) \end{cases} \quad ......(\mathbf{1pts})$$

2. On a

$$\begin{aligned} &\begin{cases} u(0,t_0) = X(0)T(t_0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t_0) = 0 \end{cases} \quad ......(\mathbf{0.5pts}) \\ \Longrightarrow \ & X(0) = 0 \text{ et } X'(L) = 0 \end{aligned}$$

3.Cas 1: $\lambda = -\mu^2 < 0$, alors $X(x) = \alpha e^{-\mu x} + \beta e^{\mu x}$ et $X'(x) = \mu\left[-\alpha e^{-\mu x} + \beta e^{\mu x}\right]$ où α, β sont des nombres réels arbitraires. Mais les conditions

$$\begin{aligned}
\begin{cases} X(0) = 0, \\ X'(L) = 0 \end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0, \\ -\alpha\mu e^{-\mu L} + \beta\mu e^{\mu L} = 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha, \\ \beta\left(e^{-\mu L} + e^{\mu L}\right) = 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \beta = \alpha = 0.
\end{aligned}$$

Donc $X \equiv 0$ et $u(x;t) = 0$ pour tout $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$. On doit donc exclure le cas $\lambda < 0$...........(**0.5pts**)

Cas 2: Si $\lambda = 0$, $X(x) = \alpha + \beta x$, et $X'(x) = \beta$ où α, β sont des nombres réels arbitraires. Mais les conditions

$$X(0) = 0 \text{ et } X'(L) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 \text{ et } \beta = 0.$$

Ainsi dans le cas où $\lambda = 0$, $X \equiv 0$ et $u(x;t) = 0$ pour tout $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$. On doit donc exclure le cas $\lambda = 0$.......(**0.5pts**)

Cas 3: Si $\lambda = \mu^2 > 0$, alors $X(x) = \alpha\cos(\mu x) + \beta\sin(\mu x)$ et $X'(x) = \mu\left[-\alpha\sin(\mu x) + \beta\cos(\mu x)\right]$ où α, β sont des nombres réels arbitraires. Mais les conditions aux limites ont comme conséquence que $\alpha = 0$ et $\beta\cos(\mu L) = 0$.

Les solutions non triviales ($\beta \neq 0$) sont donc obtenues pour

$$\cos(\mu L) = 0.......$$

Cette équation admet une infinité dénombrable de solutions que l'on note $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Conséquemment

$$\mu_n \in \left\{\frac{2n+1}{2L}\pi;\ n \in Z\right\} \ (\mathbf{0.5pts})$$

comme $cos(x) = cos(-x)$ alors $n \in N$. Les valeurs propres sont

$$\lambda_n \in \left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2;\ n \in N\right\} \ (\mathbf{0.5pts})$$

et les fonctions propres sont

$$X_n(x) = \beta_n\sin(\mu_n x) ......(\mathbf{0.5pts})$$

III) 1. La solution T_n de (*edo* 2) est

$$T(t) = \gamma_n e^{-k\lambda_n t},\ n \in \mathbb{N}.......(\mathbf{0.5pts})$$

2. L'expression de $u(x,t)$

$$u_n(x,t) = \delta_n\sin(\mu_n x)\, e^{-k\lambda_n t},\ n \in \mathbb{N}.......(\mathbf{0.5pts})$$

Le principe de superposition implique que toute combinaison linéaire

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)e^{-k\lambda_n t}......(\mathbf{0.5pts})$$

Références

[1] Baddari K, Abbassov A. Equations de la physique mathématique appliquées. OPU ; 2009.
[2] Courant R, Hilbert D. Methods of mathematical physics. Wiley -V C H , édition de 1989.
[3] Eriksson K, Estep D, Hansbo P, Johnson C. Computational Differential Equations. Cambridge University Press, New York, 1990.
[4] Nikolenko V. Équations de la physique mathématique. UM, Moscou, 1981.
[5] Pinchover, Rubenstein J. An Introduction to Partial Differential Equations. Cambridge University Press, 2005.
[6] Reinhard H. Équations aux dérivées partielles. Dunod, paris, 2001.
[7] Schwartz L. Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques. Hermann, Paris, 1983.
[8] Walter A. Strauss. Partial Differential Equations: An Introduction. Wiley, 1992.