~~(1) الدوال الأسية :~~

~~(1) تعريف~~

(6) خواص النهايات :

نظرية : إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ و $\lim_{x\to x_0} f(x)=b$ حيث ، $a,b\in\mathbb{R}$ و $x_0\in\mathbb{R}$ أو $x_0=\infty$ فإن :

(1) $\lim_{x\to x_0}(\lambda f(x)+\mu g(x))=\lambda a+\mu b$ من أجل كل $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

(2) $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=a\cdot b$

(3) إذا كانت $b\neq 0$ فإن $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$

حالات خاصة :

(1) $\lambda=\mu=1$ نجد أن $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=a+b$

(2) $\lambda=1,\mu=-1$ نجد أن $\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=a-b$

(3) $\mu=0$ و $\lambda\in\mathbb{R}$ نجد أن ، $\lim_{x\to x_0}(\lambda f(x))=\lambda a$

(4) إذا وضعنا $f(x)=g(x)$ نجد أن ، $\lim_{x\to x_0}(f(x))^2=a^2$

و بصورة أعم ، يكون لدينا

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^n=a^n$$

(5) $\lim_{x\to x_0}f(x)=a \iff \lim_{x\to x_0}(f(x)-a)=0$

(6) إذا كان $f(x)\le g(x)$ في جوار ما للنقطة x_0 فإن $a\le b$.

و بصورة خاصة إذا كان $f(x)\le K$ في جوار ما للنقطة x_0 فإن $a\le K$

ملاحظة : إذا كان $\lim_{x\to x_0}f(x)=a$ و $\lim_{x\to x_0}g(x)=b$ فإن ،

(1) $a\neq\pm\infty$ و $b=\pm\infty$ فيكون ،

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\pm\infty$$

و

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

b) $c \neq a \neq \pm\infty$ و $b = \pm\infty$ فيكون:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)\,g(x)) = \pm\infty$$

و

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \pm\infty$$

وذلك حسبما تكون $a > 0$ أو $a < 0$

c) $a = +\infty$ و $b = +\infty$ فيكون $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$

و $\lim_{x \to x_0} (f(x) . g(x)) = +\infty$

d) $a = -\infty$ و $b = -\infty$ فيكون: $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty$

و $\lim_{x \to x_0} (f(x) . g(x)) = +\infty$

e) إذا كانت $a = +\infty$ و $b = -\infty$ فيكون $\lim_{x \to x_0} f(x) . g(x) = -\infty$

ولا نستطيع أن نحكم مباشرة على أن للنسبة $\frac{f(x)}{g(x)}$ نهاية معينة أم لا.
وفي مثل هذه الحالة نقول أن هناك عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$، وعملية إيجاد وحساب هذه النهاية تدعى إزالة عدم التعيين

f) هناك أشكال أخرى لعدم التعيين مثل:

$$\infty^{\infty} ، 0^{\infty} ، 1^{\infty} ، \infty - \infty ، \frac{\infty}{\infty} ، 0 \times \infty ، \frac{0}{0}$$

نظرية: إذا كان $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = a$

و $h(x)$ دالة تحقق المتراجحة: $f(x) \le h(x) \le g(x)$ في جوار النقطة x_0 فإن: $\lim_{x \to x_0} h(x) = a$.

~~مثال~~: $\cancel{\lim_{x \to x_0} \sin x}$